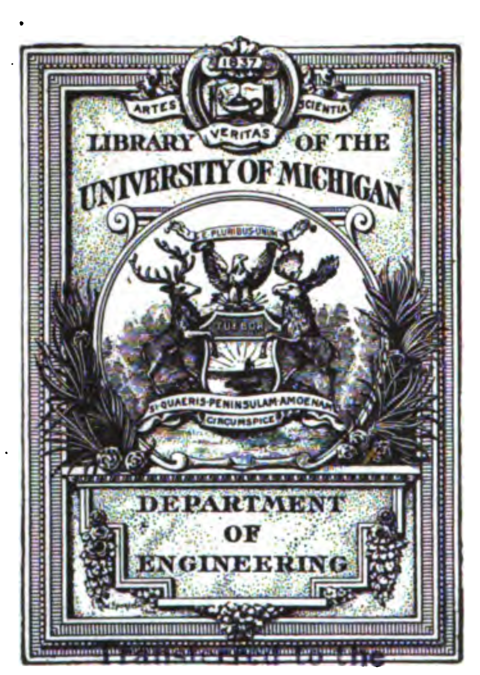





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



THEORETISCHE

MASCHINENLEHRE

VON

DR. F. GRASHOF,

GROSSH. BADISCHER GEHEIMRATH UND PROF. AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

IN VIER BÄNDEN.

ZWEITER BAND.

HAMBURG UND LEIPZIG,

VERLAG VON LEOPOLD VOSS.

1883.

THEORIE DER GETRIEBE

UND DER

MECHANISCHEN MESSINSTRUMENTE

VON

DR. F. GRASHOF,

GROSSH. BADISCHER GEHEIMRATH UND PROF. AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

MIT 226 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

HAMBURG UND LEIPZIG,

VERLAG VON LEOPOLD VOSS.

1883.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Theorie der Getriebe.

A. Kinematik.

β. Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen.

γ. Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen.

2. Höhere Elementenpaare mit nicht cylindrischen Axoiden.

II. Unselbständige Elementenpaare und kinematische Ketten.

a. Unselbständige Elementenpaare.

b. Unselbständige kinematische Ketten.

III. Elementare Mechanismen.

a. Einfache Mechanismen.

1. Einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren.

α. Mechanismen aus Prismenketten.

β. Mechanismen aus Drehkörperketten.

γ. Mechanismen aus Schraubenketten.

δ. Mechanismen aus Ketten mit theilweise nicht zwangläufigen niederen Elementenpaaren.

2. Einfache Mechanismen mit höheren Elementenpaaren.

b. Zusammengesetzte Mechanismen.

B. Allgemeine Bewegungswiderstände.

I. Reibung von Prismenpaaren.

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung

III. Reibung von Schraubenpaaren.

IV. Zahnreibung.

V. Walzenreibung.

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen.

C. Theorie der Regulatoren.

I. Bremswerke.

II. *Schwungräder.*

III. *Accumulatoren.*

IV. *Regulatoren für Kraftmaschinen.*

a. Dynamometrische Regulatoren.

b. Tachometrische Regulatoren.

1. Interferenz-Regulatoren.

2. Hydraulische Regulatoren.

3. Windflügel-Regulatoren.

4. Centrifugal-Regulatoren.

IV. *Waagen.*

ERSTER ABSCHNITT.

Theorie der Getriebe.

A. Kinematik.*

§. 1. Einleitende Erklärungen.

Während unter Kinematik im Allgemeinen die Lehre von der Bewegung eines Punktes, Körpers oder Körpersystems ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte und bewegten Massen verstanden wird, beschränken sich einerseits die folgenden Untersuchungen auf die gegenseitigen Bewegungen der Bestandtheile solcher besonderen Körpersysteme, wie sie den Maschinen eigenthümlich sind, erweitern aber andererseits die Aufgabe durch das vorgesetzte Ziel einer systematischen Entwicklung und Uebersicht der zur Vermittlung bestimmter Bewegungen geeigneten Körperverbindungen. Im ersteren Sinne könnte die hier in Rede stehende Lehre auch als Maschinen-Kinematik (Anwendung der Kinematik auf Maschinen), im letzteren als Kinetrik** bezeichnet werden im Gegensatze

---

* Den unter dieser Ueberschrift folgenden Entwickelungen liegt zwar in der Hauptsache Reuleaux's „Theoretische Kinematik, 1875" zu Grunde, wodurch dieser Zweig der Maschinenlehre vor Allem (trotz mancher Mängel und Irrthümer) in systematischer Weise ausgebildet wurde; indessen sind die Abweichungen der folgenden Darstellung von derjenigen des genannten Werkes, die sich zum Theil mit der kritischen Besprechung desselben durch Prof. Rittershaus im 21. Bande des „Civilingenieur" in Uebereinstimmung befinden, zu mannigfach, als dass es thunlich war, sie einzeln hervorzuheben und zu begründen, ohne der Darstellung einen derartig polemischen Charakter zu geben, wie er dem Zwecke des vorliegenden Buches nicht entsprechend erachtet wurde. Dem sachverständigen Leser werden die Abweichungen und ihre Gründe aus der Darstellung selbst und ihrer Vergleichung mit dem Reuleaux'schen Werke erkennbar sein.

** *κινημα*, Bewegung; *κινητρον*, Hülfsmittel zur Bewegung.

zur allgemeinen oder reinen, kurzweg sogenannten Kinematik, welche als Theil der theoretischen Mechanik behandelt zu werden pflegt, und deren Fundamentalsätze deshalb hier als bekannt vorausgesetzt werden.*

Nun ist eine Maschine als Körpersystem besonderer Art vor Allem dadurch ausgezeichnet, dass jeder dieser Körper, welche einstweilen (vorbehaltlich gewisser später erst zu besprechender Begriffserweiterungen) als starre Körper vorausgesetzt werden, durch beständige Berührung mit wenigstens einem anderen derselben in seiner Beweglichkeit beschränkt wird. Je zwei solche sich berührende und dadurch sich gegenseitig stützende Körper heissen Elemente und bilden zusammen ein Elementenpaar, das übrigens als solches vollständig charakterisirt ist durch die Gestalten der sich berührenden Oberflächentheile beider Elemente und durch die Art dieser Berührung, die ihrerseits vor Allem bedingt ist durch den Sinn, in welchem der fragliche Oberflächentheil jedes Elementes dasselbe begrenzt, d. h. durch die Seite der Fläche, auf der die materielle Substanz des Elementes gelegen ist. So ist z. B. ein Elementenpaar als solches bestimmt, wenn angeführt wird, dass die dasselbe als Elemente bildenden Körper sich mit gewissen Cylinderflächen in einer Geraden berühren, wenn nur ausserdem noch gesagt ist, ob beide Körper Vollcylinder (Convexcylinder) sind, d. h. ihre Substanz innerhalb der Cylinderfläche gelegen, oder der eine ein Hohlcylinder (Concavcylinder), d. h. seine Substanz ausserhalb der Cylinderfläche gelegen ist; es ist aber gleichgültig für den Charakter dieses Körperpaares als Elementenpaar, wie etwa der Hohlcylinder von aussen begrenzt, ob ferner der Vollcylinder innerhalb seiner Cylinderfläche ganz mit Körpersubstanz erfüllt, und wie er anderenfalls etwa innen begrenzt sein mag. — Die speciellen Bezeichnungen gewisser Körper, wie Prisma, Cylinder, Kegel, Kugel, Drehkörper (Rotationskörper) etc. sollen in der Folge stets auf Vollkörper bezogen, und nur Hohlkörper immer zugleich als solche ausdrücklich bezeichnet werden, z. B. als Hohlprisma, Hohlcylinder etc. Auch soll ein Cylinder oder Kegel stets als Kreiscylinder resp. Kreiskegel, somit als Drehkörper verstanden werden, wenn er nicht ausdrücklich als allgemeiner oder als specieller anderer Cylinder resp. Kegel bezeichnet wird. Ein Vollkörper und ein Hohlkörper sollen einander entsprechend heissen, wenn ihre charakteristischen Oberflächen congruent sind. Unter einem Körperpunkt endlich wird irgend ein mit dem betreffenden Körper fest verbunden gedachter Punkt verstanden, der weder in der Körpersubstanz, noch auch selbst bei einem Vollkörper inner-

* Siehe: Dr. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.



halb, bei einem Hohlkörper ausserhalb seiner charakteristischen Oberfläche zu liegen braucht.

In Betreff des Grades gegenseitiger Beweglichkeit der Elemente eines Paares können 3 Fälle unterschieden werden:

1) Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind wenigstens theilweise begrenzte Räume, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere beliebig je in einem solchen Raume bewegen. Ein Elementenpaar dieses Charakters wird z. B. von einer Kugel mit einem dieselbe in einem grössten Kreise berührenden Hohlcylinder gebildet: ein Punkt der Kugel in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkte ist gegen den Hohlcylinder beliebig innerhalb der mit letzterem conaxialen Cylinderfläche, deren Halbmesser $= r$ ist, beweglich; ein Punkt des Hohlcylinders in der Entfernung r von seiner Axe aber gegen die Kugel beliebig ausserhalb der mit dieser concentrischen Kugelfläche mit dem Halbmesser r.

2) Elementenpaare von zweifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Flächen, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Fläche bewegen. Ein solches Paar wird z. B. von einem Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder gebildet, und zwar ist das Bewegungsgebiet eines Punktes irgend eines der beiden Elemente gegen das andere die mit beiden conaxiale Cylinderfläche, deren Halbmesser der Entfernung des Punktes von der Axe gleich ist.

3) Elementenpaare von einfacher Beweglichkeit oder zwangläufige Elementenpaare. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Linien, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Linie bewegen. Bei einer Schraube mit entsprechender Mutter (Hohlschraube) z. B. ist jeder Punkt eines Elementes gegen das andere in einer bestimmten Schraubenlinie beweglich.

Mit Rücksicht darauf, dass jede elementare, d. i. unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers in einem gewissen Raume in 3 Schiebungen längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen und in 3 Drehungen um diese zerlegt werden kann, und dass diese 6 einfachen Elementarbewegungen bei einem frei beweglichen Körper unabhängig von einander sind, können dem letzteren nach einem von W. Thomson gebrauchten Ausdrucke 6 Freiheitsgrade der Bewegung zugeschrieben werden, einem Körper von beschränkter Beweglichkeit aber so viele Freiheitsgrade der Bewegung, wie von jenen einfachen Elementarbewegungen mit Rücksicht auf die der Beschränkungsart entsprechenden Beziehungen

zwischen ihnen unabhängig bleiben. Hiernach ist offenbar die Zwangläufigkeit oder einfache Beweglichkeit eines Elementenpaares mit nur einem Freiheitsgrade, die dreifache Beweglichkeit mit höchstens 5 Freiheitsgraden verbunden. Die zweifache Beweglichkeit eines Elementenpaares kann, wie in dem angeführten Beispiele eines Cylinders mit entsprechendem Hohlcylinder, 2 oder auch, wie im Falle einer von entsprechender Hohlkugel umschlossenen Kugel oder einer in entsprechendem Schlitz beweglichen gleichförmig dicken Platte, 3 Freiheitsgraden entsprechen.

Diese und ebenso auch die folgenden Erklärungen setzen einstweilen (vorbehaltlich späterer Ergänzungen) selbständig geschlossene Elementenpaare voraus, d. h. solche, bei denen die beständige gegenseitige Berührung und zwar bei unveränderter Art der entsprechenden gegenseitigen Stützung der Elemente blos in Folge ihrer Gestalt und Begrenzung ohne anderweitige Hülfsmittel bei jeder möglichen relativen Bewegung erhalten bleibt. Wenn z. B. bei dem oben unter 2) genannten Paare (Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder) der Hohlcylinder nur unvollständig als ein zwischen zwei Meridianebenen enthaltener Ausschnitt ausgeführt würde, so wäre die Geschlossenheit des Paares im erklärten Sinne an die Bedingung geknüpft, dass der Winkel jenes Ausschnitts $> 180^0$ ist.

Ausser in Beziehung auf den oben erklärten dreifach verschiedenen Grad der gegenseitigen Beweglichkeit ihrer Elemente können die Paare hinsichtlich der Art dieser Beweglichkeit von verschiedenen Gesichtspunkten aus unterschieden werden, und zwar namentlich in Beziehung darauf, ob die Beweglichkeit des einen Elementes gegen das andere in jeder Hinsicht dieselbe wie die des letzteren gegen das erstere ist oder nicht, wonach man niedere und höhere Elementenpaare unterscheidet. Sind nämlich E und E' die beiden gepaarten Elemente, und ist P ein beliebiger Punkt von E, P' aber ein solcher Punkt von E', der mit P zusammenfallen kann, so soll das Elementenpaar E, E' ein niederes oder höheres heissen, je nachdem das Bewegungsgebiet von P gegen E' mit dem Bewegungsgebiete von P' gegen E zusammenfällt oder nicht. In diesem Sinne ist z. B. das oben unter 1) erwähnte Elementenpaar von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcylinder von gleichem Durchmesser) ein höheres, sind dagegen die unter 2) und 3) beispielsweise angeführten Paare von zwei- und einfacher Beweglichkeit (Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder, Schraube mit entsprechender Mutter) niedere. — Wenn die relative Bewegung eines Punktes oder Körpers gegen den jeweils als ruhend gedachten Raum (d. h. gegen einen anderen Körper, z. B. gegen die Erde bei der Untersuchung einer auf festem Lande aufgestellten Maschine oder gegen



das bewegte Schiff bei der Untersuchung einer Schiffsmaschine etc.) kurzweg die Bewegung jenes Punktes oder Körpers genannt wird, und wenn allgemein, wie es im Folgenden stets der Fall sein soll, irgend ein Körper festgestellt heisst, wenn er in dem als ruhend gedachten Raum unbeweglich ist, wenn endlich die Vertauschung der beiden Elemente eines Paares, von denen das eine festgestellt, also das andere beweglich ist, hinsichtlich dieser Feststellung resp. Beweglichkeit die Umkehrung des Paares genannt wird, so kann man auch sagen, dass die Umkehrung eines niederen Elementenpaares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, und diesen Satz als Definition des niederen Paares im Gegensatze zum höheren betrachten.

Die beiden Elemente eines Paares können sich übrigens entweder in einer Fläche (resp. einem System getrennter Flächen) oder nur in einzelnen Linien oder Punkten berühren, ohne dass durch diese Unterschiede an und für sich, d. h. vorbehaltlich entsprechender Configuration des Systems von Berührungs-Flächen, Linien oder Punkten, auch der kinematische Charakter des Paares hinsichtlich der Geschlossenheit, des Beweglichkeitsgrades und der Umkehrbarkeit nothwendig bedingt wäre. Wenigstens ist es einer näheren Untersuchung bedürftig, welche Beziehungen etwa zwischen der Gestaltung der Elemente, d. h. ihrer einzig hier in Betracht kommenden charakteristischen Oberflächentheile, und den kinematischen Eigenschaften des betreffenden Paares stattfinden. So könnte z. B. bei dem mehrerwähnten, aus einem Cylinder und entsprechendem Hohlcylinder bestehenden Paare die eine der beiden cylindrischen Elementenflächen (abgesehen von Anforderungen der praktischen Ausführung) offenbar durch zwei Parallelkreise oder durch drei gerade Meridianlinien, von denen auf jeder Seite jeder Meridianebene wenigstens eine gelegen ist, als Berührungslinien ersetzt werden, oder auch nur durch die 6 Schnittpunkte jener 2 Kreise mit diesen 3 Geraden als Berührungspunkte, ohne dass dadurch der kinematische Charakter des fraglichen Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen niederen Paares von zweifacher Beweglichkeit aller Punkte in conaxialen Cylinderflächen verändert würde. —

Eine kinematische Kette entsteht durch eine solche Aneinanderreihung von Elementenpaaren, bei welcher die Elemente verschiedener Paare zu starren (wenigstens einstweilen hier als starr vorausgesetzten) Körpern der Art vereinigt werden, dass je zwei dieser Körper und der etwa unvereinigt bleibenden einzelnen Elemente durch mehr oder weniger Elementenpaare zusammenhängen. Eine kinematische Kette ist also eine durch Elementenpaare vermittelte solche Verbindung von Körpern, den

sogenannten **Gliedern** der **Kette**, dass dadurch jedes der letzteren in seiner Beweglichkeit gegen jedes andere Glied der Kette beschränkt wird. Auf die dieser Beschränkung entsprechende gegenseitige Beweglichkeit von je zwei Gliedern können dieselben Begriffe der mit einer gewissen Zahl von **Freiheitsgraden** verbundenen **dreifachen**, **zweifachen** und **einfachen Beweglichkeit** resp. **Zwangläufigkeit**, sowie der **Umkehrbarkeit** ohne Bewegungsänderung übertragen werden, wie sie für die Elemente eines Paares erklärt wurden. Während ein Elementenpaar durch die gepaarten Elemente kinematisch vollständig bestimmt ist, wenn letztere als übrigens beliebige Verkörperungen gewisser Flächen als Stützflächen betrachtet werden, ist ein Kettenglied durch die darin vereinigten Elemente, d. h. durch die denselben charakteristischen Stützflächen, die das Glied als Oberflächentheile an sich trägt, allein noch nicht kinematisch bestimmt, vielmehr gehört zu dieser Bestimmung wesentlich auch die gegenseitige Lage, in welcher das Glied diese Stützflächen als Oberflächentheile enthält oder an sich trägt. Um diesen Umständen durch den sprachlichen Ausdruck einigermaassen zu entsprechen, soll gesagt werden, ein Paar **bestehe** aus gewissen zwei Elementen, dagegen ein Glied **enthalte** gewisse (ein, zwei oder mehr) Elemente, ferner eine kinematische Kette **bestehe** aus gewissen Gliedern und **enthalte** gewisse Elementenpaare.

Wenn kein Glied einer kinematischen Kette Elemente von mehr als zwei Paaren enthält, so heisst sie **einfach**, anderenfalls **zusammengesetzt**; wenn jedes Glied Elemente von wenigstens zwei Paaren enthält, so ist die Kette **geschlossen**, widrigenfalls **offen**. Wenn also die Buchstaben Elemente bedeuten, ein dazwischen gesetztes Komma die Paarung, ein Verbindungsstrich die Verbindung der betreffenden Elemente zu einem Gliede, so bezeichnet z. B.

$$A, A' \text{———} B, B'$$

eine einfache offene Kette, die aus 3 Gliedern besteht und 2 Elementenpaare enthält;

$$\begin{array}{ccc} A, A' & & B, B' \\ | & & | \\ D, D' & \text{———} & C, C' \end{array}$$

eine einfache geschlossene viergliedrige (aus 4 Gliedern bestehende) und 4 Elementenpaare enthaltende Kette;

$$\begin{array}{ccccc} A, A' & \text{—————} & & \text{—————} & B, B' \\ | & & & & | \\ D, D' & \text{—————} & & \text{—————} & C, C' \\ | & & & & | \\ E, E' & \text{———} & F, F' & \text{———} & G, G' \end{array}$$

eine zusammengesetzte geschlossene sechsgliedrige und 7 Elementenpaare enthaltende Kette, deren Glieder ADE und $B'C'G'$ je 3 Elemente enthalten. Glieder mit 2, 3 .. Elementen mögen zur Abkürzung als binäre, ternäre .. Glieder bezeichnet werden; hiernach besteht z. B. die letztgenannte Kette aus 4 binären und 2 ternären Gliedern.

Eine kinematische Kette soll zwangläufig genannt werden, wenn jedes Glied gegen jedes andere zwangläufig oder von einfacher Beweglichkeit ist, d. h. wenn die Punkte jedes Gliedes gegen jedes andere sich nur in bestimmten Linien bewegen können; zu dem Ende ist es bei einer geschlossenen Kette nicht nöthig, dass jedes ihrer Elementenpaare, dass also jedes Paar benachbarter Glieder für sich, nämlich unabhängig von ihrer Verbindung durch die übrigen, die Kette schliessenden Glieder zwangläufig ist, indem vielmehr gewisse der ihrer gegenseitigen Beweglichkeit an und für sich zukommenden Freiheitsgrade durch ihre fragliche Kettenverbindung bis auf einen aufgehoben oder überhaupt in bestimmter Weise von einander abhängig gemacht werden können. Ein Mechanismus ist eine zwangläufig geschlossene (d. i. zwangläufige und geschlossene) kinematische Kette, von der ein Glied festgestellt ist; so viele Glieder die Kette hat, so viele Mechanismen können aus ihr erhalten werden, die im Allgemeinen verschieden sind, d. h. deren beweglichen Gliedern im Allgemeinen verschiedene oder wenigstens verschieden begrenzte Bewegungen (im ruhend gedachten Raume) zukommen. Der Mechanismus soll insbesondere ein Getriebe heissen, wenn ein bestimmtes seiner beweglichen Glieder als dasjenige vorausgesetzt ist, von dem die Bewegung ausgeht, d. h. welches unmittelbar zur Bewegung in einem gewissen Sinne angetrieben wird; hiernach kann derselbe Mechanismus verschiedene Getriebe umfassen, die, wie sich später zeigen wird, theilweise verschiedene kinematische Eigenschaften haben können.

Dieser den Mechanismus als ein Getriebe charakterisirende unmittelbare Antrieb eines gewissen Gliedes in einem gewissen Sinne lässt es noch unbestimmt, wie, d. h. in welchen Punkten, nach welchen Richtungen und in welchen Intensitätsverhältnissen nicht nur das betreffende, sondern auch die übrigen Glieder von äusseren Kräften angegriffen werden; auch sind die sämmtlichen vorhergehenden Begriffsbestimmungen bis zu der des Getriebes ganz sachliche, der Beschaffenheit und dem Bewegungssinne des betreffenden Gebildes entsprechende, von mechanisch-technischen Zwecken abstrahirende Definitionen gewesen. Zum Begriffe der Maschine dagegen, wie er hier und im Folgenden stets verstanden wird, gehört wesentlich auch der Zweck und die Wirksamkeit der äusseren Kräfte. Der Mechanismus



wird zur Maschine dadurch, dass gewisse Glieder desselben auf gewisse Weise von äusseren Kräften angegriffen werden, von denen die einen vermöge ihrer Grössen und der Wege ihrer Angriffspunkte die Arbeit leisten sollen, die zur Ueberwindung der anderen für die entsprechenden Wege ihrer Angriffspunkte aufzuwenden ist: eine Maschine ist ein Mechanismus zum Zwecke einer bestimmten mechanischen Arbeitsleistung.

Im Allgemeinen kann der Mechanismus einer Maschine eine so zusammengesetzte kinematische Kette sein, dass er in mehrere elementare Mechanismen, d. h. in solche zerlegbar ist, deren kinematische Ketten einer weiteren Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene Ketten nicht mehr fähig sind. Die kinematische Kette eines solchen elementaren Mechanismus ist übrigens einfach oder zusammengesetzt. So kann es z. B. der Fall sein, dass, wenn die durch das obige Schema beispielsweise dargestellte zusammengesetzte sechsgliedrige geschlossene Kette zwangläufig ist, doch nicht auch von den beiden einfachen geschlossenen Ketten $A, A' - B, B' - C, C' - D, D'$ und $C, C' - D, D' - E, E' - F, F' - G, G'$, worin sie zerlegt werden kann, jede für sich zwangläufig ist, dass vielmehr die Zwangläufigkeit der letzteren dieser beiden einfachen Ketten nur durch die feste Verbindung ihrer Glieder DE und $C'G'$ mit den Gliedern AD und $B'C'$ der ersteren zu den ternären Gliedern ADE resp. $B'C'G'$ vermittelt wird. In solchem Falle ist dann der Mechanismus, der durch Feststellung eines Gliedes der ursprünglichen sechsgliedrigen Kette entsteht, trotz der Zusammengesetztheit dieser Kette doch ein elementarer Mechanismus.

Dergleichen elementare Mechanismen oder Getriebe (mit Rücksicht nämlich zugleich auf den Sinn der Bewegungsübertragung von Glied zu Glied) sind die näheren Bestandtheile aller Maschinen, und man könnte einfache und zusammengesetzte Maschinen besser, als nach dem seither üblichen Sprachgebrauch (wenn überhaupt ein Bedürfniss dazu vorhanden wäre) mit Rücksicht darauf unterscheiden, ob ihr Mechanismus elementar oder eine Verbindung von elementaren Mechanismen ist. Auf die kinematische und mechanische Untersuchung nur solcher elementarer Mechanismen bezieht sich dieser von der „Theorie der Getriebe" handelnde Abschnitt vorliegenden Werkes, und zwar hat die hier einstweilen allein in Rede stehende kinematische Untersuchung derselben sich zunächst mit den Elementenpaaren als den kinematischen Fundamentalgebilden zu beschäftigen, nachdem vorher noch darauf hingewiesen sein wird, wie die beschränkte gegenseitige Beweglichkeit von irgend zwei starren Körpern überhaupt, die auch beliebige Glieder einer kinematischen Kette sein können,



vermittels gewisser Hülfsgebilde veranschaulicht werden kann, und wie die letzteren insbesondere auch zur Uebersicht der Bedingungen für die wichtige Eigenschaft der Umkehrbarkeit einer gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern ohne Aenderung der Bewegungsgebiete ihrer Punkte dienen können.

§. 2. Polaxen, Axoide und Axoidensysteme.

Die allgemeine Kinematik lehrt bekanntlich, dass jede Bewegung eines starren Körpers in einem ruhend gedachten Raume als eine bestimmte Folge von elementaren Schraubenbewegungen betrachtet werden kann um und längs gewissen Geraden, den sogenannten Momentanaxen oder Polaxen, deren aufeinander folgende Lagen A gegen den Körper und A' im ruhenden Raume im Allgemeinen stetig veränderlich sind ebenso wie die Steigungsverhältnisse der elementaren Schraubenbewegungen, d. h. die Verhältnisse der ihnen entsprechenden elementaren Schiebungen längs der Axe und Drehungen um dieselbe. Der Ort aller Geraden A ist eine mit dem Körper fest verbundene Regelfläche, der Ort aller Geraden A' eine im ruhend gedachten Raume feste Regelfläche, und die Bewegung des Körpers erscheint als eine gleitend-rollende (zugleich gleitende und rollende) Bewegung der ersten Fläche an der zweiten bei beständiger Berührung beider in einer wechselnden Geraden, der Polaxe. So kann nun auch die gegenseitige Bewegung der Elemente eines Paares oder der Glieder einer kinematischen Kette immer als eine gegenseitige gleitend-rollende Bewegung zweier mit ihnen verbundener Regelflächen oder Axoide bei beständiger Berührung derselben längs einer im Allgemeinen wechselnden Geraden, der Polaxe, betrachtet werden. Einer nur drehenden gegenseitigen Bewegung entsprechen Axoide, die aufeinander rollen ohne zu gleiten, also abwickelbare Flächen sind, insbesondere z. B. allgemeine Kegelflächen, Cylinderflächen oder zwei zusammenfallende Gerade, je nachdem die aufeinander folgenden elementaren Drehungen um Axen stattfinden, die sich in demselben Punkte schneiden, parallel sind oder zusammenfallen.

Einer bestimmten gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern entsprechen bestimmte Axoide derselben, aber nicht umgekehrt bedingen bestimmte Axoide auch immer eine bestimmte gegenseitige Bewegung. Insbesondere können zwei sich berührende allgemein-cylindrische Axoide sich gleitend-rollend oder nur rollend oder nur gleitend aneinander bewegen; zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade können als Axoide sowohl



einer Schraubenbewegung mit beliebigem gleich- oder ungleichförmigem Steigungsverhältnisse, wie auch einer blossen Drehung oder Schiebung für jene Gerade als Drehungsaxe resp. als Schubrichtung entsprechen, zwei im Unendlichen als Axoide zusammenfallende Gerade einer Schiebung nach jeder Richtung in einer damit parallelen Ebene. Im Allgemeinen indessen, nämlich abgesehen von solchen besonderen Fällen, entspricht bestimmten Axoiden nur eine bestimmte gegenseitige Bewegung der mit ihnen verbundenen Körper, so dass auch im Allgemeinen nur dann kurzweg von den Axoiden eines Elementenpaares resp. eines Paares von Gliedern einer kinematischen Kette als von bestimmten, event. zu geraden Linien zusammenschrumpfenden, geradlinigen Flächen gesprochen werden kann, wenn das betreffende Paar zwangläufig ist. Bei der zwangläufig geschlossenen Kette irgend eines Mechanismus ist das nun zwar bezüglich auf jedes Paar von Gliedern der Fall, doch können dabei die vereinzelten Elementenpaare auch von mehrfacher Beweglichkeit sein, und ist es dann im Allgemeinen ein System von unendlich vielen Axoidenpaaren, das den unendlich vielen möglichen gegenseitigen Bewegungen der Elemente entspricht. Das Axoidensystem jedes Elementes eines solchen mehrfach beweglichen Paares ist im Allgemeinen keine Fläche, sondern ein räumliches System von Geraden, die als Polaxen mit den Geraden des dem anderen Elemente zugehörigen Axoidensystems zusammenfallen können. Beide Axoidensysteme zusammen veranschaulichen zwar nicht mehr die wirkliche Bewegung, wohl aber nach wie vor die gegenseitige Beweglichkeit. Z. B. bei dem im vorigen §. beispielsweise erwähnten Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcylinder von gleichem Durchmesser) kann jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade der Kugel mit jeder durch irgend einen Punkt ihrer geometrischen Axe gehenden Geraden des Hohlcylinders als Polaxe zusammenfallen; das Axoidensystem der Kugel ist deshalb ein räumlicher Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt im Kugelmittelpunkte liegt, das des Hohlcylinders ist eine Schaar von unendlich vielen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte in der Cylinderaxe liegen.

§. 3. Umkehrbare Körperpaare.

Wenn ein Paar von Körpern bezüglich auf ihre irgendwie beschränkte gegenseitige Beweglichkeit umkehrbar sein soll, d. h. wenn das Bewegungsgebiet irgend eines Punktes P dasselbe sein soll, einerlei ob der eine



Körper festgestellt und P als ein Punkt des anderen betrachtet, oder ob letzterer festgestellt und P als ein Punkt des ersteren Körpers betrachtet wird, so müssen offenbar die Axoide resp. Axoidensysteme beider Körper beständig zusammenfallen, und umgekehrt hat dieser Umstand offenbar jene Eigenschaft der Umkehrbarkeit des Körperpaares zur Folge. Es ist daher von Interesse, die Fälle übersichtlich kennen zu lernen, in denen das beständige Zusammenfallen der Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit möglich ist, trotz einzeln oder zusammen stattfindender Rollung und Gleitung irgend einer Geraden des einen um resp. längs der mit ihr zusammenfallenden Geraden des anderen der beiden geradlinigen Gebilde. Der einfachste Fall ist der, dass die Axoide sich auf

1) zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade reduciren, die dann entweder

a) nur um einander rollen, oder

b) nur längs einander gleiten,

oder zugleich rollen und gleiten können so, dass das Verhältniss der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen

c) unveränderlich, oder

d) in bestimmter Weise veränderlich, oder

e) beliebig (unbestimmt) ist.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind in diesen Fällen: a) conaxiale Kreise, b) parallele Gerade, c) conaxiale sogenannte Normalschraubenlinien von gleicher Steigung, d) andere bestimmte Linien in conaxialen Cylinderflächen, von denen je zwei in derselben Cylinderfläche gelegene congruent sind, je zwei in verschiedenen Cylinderflächen gelegene aber in der Beziehung stehen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die Axe den Radien der betreffenden Cylinderflächen proportional sind; im Falle e) sind die Bewegungsgebiete der Körperpunkte jene conaxialen Cylinderflächen selbst, entsprechend einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares.

Fallen zwei Gerade als Axoide im Unendlichen zusammen, so ist, wenn sie um einander rollen oder längs einander gleiten, oder zugleich rollen und gleiten mit einem unveränderlichen Verhältnisse der zu einander senkrechten, den zweierlei Bewegungen entsprechenden elementaren Schiebungen, das Ergebniss immer nur eine Schiebung von unveränderlicher Richtung wie im Falle 1, b). Hinzuzufügen bleibt also nur noch der Fall

2) zweier im Unendlichen zusammenfallender Geraden, die zugleich um einander rollen und längs einander gleiten, während die diesen

beiden Bewegungen entsprechenden, zu einander senkrechten elementaren Schiebungen

a) ein in bestimmter Weise veränderliches,

b) jedes beliebige Verhältniss haben.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind: a) parallele congruente ebene Curven, oder b) parallele Ebenen, letzteren Falls einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares entsprechend.

Uebrigens können diese Fälle unter 2) auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide dargestellt werden, die man sich im Falle a) von allen Schaaren paralleler Geraden bedeckt zu denken hat, welche den Tangenten einer gewissen Curve in den Ebenen parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können, im Falle b) aber von allen möglichen solchen Schaaren ohne bestimmte Folge der elementaren Schubrichtungen.

Wenn zu dem einen Paar zusammenfallender Geraden, wovon die Betrachtung ausging, noch andere dergleichen und zwar zunächst parallele als Bestandtheile zusammenfallendor Axoide oder Axoidensysteme hinzugenommen werden, so würde ihrem blossen gegenseitigen Gleiten keine andere Beweglichkeit wie im Falle 1, b) entsprechen. Damit aber trotz des Rollens irgend zweier zusammenfallender Geraden um einander doch beständig jede Gerade des einen mit einer solchen des anderen Systems zusammenfalle, muss jedes von beiden unendlich viele, den ganzen Raum stetig erfüllende Gerade enthalten, d. h. es müssen die zwei im Falle 1) als Axoide zusammenfallenden Geraden durch zwei als Axoidensysteme zusammenfallende unbegrenzte Parallelstrahlenbüschel ersetzt werden. Wenn diese freilich neben ihrer Rollbarkeit um je zwei zusammenfallende Strahlen auch noch gleichzeitige Gleitbarkeit längs denselben besässen, so würde jeder Punkt des einen mit jedem Punkt des anderen Systems vereinigt werden können, die gegenseitige Beweglichkeit der betreffenden zwei Körper also ganz unbegrenzt sein. Als zulässig und neu bleibt somit nur übrig der Fall:

3) zweier zusammenfallender Parallelstrahlenbündel mit Rollbarkeit (Drehbarkeit) um je zwei zusammenfallende Strahlen. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind parallele Ebenen wie im Falle 2, b), von welchem der vorliegende sich aber dadurch unterscheidet, dass die entsprechende zweifache Beweglichkeit des Körperpaares hier mit 3 anstatt 2 Freiheitsgraden verbunden ist: mit Verschiebbarkeit nach zwei sich schneidenden Axrichtungen (den Drehungen um die unendlich fernen Strahlen-



paare entsprechend) und mit Drehbarkeit um eine im Endlichen liegende, zu diesen Schubrichtungen senkrechte Axe.

Wenn zu dem ursprünglichen Paare zusammenfallender Geraden noch andere dergleichen, nicht damit parallele hinzugenommen werden, so ist der einfachste Fall, in welchem die so erhaltenen Axoide oder Axoidensysteme (unbeschadet beständigen Zusammenfallens jeder Geraden des einen mit einer solchen des anderen Systems) längs allen gemeinsamen Strahlen gleiten können, der schon unter 2) besprochene von zwei im Endlichen zusammenfallenden Ebenen (resp. zusammenfallender Systeme von ebenen Parallelstrahlenbündeln), der gleichzeitige Rollbarkeit ausschliesst; der einfachste Fall aber, in dem unter solchen Umständen die Axoidensysteme um alle gemeinsame Strahlen rollbar sind, ist der Fall

4) zweier concentrischer räumlicher Strahlenbüschel, die gleichzeitige Gleitbarkeit längs den Strahlenpaaren ausschliessend. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind dabei concentrische Kugelflächen, und die Beweglichkeit des betreffenden Körperpaares ist eine mit 3 Freiheitsgraden verbundene zweifache.

Eine von diesem Falle 4) ausgehende noch weitere Verallgemeinerung zusammenfallender Axoidensysteme könnte nur zu unendlich vielen concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln führen, deren Mittelpunkte den Raum stetig erfüllen, d. i. zu zwei zusammenfallenden Räumen, die als Axoide nach allen möglichen Richtungen von Parallelstrahlenbündeln durchzogen sind, ein Fall, der auch als letzte Verallgemeinerung des Falles 3) zu betrachten wäre; alle Strahlen könnten dann Polaxen für Gleitung oder für Rollung sein unbeschadet des beständigen allseitigen Zusammenfallens beider Axoidensysteme, aber das Bewegungsgebiet jedes Punktes wäre in beiden Fällen ganz unbegrenzt. Dagegen ist eine beschränkte Verallgemeinerung der Axoidensysteme des Falles 3) möglich, und zwar zu

5) zwei zusammenfallenden Systemen von Parallelstrahlenbündeln, die

a) den Tangenten einer gewissen Raumcurve parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können,

b) den Tangenten einer gewissen Fläche parallel sind ohne bestimmte Folge der längs ihnen möglichen elementaren Schiebungen.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind im Falle a) parallele congruente Raumcurven, im Falle b) parallele congruente Flächen, einer zweifachen Beweglichkeit mit 2 Freiheitsgraden des Körperpaares entsprechend.



Analog wie oben der Fall 2) zweier im Unendlichen als Axoide zusammenfallender Geraden auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide ersetzt werden konnte, so könnte man auch umgekehrt die Axoidensysteme des Falles 5) durch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen ersetzt denken. Da nämlich bei dem gegenseitigen Gleiten von irgend zwei zusammenfallenden Parallelstrahlenbündeln die unendlich fernen Punkte der Strahlen nicht aufhören zusammenzufallen, und somit auch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen trotz einer gegenseitigen endlich grossen Verschiebung in normaler Richtung als nach wie vor zusammenfallend zu betrachten sind, diese Ebenen aber ausserdem längs jeder in ihnen liegenden Geraden verschiebbar sind, so können sie unbeschadet ihres beständigen Zusammenfallens beliebig gerichteten gegenseitigen Verschiebungen von endlicher Grösse unterworfen sein, insbesondere also auch solchen, die den Tangenten einer gewissen Raumcurve oder einer gewissen Fläche parallel sind. Weil ferner die Normalverschiebung der Ebenen auch als Ergebniss einer unendlich kleinen Drehung um eine unendlich ferne gemeinsame Gerade derselben, und weil ein Parallelstrahlenbündel als ein Strahlenbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkte zu betrachten ist, so sind in solchem Sinne schliesslich alle möglichen Fälle, wie Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit beständig zusammenfallen können, beschränkt auf die Fälle

1) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Geraden, die um einander rollen und längs einander gleiten können,

2) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Ebenen, die längs gemeinsamen Geraden gegenseitig verschiebbar und letzteren Falls (d. h. wenn die Ebenen im Unendlichen liegen) zugleich um unendlich kleine Winkel um gemeinsame Gerade drehbar sind,

3) von zwei concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte im Endlichen oder Unendlichen liegen und die um gemeinsame Strahlen gegenseitig drehbar sind.

Von diesen 6 Fällen sind die 4 unter 1) und 2) begriffenen, von denen übrigens der zweite unter 1) mit dem ersten unter 2) einerlei ist, durch weitere Specialisirung gemäss den obigen Erörterungen in Unterfälle zerlegbar. —

Mit Rücksicht auf das Folgende seien schliesslich die sämmtlichen 11 Einzelfälle — a, b, c, d, e unter 1); a, b unter 2); ferner 3); 4); und a, b unter 5) —, in denen ein Paar von Körpern bezüglich ihrer beschränkten gegenseitigen Beweglichkeit umkehrbar sein kann, in anderer Ordnung wie folgt zusammengestellt:



I. Die Körper sind gegen einander

a) um eine gemeinsame Gerade nur drehbar,

b) längs einer gemeinsamen Geraden nur verschiebbar,

c) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit unveränderlichem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen.

II. Die Körper sind gegen einander

a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit beliebigem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,

b) um alle zu einer gemeinsamen Ebene senkrechte Axen drehbar,

c) um alle durch einen gemeinsamen Punkt gehende Axen drehbar.

III. Die Körper sind gegen einander

a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit einem in bestimmter Weise veränderlichen Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,

b) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer

α) ebenen Curve,

β) Raumcurve des anderen bleibt,

c) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer

α) ebenen,

β) krummen Fläche des anderen bleibt.

I. Elementenpaare.

a. Niedere Elementenpaare.

§. 4. Niedere Elementenpaare im Allgemeinen; Umschlusspaare.

Indem ein niederes Elementenpaar als ein umkehrbares im Sinne des vorigen §. definirt wurde, so ergeben sich aus der dort angestellten Untersuchung die principiell möglichen Fälle niederer Elementenpaare, und ist daraus vor Allem ersichtlich, dass dergleichen nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein können. Es bleibt nur zu ermitteln, ob, welche und wie diese Fälle

durch sich berührende starre Körper als Elemente des Paares verwirklicht werden können, das hier und im Folgenden im Sinne von §. 1 immer als ein selbständig geschlossenes Paar vorausgesetzt ist, sofern nicht später das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird. Wenn diese materielle Verwirklichung aber überhaupt, dann ist sie u. A. offenbar so möglich, dass die Elemente sich mit zusammenfallenden Oberflächentheilen berühren, da diese es sind, welche den kinematischen Charakter des Paares bestimmen und somit zusammenfallend müssen sein können, wenn durch ihre der Umkehrung des Paares entsprechende Vertauschung die Bewegung nicht geändert werden soll. Auch ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn umgekehrt die Elemente eines Paares sich in einer Fläche beständig berühren, das Paar nothwendig umkehrbar und von höchstens zweifacher Beweglichkeit ist.

Ein selbständig geschlossenes Elementenpaar, dessen Elemente sich in einer Fläche berühren, soll ein Umschlusspaar heissen; dem Vorstehenden zufolge ist es jedenfalls ein niederes. Umgekehrt brauchen zwar niedere Elementenpaare nicht Umschlusspaare zu sein, können aber aus solchen entstanden gedacht werden durch Reduction der Flächenberührung auf eine Berührung in Linien oder Punkten der Art, dass dadurch die gegenseitige Stützung nur der Form, nicht dem Wesen nach, d. h. nicht bezüglich der ihr entsprechenden gegenseitigen Beweglichkeit beider Elemente geändert wird. In den folgenden Paragraphen sollen deshalb zunächst nur die verschiedenen Arten von Umschlusspaaren besprochen, und soll dann erst nachträglich die unbeschadet des kinematischen Charakters des Paares etwa mögliche Reduction der Berührungsfläche auf ein System von Linien oder Punkten untersucht werden. Diese Untersuchung wird insofern von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu führen sein, als sie zugleich die Vorbereitung und den Uebergang zur sachgemässen Beurtheilung höherer Elementenpaare bildet. Während diese als selbständig geschlossene Paare keine Umschlusspaare sein können, werden niedere Elementenpaare nur ausnahmsweise nicht als solche ausgeführt, weil die Berührung in Flächen, wenn sie den Umständen gemäss zulässig ist, besonders mit Rücksicht auf Abnutzung vorgezogen werden muss.

Uebrigens wird die Eigenschaft eines Paares als Umschlusspaar (vorbehaltlich der Erhaltung seiner selbständigen Geschlossenheit) dadurch nicht beeinträchtigt, dass das eine Element mit seiner Berührungsfläche nur unvollständig ausgeführt wird aus Gründen, die ebenso wie die besondere Art der unvollständigen Ausführung durch die Bestimmung des Paares in der betreffenden Maschine bedingt werden. Wenn z. B. die Führung



eines Teller- oder Kegelventils durch einen mit dem Ventilteller verbundenen Cylinder vermittelt werden soll, der vom Zuflussrohr der Flüssigkeit als entsprechendem Hohlcylinder umschlossen wird, so kann jener Cylinder, um den Durchfluss bei gehobenem Ventil zu gestatten, nicht massiv oder als Röhre vollständig ausgeführt werden. Wird er etwa massiv auf 3 oder 4 symmetrisch vertheilte radiale Rippen beschränkt, die äusserlich von nur schmalen Streifen der Cylinderfläche begrenzt werden, so kann es ferner durch eine etwas spiralig gekrümmte Ausführung dieser Rippen beabsichtigt werden, dem Ventil bei jeder Erhebung zugleich eine wenn auch nicht zwangläufig bestimmte Drehung durch den Flüssigkeitsstrom ertheilen zu lassen und so bezüglich der Lagen, in denen es auf seinen Sitz zurückfällt, einen einigermassen zufälligen Wechsel herbeizuführen.

Die Umkehrbarkeit eines niederen Elementenpaares, insbesondere also eines Umschlusspaares, gewährt oft constructive oder mechanische Vortheile, die der Maschinenbau vielfach ausbeutet. Eine solche kinematisch gleichgültige, aus anderen Gründen aber nicht unwichtige Paarumkehrung ist es z. B., wenn bei Eisenbahnfahrzeugen die mit den Rädern fest verbundene Axe in den am Wagengestell festen Lagern drehbar ist anstatt der bei gewöhnlichen Strassenwagen umgekehrten Anordnung von am Gestell festen Axen, um welche die Räder sich drehen; oder wenn bei dem Condie'schen Dampfhammer der Cylinder auf dem befestigten Kolben anstatt umgekehrt dieser im befestigten Cylinder beweglich ist u. s. f.

§. 5. Zwangläufige Umschlusspaare.

Bei einer gewissen gegenseitigen Lage der Elemente E und E' seien A und A' zwei zusammenfallende Punkte ihrer zusammenfallenden (sich berührenden) Oberflächentheile F und F'. Für eine der beiden von dieser Lage ausgehenden einander entgegengesetzten, der vorausgesetzten Zwangläufigkeit entsprechenden elementaren (unendlich kleinen) Bewegungen sei $A'B'$ das Bahnelement von A in F'. Ferner sei B der vor dieser Bewegung mit B' zusammenfallende Punkt von F, $B'C'$ für die fragliche Bewegung sein Bahnelement in F'; C der vorher mit C' zusammenfallende Punkt von F, $C'D'$ sein Bahnelement in F' etc. Dann sind $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ zwei Linien beziehungsweise in F und F', die vor und nach der Elementarbewegung, welche im Allgemeinen eine Schraubenbewegung um und längs einer gewissen Polaxe sein kann, zusammenfallen. Die einzige Linie aber, welche die Eigenschaft hat, vor und nach einer solchen

elementaren Schraubenbewegung mit einer ihr congruenten Linie zusammenfallen zu können, ist eine Normalschraubenlinie, d. i. eine cylindrische (auf einer Cylinderfläche gelegene) Schraubenlinie von gleichförmigem Steigungsverhältnisse, deren Axe die Polaxe und deren Steigungsverhältniss dem Verhältnisse von Schiebung und Drehung bei der elementaren Schraubenbewegung gleich ist. Die sich berührenden Flächen der Elemente eines zwangläufigen Umschlusspaares sind also geometrische Oerter von Normalschraubenlinien gleicher Steigung, die auf beliebig verschiedenen conaxialen Cylinderflächen liegen können, nur unbeschadet der Zwangläufigkeit nicht alle auf derselben Cylinderfläche. Diese Schraubenlinien in F und F' fallen dann nicht nur vor und nach einer unendlich kleinen gegenseitigen Bewegung, sondern beständig zusammen.

Das hiernach einzig mögliche zwangläufige Umschlusspaar — Schraube mit entsprechender Mutter — hat übrigens zwei so charakteristische Grenzformen, dass es sowohl mit Rücksicht auf deren Eigenthümlichkeiten, als auf den sprachlichen Begriff der Schraube, der jene Grenzfälle ausschliesst, nöthig ist, dieselben als besondere zwangläufige Umschlusspaare neben der Schraube mit Mutter gelten zu lassen. Sie entsprechen dem Uebergange des Steigungsverhältnisses der Schraube in die Grenze 0 oder ∞ und ergeben beziehungsweise den nicht cylindrischen Drehkörper mit entsprechendem Hohlkörper und das nicht cylindrische Prisma mit entsprechendem Hohlprisma. Unbeschadet der Zwangläufigkeit kann zwar das Prisma (bei unbegrenzt wachsender Zahl und abnehmender Breite seiner Seitenflächen) in einen allgemeinen, nur nicht in einen im engeren Sinne sogenannten Cylinder übergehen; was den Drehkörper betrifft, so genügt es nicht, dass er nicht cylindrisch, d. h. dass die Meridianlinie seiner Oberfläche nicht eine mit der Axe parallele Gerade ist, sondern es muss auch diese Meridianlinie, wie im Folgenden immer stillschweigend vorausgesetzt wird, von zwei Geraden berührt werden können, die gegen die Axe in entgegengesetztem Sinne geneigt sind.

Die gefundenen 3 zwangläufigen Umschlusspaare sollen in der Folge einfach als Schraubenpaar, Drehkörperpaar und Prismenpaar bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter I. aufgeführten 3 Fällen. Die Axoide der Elemente des Schrauben- und des Drehkörperpaares sind zwei in der geometrischen Axe, die des Prismenpaares irgend zwei mit den Kanten parallele zusammenfallende Gerade; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in conaxialen Normalschraubenlinien gleicher Steigung, in conaxialen Kreisen und in parallelen Geraden.



Die besondere Gestaltung dieser und anderer Elementenpaare, insoweit sie für den kinematischen Charakter derselben nicht wesentlich ist, wird vielfach bedingt durch andere Rücksichten, besonders auf möglichst vortheilhafte Verwerthung der Widerstandsfähigkeit des Materials gegen die einwirkenden Kräfte und auf die Leichtigkeit der praktischen Herstellung. So kann z. B. die Leichtigkeit der Herstellung eines Vollcylinders auf der Drehbank und der Bohrung eines cylindrischen Loches oft dazu veranlassen, ein so zunächst hergestelltes Cylinderpaar von zweifacher Beweglichkeit erst nachträglich in ein zwangläufiges Paar zu verwandeln: in ein Drehkörperpaar durch aufgeklemmte Stellringe, zwischen denen der Hohlcylinder eben Platz findet, in ein Prismenpaar durch Feder und Nuth. Auch die als Wellzapfen besonders häufig vorkommenden Drehkörper pflegen wenigstens in der Hauptsache cylindrisch hergestellt und nur durch örtlich ringsum vortretende sogenannte Anläufe bei entsprechender Gestaltung der Hohlkörper (Lager) unverschieblich, also zwangläufig gemacht zu werden.

§. 6. Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit.

Während bei zwangläufigen Umschlusspaaren irgend ein Oberflächenelement des einen Körpers nur auf diejenigen Stellen der Oberfläche des anderen zu passen brauchte, an denen es bei der einzig möglichen gegenseitigen Bewegung vorbeikommt, muss hier jedes Element der einen an jeder Stelle mit der anderen Fläche zur Deckung gebracht werden können. Dazu ist es nöthig, dass die Berührungsfläche der Paarelemente überall gleich gekrümmt ist, und zwar nicht nur in je zwei Punkten gleiches Product der Hauptkrümmungen, sondern einzeln gleiche Hauptkrümmungen hat, dass sie also entweder eine Kugelfläche, oder eine Cylinderfläche, oder (mit Rücksicht zugleich auf die Verhinderung der gegenseitigen Bewegung senkrecht zur Berührungsfläche) ein System von wenigstens zwei parallelen Ebenen ist, welche die Substanz jedes einzelnen Elementes von entgegengesetzten Seiten begrenzen. So ergeben sich auch 3 mögliche Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit: die Kugel mit Hohlkugel, der Cylinder mit Hohlcylinder und die gleichförmig dicke ebene Platte mit entsprechendem Schlitz. Kürzer mögen sie als K u g e l p a a r, C y l i n d e r p a a r und P l a t t e n p a a r bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter II. aufgeführten 3 Fällen von umkehrbaren Körperpaaren. Die Axoide resp. Axoidensysteme sind beim Kugelpaar zwei concentrische räum-

liche Strahlenbüschel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen, beim Cylinderpaar zwei in der geometrischen Axe zusammenfallende Gerade mit gegenseitiger Drehbarkeit und Schiebbarkeit in beliebigem Verhältnisse, beim Plattenpaar zwei zusammenfallende zu den Berührungsebenen senkrechte Parallelstrahlenbündel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in concentrischen Kugelflächen, conaxialen Cylinderflächen und parallelen Ebenen. Das Kugelpaar und das Plattenpaar sind im Gegensatz zum Cylinderpaar dadurch ausgezeichnet, dass die Hauptkrümmungen der Berührungsfläche nicht nur in je zwei Punkten derselben gleich, sondern auch in jedem einzelnen Punkte unter sich gleich sind; die Folge davon ist, dass die beiden Elemente sich um jede gemeinschaftliche Normale der Berührungsfläche gegenseitig verdrehen lassen, die des Cylinderpaares aber nicht, womit es auch zusammenhängt, dass jedes der ersteren Paare mit 3, das Cylinderpaar aber nur mit 2 Freiheitsgraden verbunden ist.

Jedes der drei Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit kann durch eine offene Kette mit nur zwangläufigen, und zwar so vielen Umschlusspaaren ersetzt werden, wie das betreffende Paar Freiheitsgrade besitzt, durch eine einfache offene kinematische Kette nämlich, deren (je ein Element enthaltende) Endglieder dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente des zu ersetzenden Paares. So kann das Cylinderpaar offenbar ersetzt werden durch ein Drehkörperpaar mit einem Prismenpaar, dessen Schubrichtung der Axe des ersteren parallel ist; das Kugelpaar durch drei Drehkörperpaare, deren Axen sich in einem Punkte scheiden und nicht in einer Ebene liegen; das Plattenpaar entweder durch zwei Prismenpaare mit gekreuzten Schubrichtungen in Verbindung mit einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder durch zwei Drehkörperpaare mit parallelen Axen in Verbindung mit einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu beiden Axen senkrechten Ebene liegt. Was nämlich die Alternative in diesem letzten Falle betrifft, so kann irgend ein Punkt der einen von zwei zusammenfallenden Ebenen der Elemente des Plattenpaares an jede Stelle der anderen entweder durch zwei verschieden gerichtete Schiebungen längs diesen Ebenen oder durch eine solche Schiebung in Verbindung mit Drehung der Schubrichtung in den Ebenen, also um eine dazu senkrechte Axe versetzt werden (entsprechend der Bestimmung eines Punktes in der Ebene durch Parallelcoordinaten oder durch Polarcoordinaten); mit Rücksicht auf die beliebige Drehbarkeit um irgend eine Normale der zusammenfallenden Ebenen ist dann aber in beiden Fällen



noch ein Drehkörperpaar mit einer zu den Ebenen senkrechten Axe nöthig.

Obschon der Maschinenbau in der Regel und mit Recht die zwangläufigen Elementenpaare, insbesondere Drehkörper- und Prismenpaare, zur Verbindung der Glieder eines Mechanismus verwendet, weil sie im Allgemeinen am einfachsten, am vollkommensten herstellbar, am wenigsten unter sonst gleichen Umständen angestrengt und am besten gegen Reibung und Abnutzung zu schützen sind, so kann doch zuweilen die Benutzung eines Elementenpaares von mehrfacher Beweglichkeit durch grössere Einfachheit des Mechanismus sich empfehlen und wenigstens dann vorzuziehen sein, wenn die in solchem Falle durch den Mechanismus selbst zu vermittelnde Zwangläufigkeit ohne gesteigerte Anstrengung seiner Glieder geschehen kann. So kann z. B. zur Verbindung von zwei um beliebige (im Allgemeinen windschiefe) Axen drehbaren Körpern eine Koppel (Kuppelungsstange) mit zwei Kugelgelenken vortheilhaft sein, die also mit theilweise (insoweit es die selbständige Geschlossenheit der Kugelpaare erfordert) ausgeführten Hohlkugeln die entsprechend kugelig ausgeführten Zapfen umschliesst, mit denen jene Körper in gewissen Abständen von ihren Drehungsaxen ausgestattet sind. Wenn man aber z. B. bei dem bekannten Schubkurbel-Mechanismus (bestehend aus Kurbel, Koppel, Schieber und einem festgestellten vierten, einerseits die Lager der Kurbelaxe, andererseits das Schiebergleise enthaltenden Gliede) das aus Schieber und Gleise bestehende Paar als Plattenpaar (Berührungsebenen parallel den Axen der ausserdem vorhandenen 3 Drehkörperpaare) statt als Prismenpaar ausführen wollte, so würde dadurch die Kette zwar nicht aufhören zwangläufig zu sein (die 3 Drehkörperpaare als selbständig geschlossen vorausgesetzt), aber es würde keine nennenswerthe Vereinfachung dadurch erzielt und ausserdem namentlich die Koppel in wesentlich höherem Grade angestrengt werden, besonders wenn der Schieber einer wenn auch nur kleinen seitlich einwirkenden äusseren Kraft ausgesetzt sein kann; hier wäre es grundlos, ja fehlerhaft, die Kette mit anderen als zwangläufigen Elementenpaaren zu bilden.

b. Beziehung zwischen gegenseitiger Stützungsweise und Beweglichkeit zweier Körper.

Die folgenden Untersuchungen setzen voraus, dass zwei starre Körper sich nicht in Flächen, wie die Elemente eines Umschlusspaares, sondern in



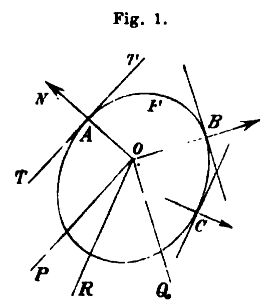
Linien oder Punkten — Stützlinien resp. Stützpunkten — berühren; ihr Zweck ist die Ermittelung der unter gewissen Umständen erforderlichen Zahl und Gruppirung dieser Stützlinien und Stützpunkte, um die gegenseitige Beweglichkeit der Körper in verlangter Weise einzuschränken und zu sichern. Die gemeinsame Normale der beiden Körperoberflächen in einem Stützpunkte resp. Punkte einer Stützlinie heisse die Stütznormale für diesen Punkt und werde, wenn einer der beiden Körper als festgestellt, somit nur der andere als beweglich betrachtet wird, gerichtet angenommen von dem letzteren gegen den ersteren, von dem gestützten gegen den stützenden Körper; diese Richtung der Stütznormale heisse die Stützrichtung für den betreffenden Punkt.

Die Uebersicht der Verhältnisse wird wesentlich erleichtert, wenn die Untersuchung, welche übrigens im Hinblick auf die zu Elementenpaaren vorzugsweise verwendeten einfacheren Körperformen eine erschöpfende Allgemeinheit nicht beabsichtigt, zunächst auf zwei Figuren F, F' beschränkt wird, die an eine gewisse Ebene gebunden sind und in derselben sich in Punkten berühren. Von diesen Figuren werde F' in der Ebene festliegend gedacht, und somit die relative Bewegung von F gegen F' kurzweg als Bewegung von F bezeichnet; die Stütznormale in einem Berührungspunkte beider Figuren, welche dabei als Grenzlinien materieller ebener Flächen betrachtet werden, die sich gegenseitig ausschliessen, d. h. sich nirgend überdecken können, hat dann die Richtung von F gegen F'.

§. 7. Stützung ebener Figuren gegen Schiebung.

1) Die beiden Figuren F, F' mögen sich zunächst in nur einem Punkte A berühren, für welchen TT ihre gemeinsame Tangente, AN die Stütznormale sei, deren Richtung hier und im Folgenden bei der Bezeichnung durch die Buchstabenfolge (hier A, N), in der Figur durch eine Pfeilspitze (Fig. 1) angedeutet wird. Es ist dann jede Schiebung von F unmöglich, die eine Componente im Sinne AN hat, deren von A aus gezogene Richtung folglich in den gestreckten Winkel TNT fällt, jede andere Schiebung dagegen möglich. Der gestreckte Winkel TNT heisse deshalb das Stützungsfeld, der auf der anderen Seite von TT gelegene das Schiebungsfeld der Figur F für den

Fig. 1.



Stützpunkt A; da es sich indessen hier nur um Richtungen handelt, so können auch unter dem Stützungs- und Schiebungsfelde die beiderseits irgend einer Senkrechten zur Stütznormale beziehungsweise im Sinne der Stützrichtung und im entgegengesetzten Sinne gelegenen gestreckten Winkel verstanden werden.

2) Hat die Figur 2 Stützpunkte A, B, so ist ihr Schiebungsfeld der den einzelnen Schiebungsfeldern für die Stützpunkte A, B gemeinsame Winkelraum, dessen Spitze (gemäss der vorstehenden Bemerkung über die Verlegbarkeit der einzelnen Schiebungsfelder) eine beliebige Lage haben, insbesondere im Schnittpunkte O der beiden Stütznormalen angenommen werden kann. In Fig. 1 z. B. ist das den Stützpunkten A und B zusammen entsprechende Schiebungsfeld von F der hohle Winkel POQ, dessen Schenkel den Tangenten von F in den Stützpunkten A, B parallel sind. — Sind die beiden Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist die Verschiebbarkeit der Figur nicht verschieden von derjenigen, die durch einen der beiden Stützpunkte vermittelt wird; sind sie parallel und entgegengesetzt gerichtet, so reducirt sich das Schiebungsfeld auf eine zu ihnen senkrechte Gerade, längs welcher nun aber Schiebung in beiderlei Sinn möglich ist. In keinem dieser beiden Specialfälle kann durch einen dritten Stützpunkt die Verschiebbarkeit der Figur ganz aufgehoben werden.

3) Kommt aber zu 2 Stützpunkten A, B, deren Stützrichtungen einen Winkel zwischen 0 und 180° bilden, noch ein dritter Stützpunkt C, so kann es der Fall sein, dass die ihm entsprechende, vom Schnittpunkte O der beiden ersten Stütznormalen OA, OB aus gezogene Stützrichtung, wenn sie mit keiner dieser beiden zusammenfällt, a) in dem hohlen Winkel AOB liegt, oder b) dass weder sie selbst noch ihre Verlängerung über O hinaus in diesem Winkel liegt, oder c) dass ihre Verlängerung darin liegt. Da immer das den 3 Stützpunkten zusammen entsprechende Schiebungsfeld der den einzelnen 3 Schiebungsfeldern gemeinsame Winkelraum ist, falls deren Grenzlinien durch denselben übrigens beliebigen Punkt gezogen werden, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass im ersten der obigen 3 möglichen Fälle der dritte Stützpunkt keine weitere Beschränkung der Verschiebbarkeit verursacht, dass im zweiten Falle das Schiebungsfeld auf einen kleineren Winkelraum dadurch beschränkt wird, z. B. in Fig. 1 auf den Winkel POR, wenn OR parallel der Tangente von F im Punkte C ist, dass aber endlich im dritten Falle die Verschiebbarkeit der Figur ganz beseitigt ist. —

Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung, d. h. zur Unverschiebbarkeit derselben, sind also



3 Stützpunkte nöthig und dann ausreichend, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen betreffenden Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 um diesen Punkt herum liegende hohle Winkelräume theilen. Sind zwei oder mehr Stütznormalen parallel, so sind zur Unverschiebbarkeit wenigstens 2 weitere Stützpunkte nöthig; um dazu ausreichend zu sein, müssen sie mit irgend einem der übrigen Stützpunkte zusammen schon ausreichen, falls alle Stütznormalen der letzteren gleich gerichtet sind, wogegen es anderenfalls genügt, dass die Stütznormalen der zwei weiteren Stützpunkte gegen die parallelen Tangenten in den übrigen entgegengesetzt geneigt sind, d. h. dass die eine Stütznormale mit der einen, die andere mit der entgegengesetzten Tangentenrichtung spitze Winkel bildet.

§. 8. Stützung ebener Figuren gegen Drehung.

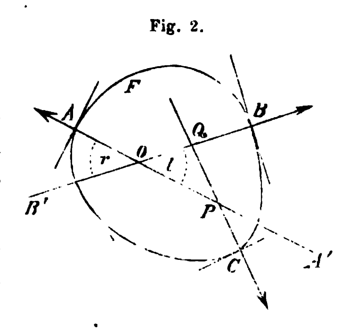
1) Hat die Figur F einen Stützpunkt A, so ist sie um jeden so gelegenen Punkt der Ebene und in solchem Sinne drehbar, dass die entsprechende anfängliche Bewegungsrichtung des Punktes A von F in das Schiebungsfeld der Figur für diesen Punkt fällt. Mit Bezug auf einen die Ebene von einer gewissen Seite her Anblickenden ist hiernach offenbar Rechtsdrehung möglich um jeden Punkt und nur um einen solchen, der für den Beschauer, wenn er entgegengesetzt der Stützrichtung (im Sinne AA', Fig. 2) längs der Stütznormale hinblickt, rechts von der letzteren gelegen ist, Linksdrehung um jeden und nur um einen solchen Punkt, der auf der anderen Seite liegt. Die beiden von der Stütznormale getrennten Theile der Ebene sollen hiernach beziehungsweise das Rechtsdrehungsfeld und das Linksdrehungsfeld der Figur für den Punkt A heissen. Um jeden Punkt P der Stütznormale selbst ist Rechts- und Linksdrehung zugleich möglich, die jedoch, wie leicht ersichtlich, nur dann von endlicher Grösse sein kann, wenn, unter M und M' die dem Punkte A entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von F und F' verstanden, M und P entweder zugleich in der Strecke AM' oder zugleich ausserhalb derselben liegen. — Bei mehreren Stützpunkten ist Rechts- oder Linksdrehung nur um solche Punkte möglich, die den Rechts- resp. Linksdrehungsfeldern für alle Stützpunkte gemeinsam sind.

2) Bei 2 Stützpunkten A, B sind von den 4 hohlen Winkeln, welche die Stütznormalen AA' und BB' miteinander bilden, diejenigen zwei Scheitelwinkel nicht Drehungsfelder, deren Schenkelrichtungen (vom Scheitel aus



genommen) mit den Stützrichtungen beide übereinstimmend oder beide nicht übereinstimmend sind, weil in diesen Winkelräumen ungleichnamige Drehungsfelder zusammenfallen; von den beiden anderen Scheitelwinkeln ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld, in Fig. 2 z. B. AOB' Rechts-, BOA' Linksdrehungsfeld. Um den Schnittpunkt O der beiden Stütznormalen ist Drehung in beiderlei Sinn möglich. — Sind die zwei Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist der zwischen ihnen liegende Flächenstreifen Stützungsfeld (worunter hier der Gegensatz von Drehungsfeld verstanden wird) wegen Zusammenfallens ungleichnamiger Drehungsfelder; von den ausserhalb liegenden Flächenräumen ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld. Sind die zwei Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so ist Drehung nur um die Punkte des zwischen ihnen liegenden Flächenstreifens möglich, und zwar Rechts- oder Linksdrehung, jenachdem die Stütznormalen ihre rechten oder ihre linken Seiten sich zukehren (immer mit Bezug auf einen längs denselben entgegengesetzt den betreffenden Stützrichtungen hin Blickenden). Fallen die entgegengesetzt gerichteten Stütznormalen in einer Geraden zusammen, so ist die Figur nur um die Punkte dieser Geraden, übrigens dann in beiderlei Sinn drehbar.

Fig. 2.



3) Bei 3 Stützpunkten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Bilden die zwei ersten Stützrichtungen einen Winkel zwischen 0 und 180°, so wird durch den dritten Stützpunkt C die Drehbarkeit der Figur am meisten eingeschränkt, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen 3 Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 hohle Winkel theilen, indem dann von den zwei Scheitelwinkeln, die den ersten Stützpunkten A, B als Drehungsfelder entsprechen (AOB' und BOA' in Fig. 2), der eine ganz, der andere bis auf ein Dreieck (OPQ in Fig. 2) in Stützungsfeld verwandelt wird; um alle Punkte dieses Dreiecks ist Rechts- oder Linksdrehung (in Fig. 2 Linksdrehung) möglich.

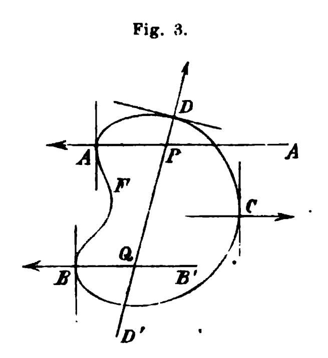
Wenn unter obiger Voraussetzung bezüglich ihrer Richtungen die 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden, so schrumpft das dreieckige Drehungsfeld in diesen Punkt zusammen, um den dann aber Rechts- und Linksdrehung stattfinden kann.

Entspricht die dritte Stützrichtung der obigen Voraussetzung (unter welcher nach vorigem §. die Figur unverschiebbar ist) nicht, und ist sie

auch nicht einer der beiden ersten Stütznormalen parallel, so bleiben die Drehungsfelder je ein unendlich grosses Rechts- und Linksdrehungsfeld, wie ohne den dritten Stützpunkt, nur dass sie nicht mehr einen Punkt gemeinsam haben, ausser wenn alle 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden.

b) Sind die zwei ersten Stütznormalen AA', BB' parallel und gleich gerichtet, so werden durch eine sie schneidende dritte (DD', Fig. 3) die beiden ausserhalb jener liegenden ungleichnamigen Drehungsfelder auf einen Rechts- und einen Linksdrehungswinkelraum (beziehungsweise BQD' und DPA' in Fig. 3) reducirt.

Fig. 3.



Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel und gleich gerichtet, so ist die Drehbarkeit der Figur dieselbe, als ob die mittlere der 3 Stütznormalen gar nicht vorhanden wäre. Ist sie aber mit den beiden ersten parallel und entgegengesetzt gerichtet, so sind 3 Fälle zu unterscheiden. Wenn sie α) ausserhalb jener in ihrem Rechts- oder Linksdrehungsfelde liegt, so reducirt sie das gesammte Drehungsfeld auf einen Rechts- resp. Linksdrehungsflächenstreifen zwischen ihr und der zunächst gelegenen von jenen. Wenn sie β) mit einer von diesen zusammenfällt, so schrumpft der vorgenannte Flächenstreifen zu der Geraden zusammen, in der dieses Zusammenfallen stattfindet. Liegt endlich γ) die dritte Stütznormale zwischen den beiden ersten, so ist die Drehbarkeit der Figur ganz aufgehoben: siehe Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte A, B, C.

c) Sind die zwei ersten Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so wird von einer sie schneidenden dritten der zwischen ihnen liegende beiderseits unendliche Rechts- oder Linksdrehungsflächenstreifen auf einen nur einerseits unendlichen eben solchen reducirt. — Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel, so können keine anderen Fälle stattfinden, als die unter b) und zwar unter α, β, γ) daselbst erwähnten.

d) Fallen zwei entgegengesetzt gerichtete Stütznormalen in einer Geraden zusammen, um deren sämmtliche Punkte dann Rechts- und Linksdrehung möglich ist, so wird diese von einer sie schneidenden dritten Stütznormale in zwei Theile getheilt so, dass um die Punkte des einen Theils nur Rechts-, um die des anderen nur Linksdrehung, um den Schnittpunkt allein nach wie vor beiderlei Drehung möglich ist. — Ist die

dritte Stütznormale mit den in einer Geraden zusammenfallenden ersten auf der einen oder anderen Seite parallel, so bleibt nur Rechts- oder nur Linksdrehung um alle Punkte dieser Geraden möglich, entsprechend dem schon unter b, β) erwähnten Falle. —

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich, dass zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Drehung, d. h. zur Undrehbarkeit derselben, wenigstens 3 Stützpunkte nöthig, diese indessen nur dann ausreichend sind, wenn von 3 parallelen Stütznormalen die mittlere entgegengesetzt gerichtet ist wie die beiden anderen. Im Allgemeinen reichen 4 Stützpunkte aus, d. h. es kann ein vierter Stützpunkt im Allgemeinen so angenommen werden, dass die ihm entsprechenden Drehungsfelder die noch übrig gebliebenen der 3 ersten Stützpunkte ungleichnamig decken. (In Fig. 2 kann ein solcher vierter Punkt in der Nähe derjenigen liegen, in welchen die Figur F von den Stütznormalen der Punkte A, B zum zweiten Mal geschnitten wird; in Fig. 3 giebt es unendlich viele Stützpunkte, deren jeder mit A, B, D zusammen die Figur F undrehbar macht, in dem von C an gegen D' hin gelegenen Theile der Figur.) Wenigstens 5 Stützpunkte sind nöthig, wenn 3 derselben noch irgend einen Punkt übrig lassen, um den die Figur in beiderlei Sinn drehbar ist, wenn also 3 Stütznormalen, von denen auch zwei entgegengesetzt gerichtete zusammenfallen können, sich in einem Punkte schneiden. Ein Kreis ist überhaupt nicht gegen Drehung stützbar, weil alle Normalen sich im Mittelpunkte schneiden.

§. 9. Vollkommene Stützung ebener Figuren gegen Schiebung und Drehung in möglichst wenig Punkten und mit möglichst kleinem Zwange.

In dem einzigen Falle, in welchem eine ebene Figur schon durch 3 Stützpunkte undrehbar gemacht werden kann (Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte A, B, C), erfordert ihre Unverschiebbarkeit noch wenigstens 2 weitere Stützpunkte, wohingegen in den Fällen, in denen die Figur in 4 Punkten vollkommen gegen Drehung stützbar ist, diese Punkte im Allgemeinen auch vollkommene Stützung gegen Schiebung vermitteln können (z. B. in Fig. 2 die Punkte A, B, C, in Fig. 3 die Punkte A, B, D je mit einem passend angenommenen vierten Stützpunkte). Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung und Drehung in ihrer Ebene sind also 4 Stützpunkte wenigstens nöthig und möglicherweise ausreichend, wenn nicht 3 Stütznormalen sich in

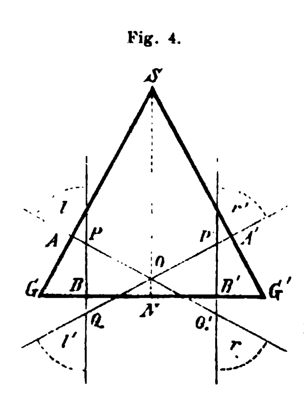


einem Punkte schneiden oder parallel sind, indem ersteren Falls mit Rücksicht auf Drehung, letzteren Falls mit Rücksicht auf Schiebung wenigstens noch 2, im Ganzen also wenigstens 5 Stützpunkte nöthig sind.

Wenn dabei die ebene Figur, wie es zwar in Fig. 1, 2 und 3 angenommen, indessen bisher nicht ausdrücklich vorausgesetzt wurde, eine geschlossene Figur und nur von aussen oder nur von innen zu stützen ist (jenachdem sie als äussere Grenzlinie einer, wie in Fig. 1, 2, 3, innerhalb liegenden, oder als innere Grenzlinie einer ausserhalb liegenden materiellen ebenen Fläche betrachtet wird), so ist es offenbar immer möglich, 3 Stützpunkte so anzunehmen, dass sie die Figur unverschiebbar machen, und nur ausnahmsweise nicht möglich, 4 Punkte so anzunehmen, dass sie die Figur gegen Schiebung und gegen Drehung zugleich vollkommen stützen. Sofern dann ausserdem die Wahl solcher Punkte auf unendlich mannigfache Weise möglich ist, kann sie noch an anderweitige Bedingungen geknüpft werden, insbesondere an die Forderung, dass eine auf Schiebung nach irgend einer Richtungslinie in der Ebene wirkende Kraft resp. ein auf Drehung um irgend eine zur Ebene senkrechte Axe wirkendes Kräftepaar durch möglichst kleine Widerstände, in den Stützpunkten angreifend und entgegengesetzt den Stützrichtungen wirkend, aufgehoben werde, dass also der grösste von den Widerständen dieser verschiedenen Stützpunkte möglichst klein sei, und somit die vollkommene Stützung der Figur mit möglichst kleinem Zwang erreicht werde.

So kann z. B. (Fig. 4) ein gleichschenkliges Dreieck GSG' ($SG = SG'$) in 4 Punkten A, A', B, B' von symmetrischer Lage gegen die Höhenlinie SN von aussen vollkommen gegen Schiebung und Drehung gestützt werden. Die Stützpunkte A, A' reduciren die Drehbarkeit auf den Winkelraum AOQ als Rechtsdrehungsfeld und seinen Scheitelwinkel als Linksdrehungsfeld. Die Aufhebung der Rechtsdrehung durch den Stützpunkt B', die der Linksdrehung durch den Stützpunkt B erfordert den grössten Widerstand in B' resp. B, wenn die Drehung um den der betreffenden Stütznormalen nächstgelegenen Punkt des Drehungsfeldes, wenn sie also in beiden Fällen um den Punkt O stattfindet, und diese grössten Widerstände werden um so kleiner, je grösser die von O auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je weiter folglich B und B' nach G und G' hin gerückt werden. Die Stützpunkte B und B' allein

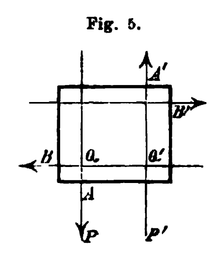
Fig. 4.



beschränken die Drehbarkeit auf ein Linksdrehungsfeld links von PBQ und ein Rechtsdrehungsfeld rechts von $P'B'Q'$; durch den Stützpunkt A wird ersteres auf den in der Figur mit l, letzteres auf den mit r bezeichneten, durch den Stützpunkt A' ersteres auf den mit l', letzteres auf den mit r' bezeichneten Winkelraum eingeschränkt, und die Beseitigung der Drehungsfelder l, r durch den Stützpunkt A', die der Drehungsfelder l', r' durch den Stützpunkt A erfordert die grössten Widerstände in diesen Punkten, wenn die betreffenden Drehungen um P, Q' resp. um Q, P' stattfinden. Endlich aber sind wieder diese grössten Widerstände um so kleiner, je grösser die von den fraglichen Drehungspunkten auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je länger also die Strecken PQ' und QP' sind, je näher folglich B und B' bei G und G' liegen, während die Lagen von A A' in SG und SG' nach wie vor gleichgültig bleiben. — Der Widerstand gegen Schiebung ist in jedem Stützpunkte dann am grössten, wenn die Richtungslinie der schiebenden Kraft mit der betreffenden Stütznormale zusammenfällt, und zwar gleich dieser Kraft, wo auch der betreffende Stützpunkt gelegen sein mag. Somit ergiebt sich, dass die vollkommene Stützung des gleichschenkligen Dreiecks in 4 symmetrisch gelegenen Punkten dann mit kleinstem Zwange erfolgt, wenn die zwei Stützpunkte in der Grundlinie möglichst nahe an den Ecken liegen, wogegen die Lage der zwei anderen Stützpunkte in den gleichen Seiten in dieser Hinsicht einerlei ist.

Soll ein Rechteck in 4 Punkten gegen Schiebung und gegen Drehung vollkommen gestützt werden, so muss in jeder Seite ein Stützpunkt liegen, und wenn die Stützung noch an weitere Bedingungen von allgemeiner Art geknüpft wird, so sind, da je zwei gegenüberliegende Seiten ganz gleichwerthig sind, die Stützpunkte A und A', B und B' (Fig. 5) in ihnen einander diametral gegenüberliegend anzunehmen. Nun wird durch A, A' die Drehbarkeit auf solche Drehpunkte beschränkt, die in dem Flächenstreifen zwischen den Stütznormalen AP, $A'P'$ liegen, welcher Streifen bei der Lage von A und A' in Fig. 5 ein Rechtsdrehungsfeld ist. Dasselbe wird durch den Stützpunkt B auf

Fig. 5.



den Flächenstreifen $PQQ'P'$ beschränkt, und die gänzliche Aufhebung der Drehbarkeit unter Einwirkung eines gewissen Kräftepaars durch den vierten Stützpunkt B' erfordert in diesem ungünstigsten Falles, nämlich bei Drehung um einen Punkt von QQ' eine um so kleinere Widerstandskraft, je mehr die Stütznormalen für die Punkte B, B' von einander, je weniger sie also

von den gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks entfernt sind. Von den Punkten A, A' gilt dasselbe, wie von B, B', und es wird also ein Rechteck in seiner Ebene durch möglichst wenig, nämlich durch 4 Stützpunkte mit kleinstmöglichem Zwange vollkommen gestützt, wenn jene Punkte in den 4 Seiten dicht bei gegenüberliegenden Ecken liegen.

§. 10. Stützung von Körpern in Linien oder Punkten.

Unter der Stützung eines Körpers gegen Schiebung nach gewissen Richtungen oder gegen Drehung um Axen von gewissen Richtungen wird eine solche Stützung verstanden, durch welche jene Schiebungen resp. diese Drehungen unmöglich gemacht werden. Hiernach kann Alles, was in den vorigen Paragraphen von der vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung oder Drehung in ihrer Ebene gesagt wurde, unmittelbar auf die Stützung eines prismatischen Körpers in geraden Linien, die mit den Kanten parallel sind, gegen Schiebung normal zu diesen Kanten resp. gegen Drehung um damit parallele Axen übertragen werden. An die Stelle der Stützpunkte, der Stütznormalen und Stützrichtungen dort treten dann nur hier die Stützlinien, die Stütznormalebenen und deren Richtungen, normal zu den Stützlinien verstanden. Ein Prisma (oder auch ein allgemeiner Cylinder) kann also immer in 3 mit den Kanten parallelen Geraden gegen Schiebung nach jeder zu denselben senkrechten Richtung, und im Allgemeinen in 4 solchen Geraden zugleich gegen Drehung um jede damit parallele Axe gestützt werden; zu dem Ende sind diese Geraden nur so anzunehmen, dass in ihren Schnittpunkten mit einer Querschnittsebene des Prisma der als geschlossene ebene Figur sich ergebende betreffende Querschnitt desselben gemäss den Sätzen der vorigen Paragraphen vollkommen gegen Schiebung resp. Drehung in seiner Ebene gestützt wird.

Durch solche 4 Stützlinien a, b, c, d, welche das Prisma nach jeder zu ihnen senkrechten Richtung unverschiebbar und um jede mit ihnen parallele Axe undrehbar machen, wird offenbar auch seine Drehbarkeit um jede dazu senkrechte Axe aufgehoben, die Beweglichkeit also auf Verschiebbarkeit nach der Kantenrichtung beschränkt, entsprechend der gegenseitigen Beweglichkeit der Elemente eines Prismenpaares. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun aber die Stützlinien auch durch einzelne Stützpunkte in ihnen ersetzt werden. Blos zur Verhinderung jeder Schiebung senkrecht



zu den Kanten und jeder Drehung um Axen, die mit den Kanten parallel sind, wäre je ein Stützpunkt A, B, C, D von beliebiger Lage in jeder der Stützlinien a, b, c, d ausreichend. Um aber das Prisma auch gegen Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zu sichern, ist es ausreichend, in einer der Geraden a, b, c, d zwei Stützpunkte anzunehmen, etwa A_1 und A_2 in der Geraden a, und zwar so, dass von den übrigen Punkten B, C, D in den Geraden b, c, d wenigstens zwei zwischen den durch die Punkte A_1 und A_2 gehenden Querschnittsebenen liegen, etwa die Punkte B und C, sofern das Prisma weder von der Ebene ab in a oder b, noch von der Ebene ac in a oder c berührt wird, und somit die Stützrichtungen der Punkte A_1 und A_2 sowohl solche Componenten haben, die in der Ebene ab einer Componente der Stützrichtung in B, wie auch solche, die in der Ebene ac einer Componente der Stützrichtung in C entgegengesetzt sind. Nach §. 8 unter 3, b, γ) ist dann nämlich keines der Linienpaare a, b und a, c in seiner Ebene, d. h. um irgend eine zu seiner Ebene senkrechte Axe drehbar, und in Drehungen um zwei solche Axen würde jede Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zerlegt werden können. Von den zusammenfallenden Oberflächen der Elemente eines Prismenpaares kann also (unbeschadet der demselben zukommenden Umkehrbarkeit und besonderen Art von Zwangläufigkeit) die eine auf 4 mit den Kanten parallele Stützlinien oder auf 5 Stützpunkte reducirt werden, die auf unendlich mannigfache Weise gemäss den vorhergehenden Bemerkungen gewählt werden können. Uebrigens sind dadurch nicht alle Möglichkeiten einer der Aufgabe entsprechenden Stützung erschöpft; in Linien könnte dieselbe noch auf mancherlei andere Weise, insbesondere z. B. in zwei geschlossenen Querschnittslinien des Prisma geschehen, oder in beliebigen Linien, die 5 so gelegene Punkte, wie die oben mit A_1, A_2, B, C, D bezeichneten, enthalten.

Die systematische Verallgemeinerung dieser Betrachtungen zur Aufsuchung aller Arten, wie die gegebene Beweglichkeit durch Stützung in Linien oder Punkten erzielt werden kann, sowie ihre Ausdehnung auf die Ermittelung der bei weniger einfachen Körperformen zu gewissen Einschränkungen der Beweglichkeit wenigstens nöthigen Zahl von Stützlinien oder Stützpunkten bei entsprechender Lage derselben, ist ohne erhebliches praktisches Interesse, da mit Rücksicht auf die Abnutzung gewöhnlich nicht sowohl die eingeschränkteste, als vielmehr gerade umgekehrt die ausgedehnteste den Umständen nach zulässige Stützung vorzuziehen ist. In speciellen Fällen lässt auch meistens die unmittelbare Anschauung leicht erkennen, wie wenigstens unter anderen Möglichkeiten die Stützung reducirbar ist, zu welchem Ende die Gesetze der Stützung einer ebenen Figur in ihrer

Ebene auch bei nicht prismatischen Körpern Dienste leisten können. Hier mögen nur noch (ohne eingehende Beweisführung) Angaben folgen über die Art, wie bei den übrigen Umschlusspaaren (ausser dem besprochenen Prismenpaare) unbeschadet ihres kinematischen Charakters die das eine Element berührende Oberfläche des andern auf Stützlinien oder Stützpunkte reducirt werden kann.

Die Beweglichkeit eines Drehkörpers kann auf die dem Drehkörperpaare entsprechende Drehbarkeit um seine Axe beschränkt werden durch Stützung in zwei solchen Parallelkreisen k_1 und k_2, dass die Stützrichtungen für die Punkte von k_1 in entgegengesetztem Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stützrichtungen für die Punkte von k_2, d. h. dass die ersteren mit der einen, die letzteren mit der entgegengesetzten Axrichtung spitze Winkel bilden, die nicht beide = Null sein dürfen (widrigenfalls der Körper die Beweglichkeit eines Plattenpaar-Elementes hätte); oder auch durch Stützung in 3 solchen Meridianlinien a, b, c, dass in ihren Schnittpunkten mit irgend einem Parallelkreise der letztere (nach §. 7) in seiner Ebene gegen Schiebung vollkommen gestützt wird. Dieselbe Beschränkung der Beweglichkeit wird aber auch schon durch Stützung in den 6 Punkten A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 erreicht, in denen die Meridianlinien a, b, c von den Kreisen k_1 und k_2 geschnitten werden, und schliesslich können von diesen 3 Punktepaaren zwei, etwa B_1 und B_2, C_1 und C_2, noch durch einzelne Punkte B, C ersetzt werden, die in den Meridianlinien b, c so liegen, dass die von ihnen auf die Gerade A_1A_2 gefällten Senkrechten BB' und CC' solche Punkte B' und C' dieser Geraden treffen, die zwischen A_1 und A_2 liegen, und dass ferner weder die Stütznormale eines der Punkte A_1, A_2, B rechtwinklig gegen BB', noch die Stütznormale eines der Punkte A_1, A_2, C rechtwinklig gegen CC' gerichtet ist, und dass somit die Stützrichtungen der Punkte A_1 und A_2 Componenten nach den Richtungen BB' und CC', die der Punkte B und C Componenten nach den entgegengesetzten Richtungen $B'B$ resp. $C'C$ haben. Unter diesen Umständen ist nach §. 8 unter 3, b, γ) der Körper weder um eine zur Ebene A_1A_2B noch um eine zur Ebene A_1A_2C senkrechte Axe, also auch nicht um eine zur Geraden A_1A_2 senkrechte Axe drehbar. Dann ist aber auch Drehung um jede zur geometrischen Axe des Körpers senkrechte Axe unmöglich, weil eine solche mit einer um diese geometrische Axe selbst ohnehin möglichen Drehung immer zu einer Drehung um eine zu A_1A_2 senkrechte Axe zusammengesetzt werden könnte.*

---

* Dieser letzte Schluss, weil wesentlich durch die vorhandene Drehbarkeit um die geometrische Axe bedingt, wäre unthunlich bei einem Prisma, das man



Sind die Kreise k_1 und k_2 gleich, so dass die Gerade A_1A_2 parallel mit der Axe ist, so kommen die Bedingungen für die Wahl der 4 Stützpunkte A_1, A_2, B, C in den wie oben charakterisirten Parallelkreisen k_1, k_2 und Meridianlinien a, b, c darauf hinaus, dass B und C zwischen den Ebenen von k_1 und k_2 liegen müssen und dass die Stütznormale für keinen der 4 Punkte parallel mit der Axe sein darf. Was schliesslich noch einmal die Stützung in Linien betrifft, so kann dieselbe natürlich auch in jedem anderen System von Linien geschehen, welche 4 so gelegene wie die hier mit A_1, A_2, B, C bezeichneten Punkte enthalten.

Eine Schraube kann als Element eines Schraubenpaares in den Durchschnittslinien a, b, c ihrer Oberfläche mit 3 solchen Ebenen gestützt werden, welche sich in der Axe unter hohlen Winkeln schneiden, die sich zu 360^0 ergänzen; oder in zwei solchen Schraubenlinien, dass die Stütznormalen für die Punkte der einen im entgegengesetzten Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stütznormalen für die Punkte der anderen; oder auch in den Schnittpunkten dieser Schraubenlinien mit den Linien a, b, c, die unter ähnlichen Voraussetzungen, wie beim Drehkörperpaare, wieder auf 4 Stützpunkte reducirbar sind. Schliesslich kann die Stützung auch in beliebigen anderen Systemen von Linien erfolgen, die eine dazu ausreichende Gruppe von Stützpunkten enthalten.

Ein Cylinder kann als Element eines Cylinderpaares in 4 Punkten A_1, A_2, B, C gestützt werden, falls die in einer geraden Meridianlinie a befindlichen Punkte A_1 und A_2 auf entgegengesetzten Seiten ausserhalb der Querschnittsebenen liegen, welche die in zwei anderen Meridianlinien b, c befindlichen Stützpunkte B, C enthalten, vorausgesetzt ferner, dass irgend ein Querschnitt von den Geraden a, b, c in den Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks geschnitten wird. Beliebige Linien in der Cylinderfläche, die solche 4 Punkte enthalten, können als Stützlinien dienen.

Eine Kugel kann gegen Schiebung nach jeder Richtung und somit als Element eines Kugelpaares in je 4 solchen Punkten gestützt werden, in denen sie von den Begrenzungsebenen eines sie umschliessenden Tetraeders berührt werden kann, selbstverständlich dann auch in jedem Liniensystem, das 4 solche Punkte enthält.

---

etwa als Element eines Prismenpaares statt in 5 auch in nur 4 Punkten A, B, C, D zu stützen vermeinen wollte, indem dieselben in den oben mit a, b, c, d bezeichneten Geraden des Prisma analog in gleicher Reihenfolge den hier mit A_1, B, C, A_2 bezeichneten Punkten des Drehkörpers angenommen würden; aus der Undrehbarkeit um jede zur Geraden AD senkrechte Axe würde nicht auch Undrehbarkeit um jede zu den Prismenkanten senkrechte Axe folgen.

Endlich kann auch eine gleichförmig dicke ebene Platte als Element eines Plattenpaares in 4 Punkten A, B, C, D gestützt werden, von denen entweder zwei, etwa A und B, in der einen Begrenzungsebene E_1 beliebig und die zwei anderen C, D in der anderen E_2 so liegen, dass die Projection $C'D'$ der Strecke CD auf die Ebene E_1 und die Strecke AB in derselben sich ohne Verlängerung, d. h. in einem zwischen A und B sowie zwischen C' und D' liegenden Punkte schneiden, oder von denen 3, etwa A, B und C, in E_1 beliebig liegen, dagegen der Punkt D in E_2 so, dass seine Projection auf E_1 in das Innere des Dreiecks ABC fällt. Stützlinien sind wieder alle solche Systeme von Linien in E_1 und E_2, welche 4 Punkte von den angegebenen Lagen enthalten.

c. Höhere Elementenpaare.

Während bei gegenseitiger Bewegung der Elemente eines niederen Paares stets dieselben Punkte der Oberfläche des einen Elementes in der Oberfläche des anderen bleiben, die eine Elementenfläche durch Linien der anderen beschrieben werden kann, die Elemente deshalb auch in einer Fläche sich berühren können, haben bei höheren Elementenpaaren die Berührungspunkte veränderliche Lagen in beiden Oberflächen, deren jede die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der relativen Bewegung des ihr zugehörigen Elementes gegen das der ersteren zugehörige einnimmt, und es berühren sich die Elemente nur in Linien oder Punkten. Während endlich die Axoide oder Axoidensysteme der beiden Elemente eines niederen Paares zwei zusammenfallende geradlinige Gebilde sind, und in Folge dessen die Umkehrung des Paares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, sind die Axoide oder Axoidensysteme höherer Elementenpaare verschiedene geradlinige Gebilde, und ist dann auch die Umkehrung des Paares mit einer Aenderung der Bewegung verbunden, d. h. wenn P und P' zwei solche Punkte beziehungsweise der Elemente E und E' sind, die bei einer gewissen gegenseitigen Lage von E und E' zusammenfallen, so ist die Bahn, überhaupt das Bewegungsgebiet von P bei Bewegung von E und Feststellung von E' nicht identisch mit der Bahn, überhaupt dem Bewegungsgebiete von P' bei Bewegung von E' und Feststellung von E. — Die folgenden Untersuchungen beschränken sich übrigens auf zwangläufige höhere Elementenpaare, bei denen es sich um bestimmte Axoide und Punktbahnen, nicht um Axoidensysteme



und allgemeinere Bewegungsgebiete der Punkte handelt.* Dergleichen höhere Paare sind einzutheilen mit Rücksicht auf den Charakter ihrer Axoide, welche cylindrische Flächen, conische Flächen, allgemeinere abwickelbare oder auch nicht abwickelbare geradlinige Flächen sein können; in den ersten Fällen ist die gegenseitige Bewegung der sich beständig berührenden Axoide beider Paarelemente eine nur rollende, im letzten Falle eine gleitend-rollende.

1. Höhere Elementenpaare mit cylindrischen Axoiden.

§. 11. Vorbemerkungen.

Unter einer cylindrischen Fläche soll eine allgemeine Cylinderfläche, unter einem cylindrischen Körper ein allgemeiner Cylinder verstanden werden im Gegensatze zu einer kurzweg so genannten Cylinderfläche beziehungsweise einem Cylinder (§. 1). Die Axoide von Paarelementen sind dann cylindrische Flächen, wenn die Elemente selbst cylindrische Körper sind, die sich in parallelen Geraden berühren, während sie behufs der vorausgesetzten Zwangläufigkeit durch vortretende Ränder oder auf andere Weise an einer Axialverschiebung verhindert werden. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, d. h. ihrer in Punkten sich berührenden Querschnittsfiguren, auf deren Betrachtung deshalb die folgende Untersuchung sich beschränken kann; jedes Profil ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere bei seiner Bewegung gegen jenes nach und nach einnimmt. Die diese Profile enthaltende Querschnittsebene schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in Querschnittslinien, welche die Pol-

---

* Kinematische Ketten mit Elementenpaaren von mehrfacher Beweglichkeit können im Allgemeinen aus Ketten mit zwangläufigen Elementenpaaren durch Verminderung der Gliederzahl entstanden gedacht werden, wie es in Betreff der Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit schon in §. 6 angedeutet wurde und in Betreff anderer, insbesondere auch höherer Elementenpaare später an einigen Beispielen gezeigt werden wird. In der That ist ohne Weiteres begreiflich, dass, wenn ein Glied b einerseits mit dem Gliede a durch ein zwangläufiges Elementenpaar α, andererseits mit dem Gliede c durch ein zwangläufiges Elementenpaar γ verbunden ist, bei Beseitigung dieses Gliedes b die Glieder a und c, um die frühere gegenseitige Beweglichkeit zu behalten, durch ein Elementenpaar zu verbinden sein werden, welches die Beweglichkeiten der Elementenpaare α und γ in sich vereinigt.

bahnen der Elementenprofile heissen und sich beständig in einem Punkte, dem sogenannten Pol, berühren.

Die gegenseitige Bewegung der Elementenprofile in ihrer Ebene ist dadurch bestimmt, dass die mit ihnen verbundenen Polbahnen auf einander rollen, entsprechend einer stetigen Folge von elementaren Drehungen um ihren jeweiligen Berührungspunkt, den Pol. Diese Art von gegenseitiger Beweglichkeit der Elementenprofile erfordert eine beständige solche gegenseitige Stützung derselben, welche nur Drehung um einen Punkt in beiderlei Sinn zulässt, wozu es (§. 7 und 8) nöthig ist, dass die wenigstens 3 Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden. Uebrigens ist es nicht nöthig, die Erfüllung dieser Bedingung besonders nachzuweisen, wenn man erkannt hat, dass die Elementenprofile in stetig auf einander folgenden Lagen sich gegen Schiebung vollkommen stützen, indem sie dann von irgend einer dieser Lagen aus nur um einen einzigen Punkt P gegenseitig drehbar sein können; wäre nämlich ausserdem noch Drehung um einen zweiten Punkt P_1 möglich, so könnte diese in eine gleiche Drehung um P und in Schiebung senkrecht zur Geraden PP_1 zerlegt werden, entgegen der Voraussetzung vollkommener Stützung gegen Schiebung.

Die sich hier darbietenden Aufgaben betreffen vor Allem 1) die Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, 2) die Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen. Letztere bestimmen unmittelbar die Punktbahnen, d. h. die Bahnen aller mit dem einen Elementenprofil fest verbunden gedachter Punkte in Beziehung auf das andere. Umgekehrt wird die Polbahn jedes Elementenprofils durch die Bahnen von zwei Punkten des anderen bestimmt, indem sie, wie die allgemeine Kinematik lehrt, der Ort der Schnittpunkte je zweier Normalen dieser Punktbahnen in entsprechenden Punkten derselben, d. h. in gleichzeitigen Oertern der beschreibenden Punkte ist.

Ausser jenen unter 1) und 2) bezeichneten Gruppen von Aufgaben kann es noch der Fall sein, dass die gegenseitige Beweglichkeit der cylindrischen Paarelemente weder durch die Elementenprofile, noch durch die Polbahnen gegeben, sondern an anderweitige Bedingungen geknüpft ist, denen entsprechend dann erst die betreffenden Polbahnen und event. die Profile bestimmt werden sollen. In dieser Hinsicht soll im Folgenden insbesondere der Fall behandelt werden, dass die Elemente des Paares um parallele Axen von unveränderlichem Abstande und von unveränderlichen Lagen gegen die Elemente in gegebener Weise drehbar sind, also die Aufgabe, betreffend 3) die Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte

ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen. Nachdem die Polbahnen gefunden sind, gehört die Bestimmung der Elementenprofile zu der unter 2) genannten Gruppe von Aufgaben.

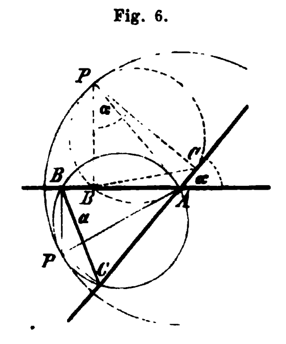
α. Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile.

§. 12. Die Cardanischen Kreise als Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel".

Die Ermittelung der Polbahnen zu gegebenen Elementenprofilen soll im Folgenden beispielsweise für solche Fälle gezeigt werden, in denen das eine Elementenprofil F aus Kreisbögen, das andere F' aus geraden Linien besteht, da solche Profile auch abgesehen von ihrer leichten Herstellbarkeit von besonderem Interesse sind. In allen solchen Fällen kann die Aufgabe auf eine andere von elementarem Charakter zurückgeführt werden, auf die auch später wiederholt Bezug zu nehmen sein wird, und welche deshalb hier zunächst einer gesonderten Betrachtung unterworfen werden soll. Sind nämlich b' und c' zwei nicht parallele Seiten der geradlinigen Figur F', mit denen bei einer gewissen Bewegung von F gegen F' zwei Bogenseiten von F in Berührung bleiben, und sind B, C die Mittelpunkte, b, c die Halbmesser der Kreise, zu denen diese Bogenseiten von F gehören, so bewegen sich die Punkte B, C von F in geraden Linien, die beziehungsweise in den Entfernungen b, c mit den geraden Linien b', c' der Figur F' parallel sind. Die gegenseitige Bewegung der beiden Figuren ist also dadurch bestimmt, dass die Endpunkte einer gewissen Strecke $BC = a$ der aus Kreisbögen bestehenden Figur F in den Schenkeln eines gewissen Winkels $BAC = \alpha$ der geradlinigen Figur F' gleiten resp. diese Winkelschenkel von F' durch jene zwei Punkte von F hindurch gleiten. Die Polbahnen eines solchen elementaren Figurenpaars „Strecke und Winkel" (Fig. 6), auf dessen gegenseitige Bewegung die der Elementenprofile F, F' in ihren einzelnen Theilen (entsprechend den verschiedenen Combinationen, in denen zwei Bogenseiten des einen mit zwei geraden Seiten des anderen Profils zur Berührung kommen können) immer zurückführbar ist, ergeben sich folgendermaassen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die hier als Winkel bezeichnete Figur ein System von zwei sich schneidenden Geraden ist, die also im gewöhnlichen Sinne eigentlich 4 Winkel bilden, von denen je 2 entweder Neben- oder Scheitelwinkel sind, und von denen jeder die Strecke in sich aufnehmen kann, wenn die Figuren ihre sämmtlichen gegenseitigen Lagen stetig durchlaufen.

Die **Polbahn des Winkels** ist der Ort der Punkte (Pole) P, um welche bei fester Lage des Winkels die Strecke sich nach und nach dreht. Für irgend eine Lage BC (Fig. 6) der letzteren ergiebt sich dieser Pol im Durchschnitte der Normalen in den Punkten B, C der betreffenden Bahnen AB, AC dieser Punkte. Er liegt in der Peripherie des Kreises, der durch A, B, C geht, und zwar so, dass $AP = R = \frac{a}{\sin \alpha}$ ein Durchmesser dieses Kreises ist. Die Polbahn des Winkels ist also der aus seinem Scheitelpunkte A mit dem Radius $R = \frac{a}{\sin \alpha}$ beschriebene Kreis.

Fig. 6.



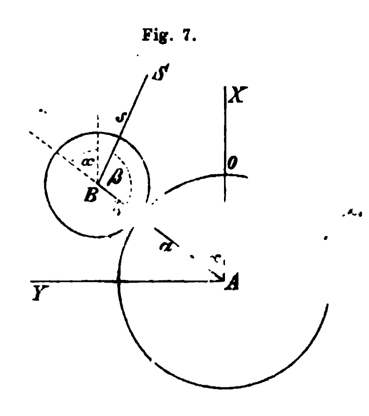
Die **Polbahn der Strecke** ist der Ort aller relativen Lagen des Pols P gegen BC, d. i. der Ort der Durchschnittspunkte aller Geraden, welche, durch B und C gehend, sich unter den Winkeln α und $180^0 - \alpha$ schneiden, also der die Strecke BC als Sehne enthaltende Kreis mit dem Radius $r = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}$.

Die Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel“ sind also zwei Kreise vom Halbmesserverhältnisse $1:2$, von denen der kleinere (in der Folge kurz der Kreis r genannt) im grösseren (dem Kreise R), resp. der grössere um den kleineren rollt. Mit Reuleaux mögen dieselben die **Cardanischen Kreise** genannt werden nach dem Mathematiker Cardano, der sich im 16. Jahrhundert zuerst mit dem Problem beschäftigt zu haben scheint. Die mit der Strecke verbundenen Punkte beschreiben also relative Bahnen gegen den Winkel, die zur Classe der Hypocykloiden gehören, hier aber, wie sogleich gezeigt werden soll, in **Ellipsen** übergegangen sind; die mit dem Winkel verbundenen Punkte beschreiben relative Bahnen gegen die Strecke, die zur Classe der Epicykloiden gehören, im vorliegenden Falle aber **Cardioiden** heissen. Die Gleichungen dieser Curven (zunächst auf Grund allgemeinerer Voraussetzungen) ergeben sich wie folgt.

Auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt A und Halbmesser a (Fig. 7) rolle ein anderer mit dem Mittelpunkt B und Halbmesser b, mit welchem ein Punkt S in der Entfernung s von B verbunden ist. Für A als Anfangspunkt werde die positive x-Axe so angenommen, dass sie den Berührungspunkt der beiden Kreise in derjenigen Lage O enthält, bei welcher BO und BS einerlei Richtung haben, die positive y-Axe senkrecht zur

x-Axe so, dass der Berührungspunkt P sich auf dem Kreise um A im Sinne von der positiven x-Axe durch den rechten Winkel XAY zur positiven y-Axe bewegt; α und β seien die Mittelpunktswinkel OAP und SBP der Bögen beider Kreise, die sich seit ihrer Berührung im Punkte O von einander abgewälzt haben. Wenn sich nun die Kreise von aussen berühren, so dass in der Anfangslage die Richtungen BO und BS der Richtung AO entgegengesetzt sind, so ergeben sich aus Fig. 7 sofort die folgenden Ausdrücke der Coordinaten x, y des beschreibenden Punktes S:

Fig. 7.



$$x = (a + b) \cos \alpha - s \cos (\alpha + \beta)$$
$$y = (a + b) \sin \alpha - s \sin (\alpha + \beta)$$

oder wegen $a\alpha = b\beta$:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a + b) \cos \alpha - s \cos \frac{a+b}{b}\alpha \\ y &= (a + b) \sin \alpha - s \sin \frac{a+b}{b}\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Berühren sich aber die Kreise von innen, so dass in der Anfangslage (Fig. 8 und Fig. 9) die Richtungen BO und BS mit der Rich-

Fig. 8.

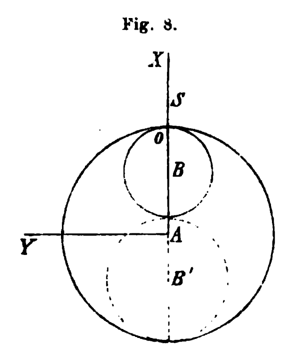
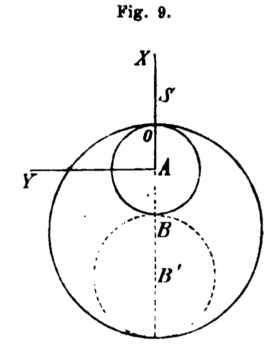


Fig. 9.



tung AO übereinstimmen, so sind in Gl. (1) nur b und s entgegengesetzt zu nehmen, wodurch sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} x &= (a - b) \cos \alpha + s \cos \frac{a-b}{b}\alpha \\ y &= (a - b) \sin \alpha - s \sin \frac{a-b}{b}\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Bahnen der Punkte S sind in Fig. 7 und Fig. 9 Epicykloiden, in Fig. 8 Hypocykloiden, und zwar sogenannte gemeine, wenn $s = b$ ist, verlängerte oder verschlungene, wenn $s > b$, verkürzte oder gedehnte, wenn $s < b$ ist. Bemerkenswerth ist, dass die gemeine Hypocykloide in dem der Figur 8 entsprechenden Falle nicht verschieden ist von derjenigen, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um B' mit dem Halbmesser $b' = a - b$ beim Rollen in dem Kreise um A beschreibt, und dass ebenso die gemeine Epicykloide in dem der Figur 9 entsprechenden Falle dieselbe ist wie diejenige, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um B' mit dem Halbmesser $b' = b - a$ beim Rollen auf dem Kreise um A beschreibt, dass aber diese Beziehungen auf gemeine Hypocykloiden und Epicykloiden beschränkt sind. Soll nämlich ein Punkt S' in der Entfernung s' vom Mittelpunkte B' des Kreises mit dem Halbmesser b' beim Rollen des letzteren in dem Kreise um A mit dem Halbmesser $a > b'$ dieselbe Hypocykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um B verbundene Punkt S (Fig. 8) im gleichen Falle, so muss nach Gl. (2) für alle Werthe von α

$$(a - b') \cos \alpha' + s' \cos \frac{a - b'}{b'} \alpha' = (a - b) \cos \alpha + s \cos \frac{a - b}{b} \alpha$$

$$(a - b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a - b'}{b'} \alpha' = (a - b) \sin \alpha - s \sin \frac{a - b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = a - s;\; s' = a - b;\; \alpha' = -\frac{a - b}{b} \alpha$$

gesetzt wird, vorausgesetzt dass dann auch

$$\frac{a - b'}{b'} \alpha' = -\frac{s}{a - s} \cdot \frac{a - b}{b} \alpha = -\alpha$$

ist. Dazu ist es aber nöthig und ausreichend, dass $s = b$ ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = a - b = s'.$$

Soll andererseits ein Punkt S' in der Entfernung s' vom Mittelpunkte B' des Kreises mit dem Halbmesser b' beim Rollen des letzteren auf dem Kreise um A dieselbe Epicykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um B verbundene Punkt S (Fig. 9), so muss nach Gl. (1) und (2) für alle Werthe von α

$$(a + b') \cos \alpha' - s' \cos \frac{a + b'}{b'} \alpha' = (a - b) \cos \alpha + s \cos \frac{a - b}{b} \alpha$$

$$(a + b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a + b'}{b'} \alpha' = (a - b) \sin \alpha - s \sin \frac{a - b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = s - a;\ s' = b - a;\ \alpha' = \frac{b-a}{b}\alpha$$

gesetzt wird, falls dann auch

$$\frac{a+b'}{b'}\alpha' = \frac{s}{s-a}\,\frac{b-a}{b}\alpha = \alpha$$

ist. Dazu ist es aber wieder nöthig und ausreichend, dass $s = b$ ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = b - a = s'. —$$

Was nun den hier vorliegenden besonderen Fall der Cardanischen Kreise betrifft, so ergeben sich die Bahngleichungen der mit dem kleineren Kreise r verbundenen Punkte S (Fig. 8 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um B als Kreis r einen halb so grossen Durchmesser hat, wie der um A als Kreis R) aus Gl. (2) mit $a = 2r$, $b = r$:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r+s)\cos\alpha \\ y &= (r-s)\sin\alpha \end{aligned}\right\}\ \frac{x^2}{(r+s)^2} + \frac{y^2}{(r-s)^2} = 1 \ \ldots\ldots\ldots (3)$$

Für $s = 0$ ist diese Bahn ein Kreis um A mit dem Halbmesser r. Wächst s, so wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen $r+s$, $r-s$, die innerhalb des Kreises R liegt und, indem sie sich im Sinne der x-Axe mehr und mehr streckt, im Sinne der y-Axe zusammenzieht, für $s = r$ in den mit der x-Axe zusammenfallenden Durchmesser des Kreises R übergeht. Für $s > r$ wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen $s+r$, $s-r$, die zunächst den Kreis R in 4 Punkten schneidet, bei $s = 3r$ ihn in der y-Axe berührt, dann ihn ganz umgiebt und sich mit weiter wachsendem s einem unendlich grossen Kreise um A nähert.

Die Bahngleichungen der mit dem grösseren Cardanischen Kreise R verbundenen Punkte S (Fig. 9 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um B als Kreis R einen doppelt so grossen Durchmesser hat, wie der um A als Kreis r), ergeben sich aus Gl. (2) mit $a = r$, $b = 2r$:

$$\left.\begin{aligned} x &= -r\cos\alpha + s\cos\frac{\alpha}{2} \\ y &= -r\sin\alpha + s\sin\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten von A nach O verlegt wird, so gehen diese Bahngleichungen (4), worin dann $x+r$ statt x zu setzen ist, über in

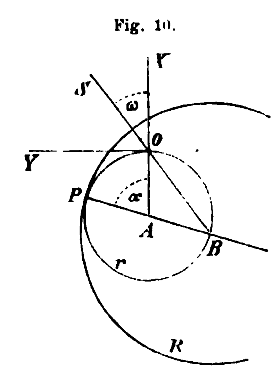
$$x = s\cos\frac{\alpha}{2} - r(1+\cos\alpha) = \left(s - 2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$y = \left(s - 2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{oder } x = \varrho \cos \omega;\ y = \varrho \sin \omega \\ \text{mit } \varrho = s - 2 r \cos \omega;\ \omega = \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Daraus folgt (Fig. 10), dass die Gerade, welche den Mittelpunkt B des Kreises R mit dem beschreibenden Punkte S verbindet, beständig durch denselben Punkt O des Kreises r geht, und dass die Bahn von S erhalten wird, indem man eine durch O gehende Gerade um diesen Punkt sich drehen lässt und von ihrem zweiten Durchschnittspunkte B mit dem Kreise r aus die Strecke $BS = s$ stets in gleichem Sinne darauf abträgt. Dieser stets gleiche Sinn ist, wenn er anfangs von B gegen O gerichtet war, nach dem Durchgange des Punktes B durch den Punkt O von O gegen B gerichtet und umgekehrt.

Fig. 10.



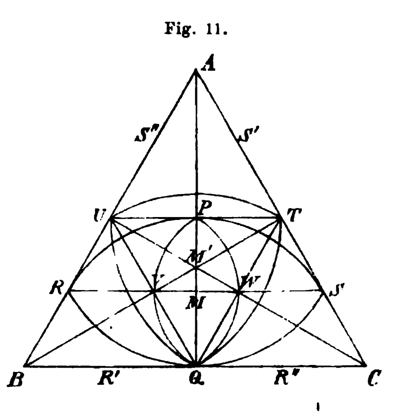
Für $s = 0$ ist die Bahn der Kreis r selbst. Mit wachsender Grösse s geht sie in zwei Schleifen, die eine innerhalb, die andere ausserhalb des Kreises r mit dem Knotenpunkte O über (verschlungene Cardioide); die innere Schleife wird immer kleiner, die äussere grösser, bis erstere mit $s = 2r$ ganz verschwindet und die Bahn bei O eine Spitze bildet (gemeine Cardioide). Mit weiter wachsendem s flacht sich diese Spitze, indem sie sich vom Kreise r entfernt, mehr und mehr ab (gedehnte Cardioide), und nähert sich die Bahn wieder einem unendlich grossen Kreise um A.

§. 13. Gleichseitiges Bogenzweieck im gleichseitigen Dreieck.

Als einfachster Fall von Elementenprofilen, deren eines aus Kreisbögen und anderes aus geraden Linien besteht, werde jenes als ein Bogenzweieck vorausgesetzt, gebildet von zwei Kreisbögen RQS und RPS (Fig. 11), die aus den Endpunkten einer Strecke $PQ = a$ mit derselben als Halbmesser beschrieben sind, dieses als ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe $= 2a$ ist. Um diese Figuren als zulässige Profile eines zwangläufigen höheren Elementenpaars nachzuweisen, ist nach §. 11 zu zeigen, dass sie sich in stetig aufeinander folgenden Lagen gegen Schiebung vollkommen stützen, was aber nach §. 7 der Fall ist, wenn das Bogenzweieck bei stetiger Drehung im Dreieck beständig von allen 3 Seiten des letzteren berührt werden kann.

Zunächst ergiebt sich eine dieser Bedingung entsprechende Anfangslage durch folgende Erwägung. Zieht man (Fig. 11) die Gerade BC durch Q senkrecht zu PQ, also tangential an den Bogen RQS, verlängert PQ um $PA = PQ$ und zieht die Geraden ARB, ASC, so ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe $AQ = 2a$, von dem also nur noch zu zeigen bleibt, dass es gleichseitig, somit $\angle BAQ = \angle CAQ = 30^0$ ist, und dass seine Seiten AB, AC den Bogen RPS in R, S berühren, somit $\angle ARQ = \angle ASQ = 90^0$ ist. Beides folgt aber daraus, dass den Voraussetzungen zufolge

Fig. 11.



$$\angle RQP = \angle RPQ = 2 . \angle RAP = 60^0,$$
$$\angle SQP = \angle SPQ = 2 . \angle SAP = 60^0 \text{ ist.}$$

Um nun zu zeigen, dass von dieser Anfangslage aus das Bogenzweieck stetig so gedreht werden kann, dass es beständig alle Seiten des Dreiecks ABC berührt, und um zugleich die Polbahnen beider Profile zu erkennen, werde die Gerade TU durch P parallel RS und BC gezogen und Q mit T, U durch die Geraden QT, QU verbunden, die von der Geraden RS in den Punkten W, V geschnitten werden, so dass dann Q, T, U die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC und P, V, W die Mittelpunkte der Seiten des gleichfalls gleichseitigen Dreiecks QTU sind; ferner werde aus den Eckpunkten dieses letzteren Dreiecks mit seinen Seitenlängen als Halbmessern das Bogendreieck QTU verzeichnet, und über der Strecke VW als kleiner Axe das gleichseitige Bogenzweieck mit der grossen Axe PQ, dessen aus V und W als Mittelpunkten beschriebene Bogenseiten PWQ, PVQ zu halb so grossen Kreisen gehören wie die Bogenseiten des Bogendreiecks QTU. Nun kann das Bogenzweieck RS durch Drehung um 60^0 links herum, während der Bogen RP beständig von der Geraden AB, der Bogen QR beständig von der Geraden BC berührt wird, in eine solche Lage $R'S'$ gebracht werden, in der es gegen AB ebenso liegt wie in der Figur gegen BC, und es fragt sich nur, ob bei dieser Bewegung der Punkt S des Bogenzweiecks RS beständig in der Geraden AC bleibe? Indem aber der Punkt P des Bogenzweiecks RS als Mittelpunkt des Kreisbogens QR in der Geraden PU parallel BC, und der Punkt Q als Mittelpunkt des Kreisbogens RP in der Geraden QW parallel AB sich bewegen muss, ist die fragliche

Bewegung dieselbe wie die der Strecke $PQ = a$ im Winkel $UTQ = 60^0$, entsprechend nach vorigem §. dem Rollen des Kreises mit der Sehne PQ und dem Durchmesser $R = \frac{a}{\sin 60^0} = TQ = VS$, also dem Mittelpunkte W, als Polbahn der Strecke in dem Kreise mit dem Halbmesser R und Mittelpunkte T als Polbahn des Winkels, und zwar bedarf es der Abwälzung des zum Mittelpunktswinkel $QWP = 120^0$ gehörigen Bogens QVP des ersten Kreises auf dem zum Mittelpunktswinkel $QTU = 60^0$ gehörigen Bogen QU des zweiten, um das Bogenzweieck aus der Lage RS in die Lage $R'S'$ zu bringen; der Punkt S als ein Punkt des kleineren Cardanischen Kreises bewegt sich hierbei in einem Durchmesser des grösseren, d. h. in der Geraden AC. In ganz gleicher Weise kann dann weiter das Bogenzweieck RS bei beständiger Berührung mit allen 3 Seiten des umliegenden Dreiecks ABC durch Abwälzung des Bogens PWQ auf dem Bogen UT aus der Lage $R'S'$ in die Lage $R''S''$; endlich durch Abwälzung des Bogens QVP auf dem Bogen TQ in die der ursprünglichen Lage RS gerade entgegengesetzte gelangen. Die Polbahn des Bogenzweiecks ist also ein ihm ähnliches Bogenzweieck, dessen grosse Axe die kleine des gegebenen ist; die Polbahn des Dreiecks ist ein Bogendreieck, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des gegebenen Dreiecks liegen. Einer vollen Umdrehung des Bogenzweiecks im Dreieck entspricht eine dreimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Dreiecks, die dabei 2 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird; einer vollen Umdrehung des Dreiecks um das Bogenzweieck entspricht eine zweimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Bogenzweiecks, die dabei 3 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird.

Hieraus und mit Rücksicht auf die im vorigen §. angestellte Untersuchung der Bahnen, die von den mit den Cardanischen Kreisen verbundenen Punkten gegenseitig beschrieben werden, ergiebt sich, dass die Punkte des Bogenzweiecks gegen das Dreieck in sich zurücklaufende Curven beschreiben, die aus je 6 Ellipsenbögen (in besonderen Fällen in Kreisbögen oder gerade Linien übergehend) bestehen. Von denselben sind besonders bemerkenswerth die Bahnen von Punkten, die in der kleinen oder grossen Axe PQ resp. RS des Bogenzweiecks oder in den Verlängerungen derselben liegen; sie sind symmetrisch gegen die Mittellinien AQ, BT, CU des Dreiecks ABC. Die Grundfigur der Bahnen solcher Punkte, die in der Geraden PQ des Bogenzweiecks liegen, ist das gleichseitige Dreieck QTU, von den Punkten P und Q selbst beschrieben; die Grundfigur der Bahnen von Punkten in RS ist die von den Punkten R



und *S* selbst beschriebene Bahn *SS'S''RR'R''S*, bestehend aus 3 geradlinigen Strecken *SS'*, *S''R*, *R'R''*, die durch 3 (in Fig. 11 nicht gezeichnete) Ellipsenbögen *S'S''*, *RR'*, *R''S* verbunden werden. Alle Punkte im Innern der geschlossenen Polbahn *PVQWP* durchlaufen verschlungene (sich selbst schneidende), je 3 Schleifen bildende Curven; die Bahn des Mittelpunktes *M* erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber zweimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.

Die Punkte des Dreiecks beschreiben gegen das Bogenzweieck in sich zurücklaufende Curven, die aus je 6 Cardioidenbögen bestehen. Von denselben sind diejenigen, die von Punkten der (beliebig verlängert gedachten) Mittellinien *AQ*, *BT*, *CU* des Dreiecks beschrieben werden, symmetrisch in Beziehung auf die Axen *PQ*, *RS* des Bogenzweiecks; und diejenigen, welche von Punkten im Innern der Polbahn *QTU* des Dreiecks beschrieben werden, sind verschlungene, je 2 Schleifen bildende Curven. Die Bahn des Mittelpunktes *M'* erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber dreimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.* —

Ebenso hier, wie auch in anderen Fällen, in denen die Polbahnen Mittelpunkte haben (dieselben, wie *M* und *M'* in Fig. 11, als Durchschnittspunkte von Mittellinien der Polbahnen verstanden), sind von den unendlich vielen Punktbahnen, die von Punkten der beweglichen Figur gegen die ruhende beschrieben werden, besonders folgende (mit ihren Reuleaux'schen Benennungen) bemerkenswerth:

1) die gemeine Form der Punktbahnen, d. i. die Bahn irgend eines Punktes der beweglichen Polbahn selbst;

2) die concentrirte Form, d. i. die Bahn des Mittelpunktes der beweglichen Polbahn;

3) die homocentrischen Punktbahnen, nämlich diejenigen, welche durch den Mittelpunkt der ruhenden Polbahn hindurch gehen, und welche von den Punkten der concentrirten Bahnform des umgekehrten, d. h. des Profilpaares beschrieben werden, bei dem das vorher ruhende zum beweglichen Profil gemacht ist.

---

* Auf Tafel I zu Reuleaux's „theoretischer Kinematik" sind verschiedene solcher Punktbahnen des Bogenzweiecks und des Dreiecks verzeichnet.



§. 14. Figuren von constanter Breite als Elementenprofile.

Von grösserer Wichtigkeit als Profile von Elementen zwangläufiger höherer Paare sind Figuren von constanter Breite, d. h. Figuren, die bei beliebiger Drehung zwischen zwei in bestimmtem Abstande parallelen Geraden beständig von denselben in einer stetigen Folge von je zwei Punkten berührt werden können. Eine solche Figur kann auch von allen Seiten eines Rhombus in einer stetigen Folge von je 4 Punkten beständig berührt werden, und indem dabei der letztere und die fragliche Figur einander stets gegen Schiebung stützen, müssen (nach §. 11) die Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden, je zwei derselben also, den Berührungspunkten der gegenüber liegenden Seiten des Rhombus zugehörig, zusammenfallen; die fragliche Figur und der sie einschliessende Rhombus können als Profile eines zwangläufigen Elementenpaars dienen.

Figuren von constanter Breite b sind u. A. aus Kreisbögen von einerlei Halbmesser b zu bilden so, dass von je zwei die Figur berührend zwischen sich fassenden parallelen Geraden stets die eine einen solchen Kreisbogen berührt und die andere durch den eine Ecke der Figur bildenden Mittelpunkt des zugehörigen Kreises geht; die Entfernung dieser Geraden ist dann immer $= b$, und die beiden Stütznormalen fallen zusammen. Diesen Bedingungen entspricht insbesondere ein reguläres Bogen-$n$eck von ungerader Seitenzahl, d. h. eine Figur, welche von Kreisbögen gebildet wird, die aus den Ecken eines regulären $n$ecks ungerader Seitenzahl als Mittelpunkten über den gegenüber liegenden Seiten als Sehnen beschrieben sind. Wenn z. B. bei dem regulären Bogenfünfeck

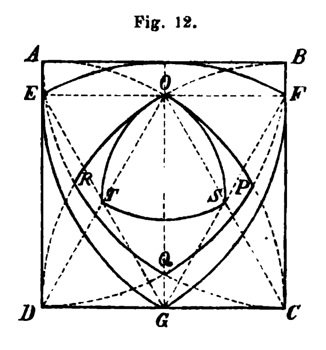
$$\begin{matrix} & A & \\ E & & B \\ & D \quad C & \end{matrix}$$

die eine der beiden parallelen Geraden den aus C mit dem Halbmesser b beschriebenen Bogen EA in A berührt, so berührt die andere den aus A mit dem Halbmesser b beschriebene Bogen CD in C; wird die erste um A rechts herum gedreht bis sie den aus D mit dem Halbmesser b beschriebenen Bogen AB in A berührt, so wälzt sich die andere auf dem Bogen CD ab bis zur Berührung in D; einer Wälzung der ersten auf dem Bogen AB entspricht dann eine Drehung der zweiten um D bis zur Berührung des aus B mit dem Halbmesser b beschriebenen Bogens DE u. s. f.

Als Beispiel werde der einfachste Fall näher betrachtet, dass das Bogen-$n$eck ein Bogendreieck und der Rhombus ein Quadrat ist, also das Elementenprofilpaar:

Gleichseitiges Bogendreieck im Quadrat. Die Seite des Quadrats $ABCD$ (Fig. 12) ist = dem Halbmesser b der Seiten des Bogendreiecks EFG = der Seitenlänge des Sehnendreiecks EFG des letzteren. In der gezeichneten Lage beider Figuren, bei welcher eine Seite EF des Sehnendreiecks mit zwei Seiten AB, CD des Quadrats parallel ist und die gegenüberliegende Ecke G des Dreiecks im Mittelpunkte der einen CD dieser Quadratseiten liegt, ist der Mittelpunkt O von EF der Durchschnittspunkt der 4 Stütznormalen, also der Pol. Wird das Bogendreieck bei beständiger Umschliessung durch das Quadrat etwa links herum gedreht, bis FG gegen BC so liegt wie in der Figur EF gegen AB und somit auch E mit dem Mittelpunkte von AD zusammenfällt, was eine Drehung um den Winkel $GFC = 30^0$ erfordert, so bewegt sich E auf AD, G auf DC, also die Strecke EG im rechten Winkel ADC, und es ist also (§. 12) die Bewegung identisch mit dem Rollen eines Kreises vom Durchmesser $EG = DO = b$ als Polbahn der Strecke oder des Bogendreiecks in einem Kreise vom Halbmesser b als Polbahn des Winkels oder des Quadrats, ersterer (von welchem OS in Fig. 12 ein Bogen ist) aus dem Mittelpunkte T von EG, letzterer (von welchem OP in Fig. 12 ein Bogen ist) aus D als Mittelpunkt beschrieben. Aus der neuen Lage kann dann das Bogendreieck in gleichem Sinne weiter gedreht werden bis (abermals nach einer Drehung von 30^0) EG gegen DC so liegt wie in der Figur EF gegen AB u. s. f. So ergiebt sich schliesslich, dass die Polbahn des Bogendreiecks ein auch gleichseitiges Bogendreieck OST ist, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des dem gegebenen Bogendreieck zugehörigen Sehnendreiecks liegen, und dass die Polbahn des Quadrats ein gleichseitiges Bogenviereck $OPQR$ ist, beschrieben aus den Ecken des gegebenen Quadrats als Mittelpunkten mit seiner Seitenlänge als Halbmesser. Um bei stetiger Bewegung die ursprüngliche gegenseitige Lage beider Figuren wieder herbeizuführen, ist die $\frac{360}{30} = 12$malige Abwälzung einer Seite der einen auf einer Seite der anderen Polbahn erforderlich; der Berührungspunkt beider muss also die

Fig. 12.



3seitige Polbahn des Bogendreiecks 4mal, die 4seitige des Quadrats 3mal durchlaufen. Die Punktbahnen sind wieder aus Ellipsenbögen resp. aus Cardioidenbögen zusammengesetzt.* —

Figuren von constanter Breite b können allgemeiner aus Kreisbögen so gebildet werden, dass die Mittelpunktswinkel von je zwei gegenüberliegenden derselben Scheitelwinkel sind, und die Summe ihrer Halbmesser $= b$ ist. Wenn einer dieser Halbmesser $= 0$, also der andere $= b$ ist, so ist der eine Bogen zu einem Eckpunkt der Figur und zugleich zum Mittelpunkt des anderen Bogens zusammengeschrumpft, wie es bei den zuvor besprochenen regulären Bogenpolygonen durchweg der Fall ist. Werden eine solche Figur und ein dieselbe umschliessender Rhombus als Profile eines Elementenpaares benutzt, so sind die Polbahnen nach wie vor aus Bögen Cardanischer Kreise zusammengesetzt, indem dann, wie schon im §. 12 allgemein nachgewiesen wurde, die gegenseitige Bewegung in ihren einzelnen Theilen immer auf die einer gewissen Strecke der einen in einem gewissen Winkel der anderen Figur zurückgeführt werden kann. Beispielsweise können dergleichen Figuren von constanter Breite aus einem gleichschenkligen Dreieck GSG' (Fig. 13—15) auf verschiedene Art hervorgehen wie folgt.

Sind die gleichen Seiten SG, SG' kleiner, als die dritte Seite GG' (Fig. 13), so entspricht der Forderung das Bogenviereck, welches gebildet

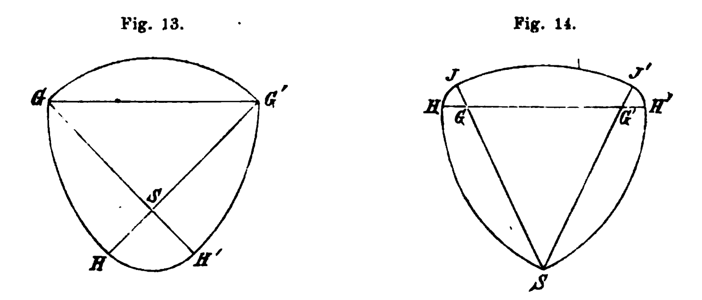


Fig. 13. Fig. 14.

wird von den Kreisbögen GH aus G', $G'H'$ aus G, GG' und HH' aus S beschrieben: $b = GG' = GH' = G'H$.

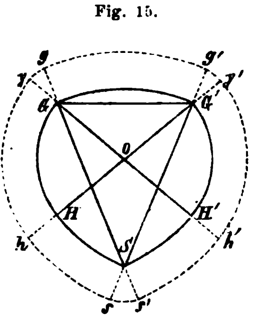
Sind die gleichen Seiten SG, SG' grösser, als die dritte Seite (Fig. 14), so kann ein Bogenfünfeck von constanter Breite b gebildet werden durch die Kreisbögen SH aus G', SH' aus G, HJ aus G, $H'J'$ aus G', JJ' aus S beschrieben, und ist dann $b = HH' = SJ = SJ'$. — Oder auch, wenn

* Siehe Reuleaux's „theoretische Kinematik“, Tafel II.



GOG' (Fig. 15) ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen gleiche Seiten OG, OG' halb so lang wie die des Dreiecks GSG' sind, kann ein der Aufgabe entsprechendes Bogenfünfeck gebildet werden durch die Bögen SH aus G', SH' aus G, GG' aus S, und endlich, da hiernach $OG = OG' = OH = OH'$ ist, durch die aus O beschriebenen Bögen GH und $G'H'$; es ist dann $b = SG = SG' = GH' = G'H$.

Fig. 15.



Endlich kann die solcher Weise erhaltene Figur von constanter Breite b in eine Figur von constanter Breite $= b + 2x$ transformirt werden dadurch, dass bei unveränderten Mittelpunkten die Halbmesser aller Kreisbögen um x vergrössert, etwaige Eckpunkte also überhaupt durch Kreisbögen vom Halbmesser x ersetzt werden. So geht z. B. aus dem Bogenfünfeck $GG'H'SH$ von constanter Breite b in Fig. 15 das daselbst punktirte Bogenachteck $gg'\gamma'h's'sh\gamma$ von constanter Breite $= b + 2x$ hervor, wenn $Gg = G'g' = G'\gamma' = \ldots = G\gamma = x$ ist.

β. Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen.

§. 15. Allgemeine Hülfssätze und Vorbemerkungen.

Während die in den vorigen Paragraphen unter α. behandelte Aufgabe, betreffend die Ermittelung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, insofern eine ganz bestimmte war, als die gegebenen Elemente eines selbständig geschlossenen zwangläufigen Paares eine bestimmte gegenseitige Beweglichkeit derselben bedingen, kann umgekehrt eine gewisse gegenseitige Beweglichkeit der Elemente eines Paares im Allgemeinen durch unendlich viele verschiedene Formen derselben bewirkt werden, und wird deshalb auch die hier unter β. jetzt vorliegende Aufgabe zu einer bestimmten erst durch gewisse willkürliche Annahmen oder durch Bedingungen, denen die gesuchten Elementenprofile ausser ihrer Zugehörigkeit zu gegebenen Polbahnen genügen sollen. Damit sind dann auch verschiedene zum Ziele führende Methoden zu unterscheiden, die aber alle auf dem einen oder anderen der folgenden aus dem Vorhergehenden bekannten, die Elementenprofile charakterisirenden Sätze beruhen:

1) **Jedes der beiden Profile ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere nach und nach einnimmt, wenn die mit**

ihm verbundene Polbahn auf der mit ersterem verbundenen Polbahn rollt.

2) Die gemeinschaftliche Normale der beiden Profile in einem Berührungspunkt derselben geht durch den Pol, d. h. durch den Berührungspunkt der beiden Polbahnen.

Die Elementenprofile werden hier nur mit Rücksicht auf einen einzigen Berührungspunkt betrachtet, abgesehen von den übrigen oder von sonstigen Hülfsmitteln, die nöthig sind, um das betreffende Elementenpaar zu einem zwangläufig geschlossenen zu machen. Entsprechende Punkte der beiden Profile oder der beiden Polbahnen sollen solche Punkte derselben heissen, mit denen sie bei ihrer gegenseitigen Bewegung zur Berührung kommen.

Zur Vermeidung wiederholter Erklärungen werden in den folgenden Paragraphen die Polbahnen stets mit B und B', ihr augenblicklicher Berührungspunkt (der Pol) mit P, die zu B und B' gehörigen Profile beziehungsweise mit F und F', ihr augenblicklicher Berührungspunkt mit p bezeichnet. Entsprechende Punkte der beiden Profile seien a und a', b und b', c und c' . . . ., entsprechende Punkte der Polbahnen seien α und α', β und β', γ und γ' . . .; und zwar seien a und a' die Punkte, mit denen sich F und F' dann berühren, wenn B und B' sich mit den Punkten α und α' berühren, b und b' die entsprechenden Punkte von F, F', die in gleicher Weise den entsprechenden Punkten β und β' von B, B' entsprechen u. s. f. Indem nun nach obigem Satze unter 2), wenn sich die Profile mit entsprechenden Punkten a, a' berühren, ihre Normalen für diese Punkte, die entsprechende Normalen heissen sollen, zusammenfallend durch den Pol gehen, in welchem dann zugleich die entsprechenden Punkte α, α' der Polbahnen liegen und letztere eine gemeinsame Tangente haben, also von jenen zusammenfallenden Normalen unter gleichen Winkeln geschnitten werden, ergiebt sich der allgemeine Satz:

3) Entsprechende Normalen der Profile schneiden die zugehörigen Polbahnen in entsprechenden Punkten derselben unter gleichen Winkeln, und es sind die zwischen den Profilen und ihren Polbahnen enthaltenen Strecken dieser entsprechenden Normalen gleich lang. —

Sollten die Elementenprofile eine rein rollende Bewegung gegen einander haben, so müsste ihr Berührungspunkt p immer mit dem Pol P zusammenfallen, die Elementenprofile müssten also mit den Polbahnen, die Oberflächen der Elemente mit ihren Axoiden identisch sein. Letztere, materiell ausgeführt, wären zu dem Ende durch eine hinlänglich grosse Kraft



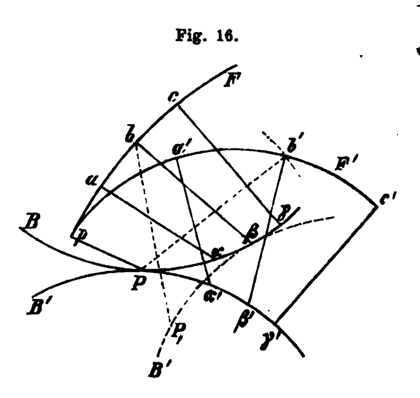
gegen einander zu pressen, um durch die entsprechende Reibung das Gleiten zu hindern; ein Specialfall, der bei sogenannten **Reibungsrädern** verwirklicht ist.

Von praktischem Interesse ist die Bestimmung der Elementenprofile für gegebene Polbahnen besonders hinsichtlich der **Zahnprofile** von Zahnrädern, deren gegebene Polbahnen, hier sogenannte **Theilrisse**, um feste Punkte in ihrer gemeinsamen Ebene drehbar sind. Die Willkürlichkeit der Annahmen, durch welche, wie oben bemerkt, die Aufgabe erst bestimmt und welche in allen Fällen praktisch beschränkt wird durch die Forderung, dass keins der Profile eine Spitze oder gar Schleife bilden oder das andere in irgend einer Lage ausser der Berührung zugleich schneiden darf, wird im Falle der Zahnprofile noch durch weitere praktische Rücksichten eingeschränkt, oder es werden wenigstens die benutzbaren Profiltheile dadurch beschränkt, z. B. durch die Forderung eines nach Grösse und Richtung nur wenig veränderlichen Drucks der Zähne aufeinander, einer nur mässig grossen Differenz der miteinander in Berührung kommenden Bogenlängen beider Profile (dem Betrag ihrer gegenseitigen Gleitung entsprechend) u. s. f. Die Berücksichtigung dieser und anderer Nebenbedingungen gehört theils in das Gebiet des Maschinenbaues, theils in andere Abschnitte dieses Buches.

§. 16. Bestimmung des einen Profils zu dem gegebenen anderen.

Wenn das Profil F bezüglich auf seine Gestalt und Lage gegen die Polbahn B gegeben ist, und das der anderen Polbahn B' zugehörige Profil F' in der Lage gezeichnet werden soll, in der sich B und B' im Punkte P berühren (Fig. 16), so ist ein Punkt des Profils F', nämlich sein Berührungspunkt mit F, der Fusspunkt p des von P auf F gefällten Perpendikels gemäss dem Satze unter 2) im vorigen §. Um aber den einem beliebigen Punkte b von F entsprechenden Punkt b' von F' zu finden, werde $b\beta$ normal zu F gezogen bis zum Schnittpunkte β mit B, und der Bogen $P\beta'$ von B' dem Bogen $P\beta$ von B gleich gemacht (durch Abtragung hinlänglich kleiner Sehnen); dem vorigen §. unter 3) zufolge muss dann b' in dem

Fig. 16.



Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte β' mit dem Halbmesser βb beschrieben wird. Zeichnet man ferner die Polbahn B' in der Lage B_1', in der sie mit ihrem Punkte β' die Polbahn B im Punkte β derselben berührt, so ist, wenn der Bogen βP_1 von $B_1' =$ dem Bogen $\beta' P$ von B' ist, P_1 der Ort des Punktes P von B', der dem Orte b des Punktes b' entspricht, und muss folglich für die Lage, in der sich die Polbahnen in P berühren, der Punkt b' auch in dem Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte P mit dem Halbmesser $P_1 b$ beschrieben wird. Auf solche Weise können beliebig viele, gewissen Punkten a, b, c . . . von F entsprechende Punkte a_1', b', c' . . . von F' als Schnittpunkte von je zwei Kreisen erhalten werden, von denen die einen aus gewissen durch a, b, c . . . bestimmten Punkten α', β', γ' . . . von B', die anderen aus dem Punkte P, und zwar mit Halbmessern beschrieben werden, die in der dargelegten Weise gleichfalls durch die Punkte a, b, c . . . bestimmt sind.

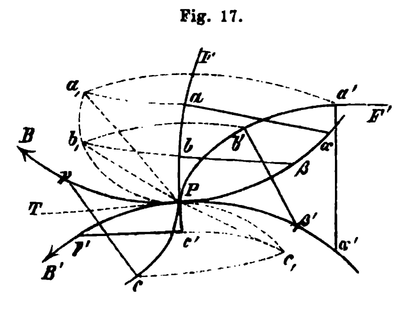
Nach dem Satze 3) im vorigen §. können auch, nachdem die Normalen $a\alpha$, $b\beta$ . . . von F gezogen und die Bögen $P\alpha'$, $\alpha'\beta'$ . . . von B' den Bögen $P\alpha$, $\alpha\beta$ . . . von B gleich gemacht sind, von α', β' . . . aus die Geraden $\alpha'a'$, $\beta'b'$ . . . so gezogen werden, dass sie die Polbahn B' unter denselben Winkeln schneiden, unter denen die Polbahn B beziehungsweise von $a\alpha$, βb . . . geschnitten wird, wonach dann nur $\alpha'a' = a\alpha$, $\beta'b' = \beta b$ . . . zu machen ist, um die Punkte a', b' . . . von F' als die entsprechenden der Punkte a, b . . . von F zu erhalten.

Diese beiden Verfahrungsweisen, welche das Profil F' als Punktcurve (Ort gewisser Punkte) bestimmen, sind indessen zeitraubend und lästig, besonders im allgemeinen Falle beliebiger (nicht kreisförmiger) Polbahnen. Leichter kann es als Umhüllungscurve mit beliebiger Annäherung gefunden werden, wenn, wie gewöhnlich, nicht zugleich die Ermittelung bestimmter, nämlich derjenigen Punkte desselben bezweckt wird, die gewissen Punkten des anderen Profils entsprechen. Nichts wäre freilich an Leichtigkeit und Genauigkeit der Ausführung gewonnen, wenn man gemäss dem allgemeinen Satze unter 1) im vorigen §. die Polbahn B sammt dem zugehörigen Profil F nach und nach so verzeichnete, dass sie mit verschiedenen, nahe zusammen liegenden Punkten α, β, γ . . . die Polbahn B' in den entsprechenden Punkten α', β', γ' . . . berührt, um so F' als Umhüllungslinie aller dieser Lagen von F zu erhalten. Wesentlich einfacher ist es aber, in nahe bei einander liegenden Punkten a, b, c . . . (Fig. 16) die Normalen von F zu ziehen bis zu den Schnittpunkten α, β, γ . . . mit B, dann die Bögen $P\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$ . . . von B' den Bögen $P\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ . . . von B gleich zu machen, aus α', β', γ' . . . als Mittelpunkten mit den Halbmessern $a\alpha$, βb,

γc . . . Kreisbögen zu beschreiben und deren Umhüllungscurve zu zeichnen. Letztere ist das gesuchte Profil F' mit einer Annäherung, die derjenigen entspricht, mit welcher F als Umhüllungslinie der aus α, β, γ . . . mit den Halbmessern αa, βb, γc . . . beschriebenen Kreise sich verzeichnen lässt, und die somit durch Vervielfältigung der angenommenen Punkte a, b, c . . . beliebig gesteigert werden kann. —

Von sogenannten Zahnprofilen F, F', deren Polbahnen (Theilrisse) B, B' um feste Punkte A, A' in ihrer gemeinsamen Ebene E drehbar sind, kann das eine F' durch die Punkte a', b', c' . . . desselben, die gewissen Punkten a, b, c . . . des gegebenen anderen entsprechen, sehr zweckmässig auch durch Vermittelung der entsprechenden Eingriffspunkte, d. h. derjenigen Punkte $a_,$, $b_,$, $c_,$ . . . der Ebene E gefunden werden, in denen sich die Punkte a, b, c . . . des gegebenen Profils F befinden, wenn es in ihnen von dem gesuchten Profil F' berührt wird. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, dass die Theilrisse, auch wenn sie nicht kreisförmig sind, sich beständig in der Geraden AA' berühren, weil ihre gegenseitige Rollung in einer Folge von elementaren Drehungen um ihre jeweiligen Berührungspunkte P besteht, diese aber nur dann die Resultirenden elementarer Drehungen um A und A' sein können, wenn jedes P in der Geraden AA' liegt. Wenn sich nun F und F' mit den entsprechenden Punkten a, a' im Punkte $a_,$ (Fig. 17) der Ebene E berühren, B und B' also mit den entsprechenden Punkten α, α' im Pol P, der gefunden wird durch Abtragung der Strecke $AP = A\alpha$ auf der Geraden AA', so sind die entsprechenden Normalen $a\alpha$ und $a'\alpha'$ von F und F' in die Lage $a_,P$ gekommen; es ist also $a_,$ der Durchschnittspunkt des aus A mit dem

Fig. 17.



Halbmesser Aa und des aus P mit dem Halbmesser αa beschriebenen Kreises, so dass, wenn hiernach $a_,$ construirt ist, dann auch a' als Durchschnittspunkt des aus A' mit dem Halbmesser $A'a_,$ und des aus α' mit dem Halbmesser αa beschriebenen Kreises gefunden werden kann. Ebenso sind in Fig. 17, worin die Theilrisse B, B' als Kreise (Theilkreise) angenommen sind, so dass P eine unveränderliche Lage in AA' hat, die den Punkten b, c von F entsprechenden Punkte $b_,$, $c_,$ der Eingriffslinie (d. i. des Ortes der Eingriffspunkte) $a_,b_,Pc_,$ und damit die entsprechenden Punkte b', c' des Profils F' construirt worden.

Die Eingriffslinie lässt erkennen, wie sich die Richtung des Zahndrucks nach und nach ändert: in Fig. 17, wenn F das getriebene, F' das treibende Zahnprofil und PT gemeinsame Tangente der hier kreisförmigen Theilrisse ist, von $o_{,}P$ durch PT und $Pb_{,}$ bis $Pa_{,}$, während der Angriffspunkt (Berührungspunkt) sich längs F von c bis a, längs F' von c' bis a' bewegt. Die gegenseitige Bewegung der Profile ist (wie immer bei Ausschluss der im vorigen §. erwähnten Reibungsräder) eine theils rollende, theils gleitende; der Betrag des Gleitens ist auf der einen Seite von $AA' = Pc - Pc'$, auf der anderen $= Pa' - Pa$. —

Aus dem Satze unter 3) im vorigen §. folgt, dass, wenn das gegebene Profil seine Polbahn schneidet, auch das andere seine Polbahn und zwar unter demselben Winkel schneidet. Die betreffenden Durchschnittspunkte sind entsprechende Punkte der beiden Profile und zugleich der beiden Polbahnen, indem die einen und die anderen sich in diesen Punkten berühren, während letztere mit dem Pol zusammenfallen: siehe Fig. 17, woselbst die Profile, wie bei Zahnprofilen üblich, ihre Polbahnen rechtwinklig schneiden.

Ist die Polbahn B selbst als das eine Profil F gegeben, so ist die andere Polbahn B' das zugehörige Profil F'.

Ist das Profil F als ein Punkt gegeben, so ist F' die Bahn dieses Punktes beim Rollen von B auf B'. Bei Zahnrädern entspricht diesem Specialfalle die sogenannte Punktverzahnung.

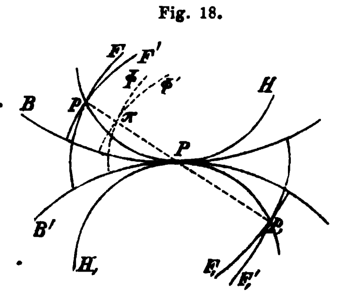
§. 17. Methode der Hülfspolbahnen.

Wenn, während die beiden Polbahnen B und B' vorbehaltlich ihres gegenseitigen Rollens auf einander sich übrigens beliebig in ihrer gemeinsamen Ebene E bewegen, zugleich ein Punkt p in dieser Ebene sich so bewegt, dass die entsprechenden Elemente seiner relativen Bahnen gegen B und gegen B' stets senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Berührungspunkte P von B und B' gerichtet sind, dass also stets seine elementare Bewegung gegen B in der Drehung um einen gewissen Punkt m, gegen B' in der Drehung um einen gewissen Punkt m' der Geraden Pp besteht, so sind die relativen Bahnen von p gegen B und B' entsprechende Profile F und F' gemäss dem die letzteren charakterisirenden Satze unter 2) in §. 15. Hierauf beruht das Verfahren der Verzeichnung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen vermittels sogenannter Hülfspolbahnen, und zwar entspricht dasselbe dem besonderen Falle, dass die Pole m, m' für die

relativen Bewegungen des beschreibenden Punktes p gegen die Polbahnen B und B' beständig mit dem Pol P für die gegenseitige Bewegung der letzteren zusammenfallen. Unter einer **Hülfspolbahn** wird nämlich eine Linie H verstanden, welche, während die beiden gegebenen Polbahnen B, B' auf einander rollen, in solcher Weise mitrollt, dass sie B und B' beständig in ihrem Berührungspunkte, dem Pol P, berührt. Die elementaren relativen Bewegungen irgend eines mit einer solchen Linie H fest verbundenen Punktes p gegen B und B' sind elementare Drehungen verschiedener Grösse um den Pol P, so dass die relativen Bahnen F und F' von p gegen B und B' als zugehörige Elementenprofile dienen können.

Liegt H ausserhalb B und B' auf der Seite von B, d. h. B zwischen B' und H (Fig. 18), und liegt p in H selbst oder jenseits H (H zwischen B und p), so liegen F und F' ganz auf denselben Seiten von B und B', so dass auf den Gegenseiten Raum für weitere Profile $F_{,}$ (mit B verbunden) und $F'_{,}$ (mit B' verbunden) bleibt, die vermittels einer zweiten Hülfspolbahn $H_{,}$ und eines damit verbundenen Punktes $p_{,}$ unter solchen Umständen beschrieben werden, dass $H_{,}$ auf dieser anderen Seite ausserhalb B und B' (Fig. 18). und der Punkt $p_{,}$ entweder in $H_{,}$ selbst oder jenseits $H_{,}$ ($H_{,}$ zwischen B' und $p_{,}$) liegt. Wenn insbesondere, wie in Fig. 18, p in H, $p_{,}$ in $H_{,}$ selbst liegt, so erreichen die Profile F und $F_{,}$ die Polbahn B von entgegengesetzten Seiten unter rechten Winkeln, ebenso F' und $F'_{,}$ die Polbahn B', und es können dann F und $F_{,}$, F' und $F'_{,}$ je zu einem einzigen stetig (ohne Knick) zusammenhängenden Profil vereinigt werden.

Fig. 18.



Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur **Profilirung der Zähne gewöhnlicher Zahnräder** mit kreisförmigen Polbahnen (Theilkreisen) benutzt man auch Kreise, die sogenannten **Radkreise**, als Hülfspolbahnen, so dass die Profile, von je einem Punkte dieser Radkreise selbst beschrieben, auf den einen Seiten der Theilkreise Epicykloiden, auf den anderen Seiten Hypocykloiden sind. Wenn solcher Weise die Zähne von mehr als zwei Rädern mit Hülfe derselben Radkreise (allgemein vermittels derselben Hülfspolbahnen) profilirt werden, so bilden dieselben eine Gruppe, einen sogenannten Satz, wovon je zwei zu einem Elementenpaar combinirt werden können. Solche Räder heissen deshalb **Satzräder**. Sollte nur eins derselben, R, mit jedem der übrigen R', R'' . . . zu richtigem Eingriff ge-

bracht werden können, so dürften die beiden Hülfskreise H, $H_{\prime}$ verschieden sein, wenn nur mit Hülfe desselben Kreises H die Zähne von R innerhalb, die Zähne aller übrigen Räder ausserhalb des Theilkreises, und ebenso mit demselben Kreise $H_{\prime}$ die Zähne von R ausserhalb, die aller übrigen innerhalb des Theilkreises profilirt werden. Sollen aber je zwei dieser Räder zu einem Elementenpaar combinirt werden können, so müssen die Hülfskreise H, $H_{\prime}$ einander gleich sein.

Wenn die Hülfspolbahn zu einem einzelnen Punkt zusammenschrumpft, mit dem der beschreibende Punkt p zusammenfällt, so beschreibt dieser die Polbahnen B und B' selbst als zusammengehörige Profile.

Fällt die Hülfspolbahn H mit B zusammen, so reducirt sich F auf einen Punkt p, während F' die Bahn dieses Punktes beim Rollen von B auf B' ist. Ebenso wenn $H_{\prime}$ mit B' zusammenfällt, reducirt sich $F_{\prime}'$ auf einen Punkt $p_{\prime}$, während $F_{\prime}$ die Bahn des letzteren beim Rollen von B' auf B ist. Bei Zahnrädern entsteht so wieder die schon im vorigen §. erwähnte Punktverzahnung.

§. 18. Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

Aequidistante Curven sind solche, welche dieselben Krümmungsmittelpunkte, also dieselbe Evolute haben, oder welche Evolventen derselben dritten Curve sind, nur beschrieben von verschiedenen Punkten einer auf dieser Curve rollenden Tangente. Die Entfernung der beschreibenden Punkte ist die Entfernung der äquidistanten Curven, und gleichzeitige Oerter jener Punkte heissen entsprechende Punkte dieser Curven.

Sind nun zwei Profile F, F' für die Polbahnen B, B' nach irgend einem Verfahren gefunden, so können zwei Curven Φ und Φ' (Fig. 18) auch als Profile dienen, wenn Φ mit F, Φ' mit F' der Art äquidistant ist, dass für entsprechende Punkte p, π die Krümmungshalbmesser von F und Φ dieselbe constante Differenz haben wie die Krümmungshalbmesser von F' und Φ', und zwar in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, jenachdem F und F' in den entsprechenden Punkten, mit denen sie sich in p berühren, in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, d. h. auf derselben oder auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente liegen. Denn da die Normalen äquidistanter Curven für entsprechende Punkte zusammenfallen, so ist die gemeinsame Normale pP von F, F' stets auch gemeinsame Normale von Φ, Φ', geht also auch letztere beständig durch den Pol P.



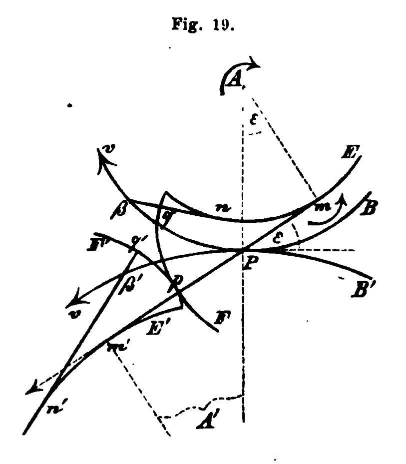
Die Ersetzung von Elementenprofilen durch Aequidistante geschieht bei Verzahnungen besonders dann, wenn das eine Profil ein Punkt ist; die Aequidistanten desselben sind concentrische Kreise um ihn als Mittelpunkt. Aus der Punktverzahnung geht so die Triebstockverzahnung hervor. Zu dem kreisförmigen Querschnitte eines solchen Triebstocks als Elementenprofil F der Polbahn B gehört als entsprechendes Profil F' der anderen Polbahn B' eine der beiden Umhüllungslinien aller Lagen, die der Kreis beim Rollen von B auf B' nach und nach einnimmt, und welche mit der dabei vom Mittelpunkte jenes Kreises beschriebenen Curve beiderseits in Entfernungen = dem Halbmesser des Kreises äquidistant sind.

Von demselben Princip war auch schon in §. 14 Gebrauch gemacht worden, um aus dem Elementenprofil $GG'H'SH$ (Fig. 15) ein anderes zu erhalten, bei dem die Ecken G, G', S durch Kreisbögen $g\gamma$, $g'\gamma'$, ss' ersetzt sind. — Allgemein wird eine Curve Φ als Aequidistante einer Curve F erhalten, indem sie als Umhüllungslinie von Kreisen gezeichnet wird, die aus den Punkten von F als Mittelpunkten mit gleichen Halbmessern beschrieben werden.

§. 19. Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Ausser den in den vorigen Paragraphen besprochenen allgemein gültigen Verfahrungsweisen der Bestimmung von Elementenprofilen zu gegebenen Polbahnen können in besonderen Fällen noch andere Methoden dazu dienen, von denen namentlich bei kreisförmigen Polbahnen eine bemerkenswerth ist, die auf folgender Erwägung beruht.

Fig. 19.



Es seien F, F' zwei Elementenprofile, die den (vorläufig beliebigen) Polbahnen B, B' entsprechen, und es sei E die Evolute von F, E' die Evolute von F' (Fig. 19). Wenn B' (mit F' und E') auf B rollt, so ist die durch den Pol P gehende Stütznormale (gemeinsame Normale von F und F' in ihrem Berührungspunkte) beständig zugleich gemeinsame Tangente von E und E', und indem ein gewisser Punkt p derselben gegen B die Curve F, gegen B' die Curve F' beschreibt, bewegt

sie sich wie ein die Evoluten E, E' verbindender gespannter Faden, der von der einen sich ab- und auf die andere sich aufwickelt, etwa längs den Bögen mn von E und $m'n'$ von E', während die Polbahnen B, B' mit den gleichen Bögen $P\beta$, $P\beta'$ auf einander rollen und der Berührungspunkt der Profile F, F' in F den Bogen pq, in F' den Bogen pq' durchläuft. Wenn sich also umgekehrt zwei Curven E, E' so verzeichnen liessen, dass beim Rollen von B, B' auf einander

1) ihre gemeinsame Tangente mm', nn' ... stets durch den Pol geht, und dass

2) immer $nn' = mm' \pm (arc.\, m'n' - arc.\, mn)$ ist, so würden als Elementenprofile irgend zwei Evolventen der Curven E, E' dienen können, die von demselben Punkte p ihrer gemeinsamen Tangente beschrieben werden.

Nun kann man der Bedingung 1) zwar immer leicht Genüge leisten, indem man durch je zwei entsprechende Punkte β, β' von B, B' gerade Linien von gleicher Neigung gegen B resp. B' zieht und E als Umhüllungslinie der durch die Punkte β, E' als Umhüllungslinie der durch die Punkte β' gezogenen Geraden verzeichnet. Indessen lässt sich nicht allgemein behaupten, dass diese Curven E, E' auch der Bedingung 2) entsprechen. Offenbar ist es aber dann der Fall, wenn die Polbahnen B, B' kreisförmig sind und von den durch je zwei ihrer entsprechenden Punkte β, β' gezogenen Geraden unter denselben gleichen Winkeln ε geschnitten werden, so dass die Umhüllungslinien E, E' der letzteren Kreise werden, die mit den Kreisen B, B' concentrisch sind und deren Halbmesser sich ebenso wie die der Kreise B, B' zu einander verhalten, indem sie beide im Verhältnisse $\cos \varepsilon$ kleiner sind; denn es ist dann offenbar immer $nn' = mm'$ und $arc.\, m'n' = arc.\, mn$, jeder dieser Bögen nämlich im Verhältnisse $\cos \varepsilon$ kleiner, als der entsprechende Abwälzungsbogen $P\beta = P\beta'$ der Polbahnen.

Bei Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen gelangt man auf solche Weise zur Evolventenverzahnung, die dadurch ausgezeichnet ist, dass die Eingriffslinie eine gerade Linie (die gemeinsame Tangente der mit den Theilkreisen B, B' concentrischen Hülfskreise E, E') und folglich immer die Richtungslinie des Zahndrucks ist, sowie auch dadurch, dass solche Evolventenzähne bei Veränderung der Axenentfernung der betreffenden Räder immer richtig profilirt bleiben (stets demselben Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten beider Räder entsprechend), indem dadurch nur der Winkel ε verändert wird und beide Theilkreise in demselben Verhältnisse, wie $\sec \varepsilon$, grösser oder kleiner werden. Satzräder sind in diesem Falle solche, deren Zähne für gegebene Axenentfernungen demselben Winkel ε entsprechend profilirt sind.



Während die Theilkreise B, B' um ihre festen Mittelpunkte A, A' in ihrer gemeinsamen Ebene sich drehen, so dass der in dieser Ebene unbewegliche Pol P in den beiden Theilkreisen mit derselben Geschwindigkeit v fortrückt, können die Profile F, F' auch als die relativen Bahnen betrachtet werden, die dabei beziehungsweise gegen B und B' ein Punkt p durchläuft, der in der ruhenden Ebene mit der Geschwindigkeit $v \cos \varepsilon$ in einer Geraden mPm' beweglich ist, die im Pol P die gemeinsame Tangente der Theilkreise unter dem Winkel ε schneidet. Die Fusspunkte m, m' der von den Mittelpunkten A, A' auf diese Gerade gefällten Perpendikel (die Berührungspunkte der Geraden mit den Hülfskreisen E, E') sind dabei beständig die Pole für die relativen Bewegungen des Punktes p beziehungsweise gegen B und B', sie haben also dieselben Bedeutungen wie die ebenso bezeichneten Punkte zu Anfang von §. 17. Wenn z. B. b und e die Halbmesser der Kreise B und E sind, so kann die geradlinige Bewegung des Punktes p mit der Geschwindigkeit $v \cos \varepsilon$ im Sinne mm' (Fig. 19) durch ein Paar von Drehungen ersetzt werden, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{v \cos \varepsilon}{e} = \frac{v}{b}$ um m und A im Sinne der in Fig. 19 beigesetzten Pfeile stattfinden, und da diese Drehung um A eben diejenige ist, welche der eigenen Bewegung des Theilkreises B in der festen Ebene zukommt, so entspricht die Drehung um m der relativen Bewegung von p gegen B. — Statt als Punktcurven durch die Bewegung eines Punktes p kann man die Profile F, F' auch als Umhüllungscurven durch die Bewegung einer Geraden entstanden denken, die mit der Normalgeschwindigkeit $v \cos \varepsilon$ in der festen Ebene sich so bewegt, dass sie gegen die Centrale AA' beständig unter dem Winkel ε geneigt, d. h. zu der Geraden mm' senkrecht bleibt. —

Die in ihren Durchschnittspunkten mit den Evolutenkreisen E, E' endigenden Evolventen F, F' können sich bei der Drehung der Theilkreise B, B' um ihre Mittelpunkte A, A' nur so lange berühren, als der Drehungs- oder Eingriffspunkt p in der Strecke mm' der Eingriffslinie liegt, da diese über m hinaus von F, über m' hinaus von F' unter spitzem Winkel geschnitten wird. Dadurch wird bei gegebenem Winkel ε die zulässige Verlängerung der Profile F, F' oder bei gegebenen Profillängen die zulässige Verkleinerung des Winkels ε begrenzt. Der Grenzfall ε = Null, für welchen E und E' beziehungsweise mit B und B' zusammenfielen, kann deshalb nicht verwirklicht werden, weil dabei die Strecke mm' = Null würde und die Profile F, F' auf Punkte der Theilkreise beschränkt werden müssten. Dem entgegengesetzten Grenzfalle $\varepsilon = 90^0$, in dem die Kreise E, E' sich auf ihre Mittelpunkte A, A' reduciren und die Profile F, F' in

die Theilkreise B, B' selbst übergehen, entsprechen wieder die sogenannten Reibungsräder (§. 15) als allgemeiner Grenzfall aller Profilirungsmethoden.

§. 20. Kreisbögen als angenäherte Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Im Falle von Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen, oder überhaupt im Falle von zwei Körpern, die als Elemente eines Elementenpaares um parallele Axen mit constantem Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse sich drehen sollen, entsprechend kreisförmigen Querschnitten ihrer cylindrischen Axoide als Polbahnen, während zwei dazu dienende Profile F, F' jene Drehungen nur für kleine Drehungswinkel zu vermitteln und deshalb nur kleine Längen zu erhalten brauchen, können dieselben annäherungsweise durch Kreisbögen ersetzt werden. Eine bemerkenswerthe dazu dienende, von Willis angegebene Methode beruht auf folgender Erwägung.

Es seien A, A' (Fig. 20) die festen Mittelpunkte der kreisförmigen Polbahnen, P ihr Berührungspunkt (der Pol), und in einer gewissen Lage C, C' die Mittelpunkte der als Profile F, F' zu benutzenden Kreisbögen. Diese wären genau richtige Profile, wenn ihre Centrale CC' als Stütznormale beständig durch P ginge; sie sind aber wenigstens näherungsweise richtig, wenn in einer gewissen Lage CC' durch P geht und sich zugleich so bewegt, dass dasselbe auch noch für eine unendlich wenig von jener verschiedene Lage der Fall ist. Dazu muss die fragliche Bewegung von CC' in der festen Ebene eine Drehung um irgend einen Punkt der in P auf CC' errichteten Senkrechten sein. Da sich aber thatsächlich CC' um den Schnittpunkt der Geraden dreht, die in C und C' auf den Bahnen dieser Punkte senkrecht sind, d. h. um den Schnittpunkt M der Geraden AC und $A'C'$,



so ergiebt sich die folgende Construction: Fig. 20.

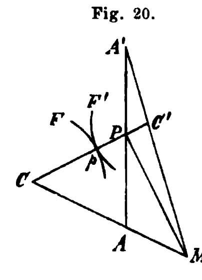


Fig. 20.

Von dem angenommenen Mittelpunkte C des einen Profils F ziehe CP, dann durch P die Gerade PM senkrecht zu CP bis zum Schnittpunkte M mit AC, endlich die Gerade MA'; diese schneidet die Gerade CP im Mittelpunkte C' des anderen Profils F'. Die Radien der um C und C' zu beschreibenden Kreisbögen F, F' können beliebig, wenn nur so angenommen werden, dass letztere sich berühren; diese Willkür entspricht dem nach §. 18 immer zulässigen Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

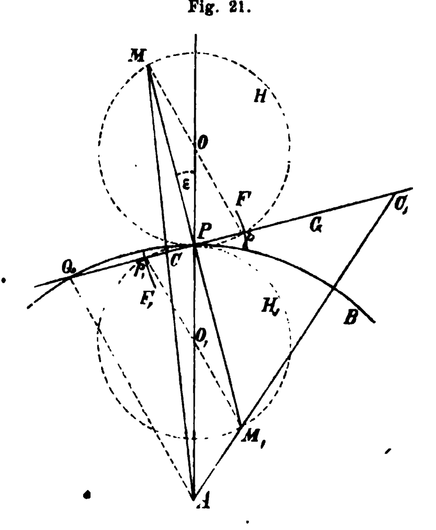


Bei der Anwendung dieses Profilirungsverfahrens auf Zahnräder, welche Satzräder sein sollen, ist zu bemerken, dass mit dem Rade, dessen Theilkreis den Mittelpunkt A' und den Halbmesser $A'P$, und dessen kreisförmiges Zahnprofil F' den Mittelpunkt C' und den Halbmesser $C'p$ hat (Fig. 20), jedes Rad zusammenarbeiten kann, dessen Theilkreismittelpunkt A in $A'P$, und dessen Profilmittelpunkt C (bei Berührung beider Profile in p) in der Geraden $C'Pp$ so liegt, dass die Gerade CA durch M geht. Somit werden angenähert richtige Satzräder erhalten, wenn bei ihrer Profilirung nach dem so eben erklärten Verfahren der Winkel APC und die zu einander senkrechten Strecken PM, Pp bei allen Rädern gleich angenommen werden.

Wird PM unendlich gross angenommen, so werden CA und $C'A'$ senkrecht zu CPC', und F, F' werden die Krümmungskreise im Berührungspunkte p der beiden Kreisevolventen, die von diesem Punkte der Geraden CC' beschrieben werden, jenachdem sie auf dem einen oder dem anderen zweier Kreise E, E' rollt, deren Mittelpunkte A, A' und deren Halbmesser AC, $A'C'$ sind. Die Kreisverzahnung ist dann eine Annäherung an die Evolventenverzahnung für die Eingriffslinie CPC'. Sofern es dabei am angemessensten ist, die Grenzlagen des Eingriffspunktes p auf entgegengesetzten Seiten von P anzunehmen (die Zähne vor und hinter der Centrale AA' auf einander wirken zu lassen), ist mit Willis $Pp = 0$ anzunehmen.

Sollen die Zähne ausserhalb und innerhalb des Theilkreises nach verschiedenen Kreisbögen so profilirt werden, dass die einen auf der einen, die anderen auf der anderen Seite der Centrale AA' zur Wirkung kommen (als Annäherung an die Cykloidalverzahnung mit Epicykloiden ausserhalb, Hypocykloiden innerhalb des Theilkreises), und wird verlangt, dass der äussere resp. innere Kreisbogen das richtige Zahnprofil eines Satzrades sei, wenn der Eingriffspunkt p resp. p_1 um $\frac{1}{n}$ resp. $\frac{1}{n_1}$ der gemeinschaftlichen Theilung t aller Satzräder vom Pol P entfernt ist, so ist wieder durch P die Gerade G (Fig. 21) unter dem angenommenen Winkel ε gegen die Tangente

Fig. 21.



im Punkte P des Theilkreises geneigt zu ziehen, darauf $Pp = \frac{1}{n} t$ und $Pp_{,} = \frac{1}{n_1} t$ abzutragen, $PM = PM_{,}$ senkrecht zu G zu ziehen, endlich der Mittelpunkt A des Theilkreises mit M und $M_{,}$ durch gerade Linien zu verbinden. In den Schnittpunkten C, $C_{,}$ dieser Geraden mit der Geraden G erhält man die Mittelpunkte, dann in den Strecken Cp, $C_{,}p_{,}$ die Halbmesser beziehungsweise des äusseren und des inneren Kreisbogens, welche letzteren dann nur noch durch Zusammenrückung ihrer Anfangspunkte in denselben Punkt des Theilkreises zum vollen Zahnprofil zu vereinigen sind. — Die Länge $PM = PM_{,}$ ist von der kleinsten Zahnzahl $= z$ irgend eines der Satzräder abhängig zu machen, oder von dem entsprechenden Theilrisshalbmesser

$$r = \frac{zt}{2\pi}$$

desselben. Wenn insbesondere für dieses kleinste Rad der innere Theil $F_{,}$ des Zahnprofils eine gerade Linie werden soll, so muss dabei $C_{,}$ im Unendlichen liegen, also der Winkel $PM_{,}A = 90^0$ sein, und somit

$$PM = PM_{,} = r \cos \varepsilon.$$

Willis nimmt $n = n_1 = 2$, somit $Pp = Pp_1 = \frac{1}{2} t$;

$$z = 12, \text{ somit } r = \frac{6}{\pi} t; \ \varepsilon = 15^0.$$

Dann ist, unter Q den zweiten Schnittpunkt der Geraden G mit dem Theilkreise B verstanden, der Winkel $PAQ = 30^0$, also bei dem 12zähnigen Rade der (von seiner Sehne nur wenig verschiedene) Bogen $PQ = t$, $p_{,}$ die Mitte von PQ, und folglich die innerhalb des Theilkreises geradlinige Zahnflanke dieses 12zähnigen Rades radial gerichtet. —

Sind H und $H_{,}$ zwei gleiche Kreise mit den Halbmessern $PO = PO_{,} = \frac{1}{2} r = \frac{3}{\pi} t$, den Theilkreis B auf entgegengesetzten Seiten in P berührend, so gehen sie (wegen $PM = PM_{,} = r \cos \varepsilon$) beziehungsweise durch M, $M_{,}$ und schneiden die Gerade G in den Punkten p, $p_{,}$ so,

dass die Winkel POp und $PO_{,}p_{,} = 2\varepsilon = 30^0$ sind,

und dass folglich $Pp = Pp_{,} = \frac{r}{2} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} t$ ist,

unter Pp, $Pp_{,}$ hier Bögen der Kreise H, $H_{,}$ verstanden, die aber von ihren in der Geraden G liegenden Sehnen nur sehr wenig verschieden sind. Daraus ergiebt sich folgende von Reuleaux angegebene Construction, bei der nur

$\frac{7}{8}t$ für $\frac{3}{\pi}t$ gesetzt ist. Man zeichnet die Hülfskreise H, $H_{,}$ mit dem Halbmesser $\frac{7}{8}t$ in Berührung mit dem Theilkreise B im Punkte P, macht die Winkel $POp = PO_{,}p_{,} = 30^0$, zieht $pp_{,}$ und durch die den Punkten p, $p_{,}$ diametral gegenüber liegenden Punkte M, $M_{,}$ der Hülfskreise die Geraden AM, $AM_{,}$. Letztere bestimmen in ihren Durchschnittspunkten C, $C_{,}$ mit der Geraden $pp_{,}$ die Mittelpunkte der mit den Halbmessern Cp, $C_{,}p_{,}$ zu beschreibenden Profilkreisbögen.

γ. Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen.

§. 21. Allgemeine Regeln.

Es seien B und B' die Polbahnen (die sogenannten Theilrisse im Falle von Zahnrädern), A und A' die Punkte, um welche sie in ihrer gemeinsamen Ebene E mit den (im Allgemeinen veränderlichen) Winkelgeschwindigkeiten ω und ω' drehbar sein sollen; Q und Q', R und R' . . . entsprechende, d. h. solche Punkte der Polbahnen, mit denen sie im jeweiligen Pol P zu gegenseitiger Berührung kommen, r und r' entsprechende Fahrstrahlen der Polbahnen, wie AQ und $A'Q'$, AR und $A'R'$ . . ., φ und φ' die Winkel (Polarwinkel), welche irgend zwei entsprechende Fahrstrahlen mit zwei bestimmten entsprechenden Fahrstrahlen (Polaraxen) so bilden, dass von letzteren aus gerechnet jeder dieser Winkel in dem entgegengesetzten Sinne wächst, als in welchem ω resp. ω' positiv gesetzt wird.

Die relative Bewegung von B' gegen B wird als Bewegung in der Ebene E erhalten, indem zu den Bewegungen beider Polbahnen noch eine gemeinschaftliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ um A hinzugefügt und dadurch B in der Ebene E zur Ruhe gebracht wird. Die relative Bewegung von B' gegen B ist also die Resultante zweier Drehungen beziehungsweise um A und A', somit eine Drehung um einen gewissen (mit ω und ω' im Allgemeinen veränderlichen) Punkt der Geraden AA'; indem sie aber auch als Rollen von B' auf B in einer Drehung um den jeweiligen Pol P besteht, so folgt (wie schon im §. 16 bemerkt wurde), dass der Berührungspunkt P der Polbahnen beständig in der Geraden AA' liegen muss. Hiernach fallen auch entsprechende Fahrstrahlen gleichzeitig in die Gerade AA', und werden die zugehörigen Polbahnen unter gleichen Winkeln von ihnen geschnitten; entsprechende Polarwinkel φ, φ' der letzteren

im Punkte

$$Pp_1 = \frac{1}{n_1} t$$

Mittelpunkt
binden. In d
erhält man di
beziehungswei
dann nur noch
Punkt des Thei
Länge $PM = P$
Satzräder abhäng
messer

desselben. Wenn
des Zahnprofils ein
endlichen liegen, al

Willis nimmt

Dann ist, unter Q den
kreise B verstanden,
Rade der (von seiner S
Mitte von PQ, und folg
flanke dieses 12zähnigen
Sind H und H_1 zw
$= \frac{1}{2} r = \frac{3}{\pi} t$, den Theilkr
so gehen sie (wegen PM
und schneiden die Gerade
dass die Winke

und dass folg

unter Pp, Pp_1 hier Bögen de
in der Geraden G liegenden Se
ergiebt sich folgende von Reu

...seitige) Drehungswinkel derselben, und wenn ins-
...winkel der nach dem Pol P gehenden Fahrstrahlen
...sprechenden elementaren Aenderungen, also ent-
...hungswinkel sind, so ist das Verhältniss der ent-
... Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

... unter dem die Polbahnen von ihren entsprechen-
... werden, und ist ds das Bogenelement, mit dem
... Drehungen $d\varphi$, $d\varphi'$ auf einander rollen, so ist

$$\ldots = r' d\varphi' = ds . \sin \psi,$$

... 1):

$$r\omega = r'\omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

... AA' verstanden,

$$r + r' = \pm e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

... 3 Fälle umfasst:

$$= e;\ r - r' = e;\ r - r' = -e$$

APA'; $AA'P$; PAA'

... Aus Gl. (2) und (3) folgt:

$$\frac{\omega'}{\omega' \mp \omega};\ r' = \pm e \frac{\omega}{\omega' \pm \omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

... weichen auf dreierlei Art zusammengehören

... der Winkelgeschwindigkeiten = einer Con-
... die Gleichungen (4) die Halbmesser der
Ist aber

$$= f(\varphi),$$

$$= \pm e \frac{1}{f(\varphi) + 1} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

der Curve B und gestattet un-
Gleichung von B' ergiebt sich
für r' und der aus Gl. (1)

$$\ldots\ldots\ldots (6).$$

[illegible] rigken [illegible] kennzeichnen [illegible] wenn die [illegible] dann in der [illegible] schwingung [illegible]

Wenn [illegible] knüpfen [illegible] Dreiecke [illegible] von λ und [illegible] von λ [illegible] congruent [illegible] λ [illegible] müssen die [illegible] wie die [illegible] von λ und f [illegible] Werth [illegible] Gleichungen

$$[illegible]$$

mit Rücksicht auf die Beziehung [illegible] zwischen den Functionen f und F bestimmt sind. Ein dritter Parameter kann der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der grösste Werth von $\frac{\omega'}{\omega}$ ein gegebenes Vielfache des kleinsten Werthes dieses Verhältnisses, also

$$\frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\max f'\varphi}{\min f'\varphi} = m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

einer gegebenen Zahl sei u. s. f.

sind entsprechende (gleichzeitige) Drehungswinkel derselben, und wenn insbesondere φ, φ' die Polarwinkel der nach dem Pol P gehenden Fahrstrahlen r, r' und $d\varphi, d\varphi'$ ihre entsprechenden elementaren Aenderungen, also entsprechende elementare Drehungswinkel sind, so ist das Verhältniss der entsprechenden (gleichzeitigen) Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ist ferner ψ der Winkel, unter dem die Polbahnen von ihren entsprechenden Fahrstrahlen geschnitten werden, und ist ds das Bogenelement, mit dem sie bei den entsprechenden Drehungen $d\varphi, d\varphi'$ auf einander rollen, so ist

$$r d\varphi = r' d\varphi' = ds . \sin\psi,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$r\omega = r'\omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Auch ist, unter e die Strecke AA' verstanden,

$$r \pm r' = \pm e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

welche Gleichung die folgenden 3 Fälle umfasst:

$$r + r' = e; \quad r - r' = e; \quad r - r' = -e$$

entsprechend den Lagen

$$APA'; \quad AA'P; \quad PAA'$$

der betreffenden 3 Punkte. Aus Gl. (2) und (3) folgt:

$$r = \pm e \frac{\omega'}{\omega' \pm \omega}; \quad r' = \pm e \frac{\omega}{\omega' \pm \omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

wo wieder die doppelten Vorzeichen auf dreierlei Art zusammengehören können analog Gl. (3).

Ist nun das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten = einer Constanten gegeben, so bestimmen die Gleichungen (4) die Halbmesser der dann kreisförmigen Polbahnen. Ist aber

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi),$$

so folgt:

$$r = \pm e \frac{f(\varphi)}{f(\varphi) \pm 1}; \quad r' = \pm e \frac{1}{f(\varphi) \pm 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Die Gleichung für r ist die Polargleichung der Curve B und gestattet unmittelbar die Zeichnung derselben; die Polargleichung von B' ergiebt sich durch Elimination von φ zwischen der Gleichung für r' und der aus Gl. (1) folgenden Gleichung

$$\varphi' = \int_0^{\varphi} \frac{\omega'}{\omega} d\varphi = \int_0^{\varphi} f(\varphi)\, d\varphi = F(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Hiernach würde die Bestimmung der Polbahnen keine weitere Schwierigkeit darbieten, wenn die Function $f(\varphi)$, d. h. das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss derselben als Function des Drehungswinkels einer von ihnen gegeben wäre, was indessen ohne Einschränkung nur dann zulässig ist, wenn die Polbahnen nicht geschlossene Curven zu sein brauchen, wie es dann in der That nicht nöthig ist, wenn ihre Bewegungen um A, A' schwingende Drehungen sein sollen, die weniger als 360^0 umfassen.

Wenn aber die Drehungen von B, B' um A, A' in unveränderlichem Sinne stattfinden sollen (in welchem Falle die keine Zeichenwechsel erfahrenden Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' beide positiv gesetzt werden können), so ist die Wahl der Function $f(\varphi)$ an die Bedingung zu knüpfen, dass jede Polbahn eine geschlossene, ihren zugehörigen Drehungspunkt umschliessende Curve sein muss Wenn dann ferner verlangt wird, dass dasselbe Aenderungsgesetz von $\frac{\omega'}{\omega}$ nach je $\frac{1}{n}$ Umdrehung von B und nach je $\frac{1}{n'}$ Umdrehung von B' sich wiederholen solle, so muss die von B umgrenzte Fläche F durch von A aus gezogene Fahrstrahlen in n congruente Sectoren, ebenso die von B' umgrenzte Fläche F' durch von A' aus gezogene Fahrstrahlen in n' congruente Sectoren theilbar sein, und müssen die den Sectoren von F zugehörigen Bögen von B ebenso lang sein wie die den Sectoren von F' zugehörigen Bögen von B', die ganzen Längen von B und B' also $= n : n'$ sich verhalten. Um diesen Forderungen zu genügen, muss die Function $f(\varphi)$ für alle Werthe von φ einen endlichen Werth > 0 haben und wenigstens 2 Parameter enthalten, die durch die Gleichungen

$$f(0) = f\left(\frac{2\pi}{n}\right); \quad \frac{2\pi}{n'} = F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots\dots\dots\dots (7)$$

mit Rücksicht auf die Beziehung (6) zwischen den Functionen f und F bestimmt sind. Ein dritter Parameter kann der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der grösste Werth von $\frac{\omega'}{\omega}$ ein gegebenes Vielfache des kleinsten Werthes dieses Verhältnisses, also

$$\frac{max\,\frac{\omega'}{\omega}}{min\,\frac{\omega'}{\omega}} = \frac{max\,f(\varphi)}{min\,f(\varphi)} = m \dots\dots\dots\dots (8)$$

= einer gegebenen Zahl sei u. s. f.



Von anderen Forderungen, denen im Allgemeinen nicht sowohl durch die Werthe gewisser Parameter, als vielmehr durch die Form der Function $f(\varphi)$ zu genügen ist, sind die folgenden erwähnenswerth, bei deren Erörterung die Fahrstrahlen, von denen aus die Polarwinkel φ, φ' gemessen werden, als kleinste oder grösste Fahrstrahlen r, r' von B, B' vorausgesetzt werden. (Jenachdem der Pol P in der Strecke $AA' = e$ oder ausserhalb derselben liegt, jenachdem also die Drehungen von B, B' in entgegengesetztem oder in gleichem Sinne stattfinden, ist, wenn r ein Minimum ist, das entsprechende r' ein Maximum oder auch ein Minimum, wenn dagegen r ein Maximum ist, das entsprechende r' ein Minimum oder auch ein Maximum.)

1) Wenn jede Polbahn von jeder durch ihren Drehungspunkt gehenden Geraden in nur zwei Punkten geschnitten werden soll, so müssen die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\varphi} \text{ und } \frac{dr'}{d\varphi'} = \frac{1}{f(\varphi)} \frac{dr'}{d\varphi}$$

für alle Werthe von φ endliche Werthe haben, muss also gemäss den Gleichungen (5) die Function $f(\varphi)$ so beschaffen sein, dass

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = f'(\varphi)$$

nicht unendlich wird.

2) Sollen die Polbahnen keinen Knick haben, so müssen die kleinsten oder grössten Fahrstrahlen, von denen die n resp. n' Sectoren der Flächen F, F' begrenzt werden, nicht blos constructive, aus dem Abbrechen der Curven hervorgehende, sondern analytische Minima resp. Maxima sein, muss also die ihnen entsprechende elementare Aenderung von $f(\varphi)$ gemäss Gl. (5) $= 0$, d. h.

$$f'(0) = f'\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

sein mit Benutzung der so eben unter 1) erklärten Functionsbezeichnung f'.

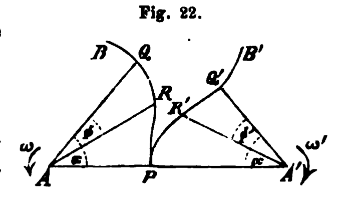
3) Sollen die periodische Zunahme und Abnahme von $\frac{\omega'}{\omega}$ in gleicher Weise stattfinden, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$f(\varphi) = f\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Die n resp. n' Sectoren der Flächen F und F' sind dann symmetrisch in Bezug auf die Halbirungslinien ihrer Winkel $= \frac{2\pi}{n}$ resp. $\frac{2\pi}{n'}$.

4) Congruente Polbahnen B, B', welche gleich liegend, d. h. durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene zur Deckung zu bringen sind, können nur dem Falle entsprechen, dass ihre Drehungen um A, A' in entgegengesetztem Sinne stattfinden, und dass somit der Pol P zwischen A und A' liegt, ferner dem Falle $n = n'$. Befinden sich nun die Polbahnen in solcher Lage (Fig. 22), dass ein kleinster Fahrstrahl AP von B und folglich ein grösster $A'P$ von B' in der Geraden AA' liegt, und ist AQ der im Sinne von ω nächstfolgende grösste, $A'Q'$ der im Sinne von ω' nächstfolgende kleinste Fahrstrahl beziehungsweise von B und B', so sind auch AQ und $A'Q'$ entsprechende Fahrstrahlen, und es stehen die von ihnen aus gerechneten Polarwinkel $QAR = \varphi$ und $Q'A'R' = \varphi'$ von irgend zwei anderen entsprechenden Fahrstrahlen AR, $A'R'$ in der Beziehung: $\varphi' = F(\varphi)$ gemäss Gl. (6). Bei Congruenz der Polbahnen sind aber die Winkel QAP und $PA'Q'$ einander gleich, etwa $= \alpha$, und muss der Winkel $PA'R' = \alpha - \varphi'$ zu dem Winkel $PAR = \alpha - \varphi$ in derselben Beziehung stehen wie φ zu φ' (entsprechend der Vertauschung von AQ mit $A'P$, $A'Q'$ mit AP), d. h. es muss

Fig. 22.



$$\alpha - \varphi = F(\alpha - \varphi') = F[\alpha - F(\varphi)] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

sein, unter α den Winkel verstanden, welcher, entsprechend Gl. (11) mit $\varphi = \varphi' = 0$, durch die Gleichung

$$\alpha = F(\alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11, a)$$

bestimmt ist. Durch Differentiation ergiebt sich diese für congruente Polbahnen charakteristische Gleichung (11) auch in der Form:

$$-1 = f[\alpha - F(\varphi)] \cdot [-f(\varphi)]$$

oder

$$f(\varphi) \cdot f[\alpha - F(\varphi)] = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

mit

$$f(0) \cdot f(\alpha) = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12, a)$$

als Bestimmungsgleichung für α. Ist zugleich die vorige Bedingung unter 3) erfüllt, so ist $\alpha = \frac{\pi}{n}$. —

Congruente, um feste Punkte A, A' drehbare Polbahnen von symmetrischer Lage werden im folgenden §. besprochen.

§. 22. Beispiele.

1) Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω', mit denen die Polbahnen B, B' um die festen Punkte A, A' in ihrer gemeinsamen Ebene rotiren, sei einem Ausdrucke von der Form

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = a + bk \cos(k\varphi)$$

entsprechend näher zu bestimmen. Nach Gl. (6) im vorigen §. ist dann

$$\varphi' = F(\varphi) = a\varphi + b \sin(k\varphi)$$

und sind nach Gl. (7) daselbst zwei der Parameter a, b, k bestimmt durch die Gleichungen:

$$a + bk = a + bk \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right)$$

und

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n} + b \sin\left(k \frac{2\pi}{n}\right).$$

Aus der ersten folgt:

$$\cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) = 1, \text{ also } k = n,$$

sofern $\frac{2\pi}{n}$ nicht nur irgend ein, sondern der kleinste Werth von φ sein soll, für welchen $\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi)$ wieder ebenso gross wird wie für $\varphi = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt dann

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n}; \quad a = \frac{n}{n'},$$

und somit vorläufig

$$f(\varphi) = \frac{n}{n'} + bn \cos(n\varphi).$$

Indem danach

$$\max f(\varphi) = f(0) = \frac{n}{n'} + bn,$$

$$\min f(\varphi) = f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{n'} - bn$$

ist, ergiebt sich, wenn nach Gl. (8) im vorigen §. das Verhältniss

$$\frac{\max f(\varphi)}{\min f(\varphi)} = \frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\frac{n}{n'} + bn}{\frac{n}{n'} - bn} = m$$

gesetzt wird, $b = \frac{1}{n'} \frac{m-1}{m+1}$ und somit schliesslich:

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[1 + \frac{m-1}{m+1} \cos(n\varphi) \right] \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\varphi' = F(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[\varphi + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) \right] \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Wegen $f(0) = max f(\varphi)$ entsprechen den Polarwinkeln $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ Maximal- oder Minimalwerthe von r, r', und da

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{n}{n'} \frac{m-1}{m+1} n \sin(n\varphi)$$

ist, erkennt man, dass die Bedingungen unter 1) und 2) im vorigen §. durch Gl. (1) erfüllt sind. Auch der Bedingung unter 3) daselbst wird entsprochen wegen

$$\cos\left[n\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right)\right] = \cos(2\pi - n\varphi) = \cos(n\varphi).$$

Sollten aber die Polbahnen congruent sein, so müsste $n = n'$ und wegen $\alpha = \frac{\pi}{n}$ nach Gl. (11) im vorigen §. mit Rücksicht auf obige Gl. (2):

$$\frac{\pi}{n} - \varphi = F\left(\frac{\pi}{n} - \varphi'\right) = \frac{\pi}{n} - \varphi' + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(\pi - n\varphi'),$$

also
$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi')$$

oder $\varphi' = \varphi$, $m = 1$ sein, entsprechend $\omega' = \omega$, also kreisförmigen Polbahnen.

Nimmt man mit Ausschluss dieses letzteren Specialfalles beispielsweise

$$n = n' = 1, \; m = 4,$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= f(\varphi) = 1 + \frac{3}{5} \cos\varphi \\ \varphi' &= F(\varphi) = \varphi + \frac{3}{5} \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3);$$

mit $n = n' = 4$, $m = 2$ ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= f(\varphi) = 1 + \frac{1}{3} \cos(4\varphi) \\ \varphi' &= F(\varphi) = \varphi + \frac{1}{12} \sin(4\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

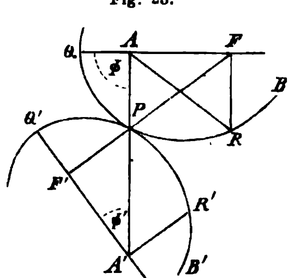
Sollen dabei die Polbahnen in entgegengesetztem Sinne rotiren, so sind ihre entsprechenden Fahrstrahlen nach Gl. (5) im vorigen §.

$$r = e\frac{f(\varphi)}{f(\varphi)+1};\ r' = e\frac{1}{f(\varphi)+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (5),$$

und können sie selbst hiernach leicht verzeichnet werden.*)

2) Die Polbahnen seien congruent und symmetrisch liegend, d. h. so, dass sie erst dann durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene E zur Deckung gebracht werden können, nachdem eine von ihnen um irgend eine Gerade in E um 180^0 gedreht wurde. Wenn solche Polbahnen B, B' von einer Lage aus, in der sie sich berühren und in Bezug auf die gemeinsame Tangente symmetrisch liegen, auf einander rollen, so bleibt ihre gemeinsame Tangente immer Symmetrieaxe; wenn dabei ein gewisser mit B fest verbundener Punkt A von einem gewissen mit B' fest verbundenen Punkte A' eine unveränderliche Entfernung $= e$ behielte und die Gerade AA' beständig durch den Berührungspunkt P von B, B' ginge, so würden diese Curven B, B' unbeschadet ihrer gegenseitigen Rollung auf einander, d. h. unbeschadet ihres Charakters als Polbahnen, um diese Punkte A, A' als feste Punkte der Ebene E sich drehen können. Gäbe es aber ein Paar solcher Punkte A, A', so müsste es auch noch ein zweites Paar F, F' geben, so dass in Bezug auf die gemeinsame Tangente beständig A und F', F und A' (Fig. 23) symmetrisch liegen, also

Fig. 23.



$$PA = PF',\ PF = PA'$$

ist. Mit der Forderung, dass die Strecke AA' constant sein und dass die Gerade AA' stets den Berührungspunkt P enthalten, dass also auch (jenachdem P in der Strecke AA' oder ausserhalb derselben liegt) die Summe oder Differenz von PA und PA' constant sein soll, sind die Gleichungen $PA = PF'$, $PF = PA'$ dann, aber nur dann verträglich, wenn die Summe oder Differenz von PA und PF, also auch von PA' und PF' constant ist, d. h. wenn die Polbahnen congruente Ellipsen oder Hyperbeln mit den Brennpunkten A und F, A' und F', und mit grossen Axen $= AA'$ sind. Hier kommen nur erstere als geschlossene Polbahnen in Betracht, d. h. zwei congruente Ellipsen, die um je einen A resp. A' ihrer Brennpunkte in entgegengesetztem Sinne rotiren und deren grosse Axen der Strecke AA'

* Zeichnungen der Polbahnen für diese zwei Beispiele (als Theilrisse verzahnter Räder) finden sich in Redtenbacher's „Maschinenbau“, Band I, Tafel XIX, Fig. 16 und Tafel XX, Fig. 1.

gleich sind. Sie entsprechen mit $n = n' = 1$ den Gleichungen (7) des vorigen §. und allen unter 1) bis 4) daselbst angeführten Bedingungen, der letzten insofern, als zwei congruente Figuren, die je eine Symmetrieaxe haben, zu gleicher Zeit gleich und symmetrisch liegend sind.

Ist a die grosse, b die kleine Halbaxe der Ellipse, $p = \frac{b^2}{a}$ die Hälfte der durch den Brennpunkt gehenden zur grossen Axe senkrechten Sehne, $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ die Excentricität (εa die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte), und wird (Fig. 23) der Polarwinkel φ der Ellipse B von dem nach dem nächsten Scheitelpunkte Q gehenden Fahrstrahle, der Polarwinkel φ' der anderen B' von dem entsprechenden, also von dem nach dem entferntesten Scheitelpunkte Q' gehenden Fahrstrahle aus gerechnet, so sind die Polargleichungen derselben:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \text{ und } r' = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi'}, \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

und kann aus der Gleichung

$$r + r' = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi'} = 2a \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\varphi' = F(\varphi); \; \frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

entwickelt werden. Doch ist das Aenderungsgesetz von $\frac{\omega'}{\omega}$ hauptsächlich nur mit Rücksicht auf das sich unmittelbar ergebende Verhältniss

$$\frac{max \frac{\omega'}{\omega}}{min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\frac{a + \varepsilon a}{a - \varepsilon a}}{\frac{a - \varepsilon a}{a + \varepsilon a}} = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2$$

von praktischem Interesse; ist dasselbe $= m$ gegeben, so folgt

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1}; \; \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Sind R und R' (Fig. 23) solche zwei entsprechende Punkte der Ellipsen B, B', deren Projectionen auf die grossen Axen in den Brennpunkten F, A' liegen, also $FR = A'R' = p$, so dreht sich B' um je einen rechten Winkel, wenn sich B um den stumpfen Winkel QAR oder um den spitzen Winkel RAF dreht; und wenn sich B mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht, so ist das Verhältniss dieser Winkel QAR, RAF = dem Verhältnisse der Zeiten, welche B' zu den beiden halben Umdrehungen

gebraucht, in deren Mittellagen $A'F'$ beziehungsweise die Richtung $A'A$ und die entgegengesetzte Richtung hat. Dasselbe ist das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen von B'; ist es $= n$ gegeben, so ist also

$$n = \frac{\pi - arc\,sin\,\frac{p}{2a-p}}{arc\,sin\,\frac{p}{2a-p}}; \quad arc\,sin\,\frac{p}{2a-p} = \frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{p}{2a-p} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2a - \frac{b^2}{a}} = \frac{1}{2\frac{a^2}{b^2} - 1} = sin\,\frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2\,sin\,\frac{\pi}{n+1}}{1 + sin\,\frac{\pi}{n+1}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Als Function von n ausgedrückt ist hiernach auch

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1 - sin\,\frac{\pi}{n+1}}{1 + sin\,\frac{\pi}{n+1}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}{1 + cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}} =$$

$$= tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = tg\left(\frac{n-1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

und wegen $\varepsilon = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \dfrac{1 - tg\,\frac{\pi}{2(n+1)}}{1 + tg\,\frac{\pi}{2(n+1)}}$

$$m = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 = cotg^2\,\frac{\pi}{2(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

So findet man z. B. für

$n =$	2	3	4	5
$\frac{b}{a} =$	0,9634	0,9102	0,8604	0,8165
$\varepsilon =$	0,2679	0,4142	0,5095	0,5773
$m =$	3	5,83	9,47	13,93

2. Höhere Elementenpaare mit nicht cylindrischen Axoiden.

§. 23. Elementenpaare mit conischen Axoiden.

Die Axoide von Paarelementen sind concentrische conische Flächen (allgemeine Kegelflächen), wenn die Elemente selbst von conischen Flächen begrenzt werden und mit denselben (in Folge entsprechenden Zwanges durch geeignete Stützung) sich in Geraden so berühren, dass sie beständig concentrisch bleiben. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, worunter hier ihre in Punkten sich berührenden Durchschnittsfiguren mit irgend einer mit den Elementenflächen concentrischen Kugelfläche zu verstehen sind. Dieselbe Kugelfläche schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in sphärischen Linien, die analog den Bezeichnungen bei cylindrischen Axoiden die Polbahnen der Elementenprofile heissen mögen, und welche sich beständig in einem Punkte, dem Pol, berühren. Hiernach können analoge Aufgaben, wie die im Vorhergehenden für cylindrische Elemente und Axoide behandelten, auf analoge Weise im vorliegenden Falle behandelt werden bei Ersetzung aller ebenen durch entsprechende sphärische Figuren.

Besondere Erwähnung verdient der bei conischen Rädern vorliegende Fall, dass die Elemente um Axen OA, OA' von unveränderlichen Lagen in ihnen drehbar sind, die einen unveränderlichen Winkel $AOA' = \varepsilon$ mit einander bilden. Die Axoide sind dann conische Flächen, deren Berührungslinie (Polaxe) OP beständig in der Ebene AOA' liegt, die Profile sind sphärische Figuren in einer Kugelfläche K mit dem Mittelpunkte O, etwa mit dem Halbmesser OP, deren Berührungspunkt (Pol) P beständig in dem grössten Kreise AA' liegt, in welchem die Kugelfläche von der Ebene AOA' geschnitten wird. Sind dann ω, ω' die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten der Elemente um OA, OA', ferner φ, φ' entsprechende Drehungswinkel, und ist analog §. 21

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi), \text{ entsprechend } \varphi' = \int_0^\varphi f(\varphi)\, d\varphi = F(\varphi)$$

gegeben, so findet man die Winkel $AOP = \alpha$ und $A'OP = \alpha'$, die hier als Functionen von φ resp. φ' die Axoide bestimmen, aus den Gleichungen:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \text{ und } \alpha \pm \alpha' = \pm \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

von denen die letzte eine der folgenden 3 Formen haben kann:

$$\alpha + \alpha' = \varepsilon; \; \alpha - \alpha' = \varepsilon; \; \alpha - \alpha' = -\varepsilon$$

entsprechend den Fällen, dass sich die Axoide von aussen oder von innen berühren und letzteren Falles entweder das Axoid um OA' oder das um OA das innere ist. Dabei sind α und α' spitze Winkel, so dass ε bei Berührung von innen auch spitz, bei Berührung von aussen aber spitz oder stumpf ist. Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\pm \frac{\omega}{\omega'} \sin \alpha = \sin (\pm \alpha') = \sin (\pm \varepsilon - \alpha)$$
$$= \sin (\pm \varepsilon) \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha$$

$$tg\, \alpha = \frac{\sin (\pm \varepsilon)}{\pm \frac{\omega}{\omega'} + \cos \varepsilon},$$

woraus $tg\,(\pm \alpha')$ durch Vertauschung von ω mit ω' erhalten wird. Somit ist

$$tg\, \alpha = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \pm \frac{\omega}{\omega'}}; \quad tg\, \alpha' = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} \pm \cos \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

wo das Vorzeichen von $\sin \varepsilon$ im Zähler übereinstimmend mit dem von ε in Gl. (1), das Vorzeichen im Nenner aber mit dem von α' in Gl. (1) übereinstimmend zu nehmen ist. Diese Gleichungen (2) gehen in die Gleichungen (4) von §. 21 über, wenn man nach ihrer Multiplication mit dem Kugelhalbmesser OP diesen letzteren unendlich wachsen und zugleich ε in die Grenze Null übergehen lässt.

Die Zahnprofile conischer Räder, deren Axoide gegeben oder auf die so eben erklärte Weise bestimmt worden sind, können nun analog den in §. 16—20 besprochenen Methoden gefunden werden, z. B. nach der Methode der Hülfspolbahnen (§. 17) als die Bahnen eines mit einer sphärischen Curve H in der Kugelfläche K verbundenen Punktes p beim Rollen von H in der Kugelfläche auf den sphärischen Polbahnen B, B', im Falle von Kegelrädern (mit im engeren Sinne so genannten Kegelflächen als Axoiden) auch nach der Methode der Evolventenverzahnung (§. 19) als die Spuren, die ein Punkt p eines durch den Pol P gelegten grössten Kreises von K hinterlässt, wenn derselbe auf zwei ihn berührenden kleineren Kugelkreisen, deren Mittelpunkte beziehungsweise in OA und OA' liegen, rollt. Sofern aber von den so zu erhaltenden Curven nur kleine Stücke nahe den Polbahnen B, B' als Zahnprofile benutzt werden, kann die betreffende Construction statt in der Kugelfläche selbst ohne erheblichen Fehler auch in zwei abwickelbaren Flächen G, G' ausgeführt werden, welche die Kugelfläche beziehungsweise längs B, B' berühren, wodurch der Vortheil erlangt wird, dass sie thatsächlich in einer Ebene E auszuführen und dann erst

nachträglich durch Aufwickelung der letzteren auf die Flächen G, G' zu übertragen ist. Insbesondere bei runden oder im engeren Sinne sogenannten **Kegelrädern** sind jene Flächen G, G' selbst Kegelflächen, von denen die mit ihnen conaxialen kegelflächigen Axoide rechtwinklig geschnitten werden; die Abwickelungen der kreisförmigen Polbahnen B, B' mit jenen Kegelflächen G, G' in einer Ebene E sind zwei sich berührende Kreisbögen

mit den Halbmessern $OP\,tg\,\alpha$, $OP\,tg\,\alpha'$,
und den Längen $2\pi\,.\,OP\sin\alpha$, $2\pi\,.\,OP\sin\alpha'$,

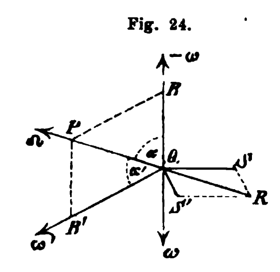
also den Mittelpunktwinkeln $2\pi\cos\alpha$, $2\pi\cos\alpha'$, zu denen als Polbahnen die Zahnprofile nach den betreffenden Methoden gezeichnet werden können, um dann auf die Kegelflächen G, G', z. B. als Begrenzungsflächen anzufertigender Radmodelle, durch Aufwickelung übertragen und schliesslich nach gegen O convergirenden conischen Flächen zu Zähnen ausgearbeitet zu werden.

§. 24. Axoide von Paarelementen, die um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage drehbar sind.

Von Fällen, denen als Axoide der Elemente eines Paares im Allgemeinen weder cylindrische noch conische Flächen entsprechen, sollen hier solche näher betrachtet werden, in denen eine gewisse Gerade OA des einen Elementes gegen eine gewisse Gerade $O'A'$ des anderen bei der gegenseitigen Bewegung beider stets dieselbe und zwar im Allgemeinen windschiefe Lage behält, so dass beide Gerade stets denselben Winkel ε mit einander bilden und dieselbe kürzeste Entfernung $OO' = e$ mit denselben Fusspunkten O, O' behalten. Die Elemente sind dann um diese Geraden OA, $O'A'$ als feste Axen drehbar.

Die Bestimmung der Axoide für ein gewisses Gesetz der sich entsprechenden (gleichzeitigen) Drehungen der Elemente um diese Axen erfordert die Bestimmung der Polaxe für irgend eine gegenseitige Lage der Elemente, bei der sie sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' resp. um OA, $O'A'$ drehen, d. h. die Bestimmung einer so gelegenen Geraden, dass die betreffende elementare gegenseitige Bewegung der Elemente als Combination einer Drehung und Schiebung um resp. längs dieser Geraden zu betrachten ist. Zu dem Ende sei Q ein Punkt der Geraden OO' in den Entfernungen $OQ = r$ und $O'Q = r'$ von O und O', QB parallel

Fig. 24.



OA, QB' parallel $O'A'$: siehe Fig. 24, wo Q zwischen O und O', OA vor, $O'A'$ hinter der Ebene BQB' liegend gedacht ist, während die Pfeilspitzen bei ω und ω' die Axrichtungen der betreffenden Drehungen, d. h. ihren Drehungssinn in der üblichen Weise andeuten sollen, dass sie einem der Pfeilrichtung entgegen Blickenden rechtläufig (wie die Bewegung der Gestirne gegen die Erde einem von Nord nach Süd blickenden Beobachter) erscheinen. Wenn nun zu den vorausgesetzten Drehungen der Elemente um ihre Axen OA, $O'A'$ noch eine gemeinschaftliche Drehung beider mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ um OA hinzugefügt und dadurch das um OA drehbare erste Element in Ruhe versetzt wird, so ist die jetzt absolute Bewegung des zweiten seine relative Bewegung gegen das erste, die also aus den Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten $-\omega$ und ω' um OA und $O'A'$ zusammengesetzt ist. Von diesen kann die erstere durch eine gleiche mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ um QB und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $r\omega$ nach der Richtung QS senkrecht zur Ebene OQB, die andere durch eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω' um QB' und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $r'\omega'$ nach der Richtung QS' senkrecht zur Ebene $O'QB'$ ersetzt werden, und können dann die Drehungen um QB und QB' zu einer resultirenden Drehung um eine gewisse Axe QP in der zu OO' senkrechten, also mit den gegebenen Drehungsaxen OA, $O'A'$ parallelen Ebene BQB' zusammengesetzt werden, deren Lage in dieser Ebene durch die Gleichung

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

bestimmt ist, unter α und α' die Winkel BQP und $B'QP$ verstanden. Diese Gerade QP ist die Polaxe, wenn die zwei Schiebungen nach QS und QS' eine in QP fallende resultirende Schiebung QR ergeben, wenn also, α und α' als spitze Winkel vorausgesetzt,

$$r\omega \cos \alpha = r'\omega' \cos \alpha' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$\frac{r}{r'} = \frac{tg\, \alpha}{tg\, \alpha'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

ist und zugleich QS und QS' auf entgegengesetzten Seiten von QP liegen. Letzteres ist der Fall, wenn, wie in Fig. 24 angenommen, die Diagonale Ω des über ω' und $-\omega$ als Seiten construirten Parallelogramms (d. i. die Axrichtung der relativen Winkelgeschwindigkeit des um $O'A'$ drehbaren Elementes gegen das andere) mit beiden Seiten des Parallelogramms spitze Winkel bildet und der Punkt Q zwischen O und O' liegt, wogegen die Lage einer

der Schubrichtungen QS und QS' gegen QP sich umkehren würde, wenn Q in der Geraden OO' ausserhalb der Strecke OO' läge oder wenn die Axrichtung von Ω nur mit einer der Axrichtungen von ω' und $-\omega$ einen spitzen Winkel bildete. Letzteren Falls wird also die Gerade OO' von der Polaxe in einem solchen Punkte Q geschnitten, der ausserhalb der Strecke OO' liegt, und zwar auf der Seite von O' oder von O, jenachdem die Axrichtung von Ω mit der von ω' oder mit der von $-\omega$ den spitzen Winkel bildet, also $\omega \cos \alpha \lesseqgtr \omega' \cos \alpha'$, nach Gl. (2) somit $r \gtreqless r'$ ist: siehe die Figuren 25 und 26, deren Ebene BQB' beziehungsweise hinter und vor OO' liegend gedacht ist, den Punktfolgen $OO'Q$ bei Fig. 25, QOO' bei Fig. 26 entsprechend.

Fig. 25.

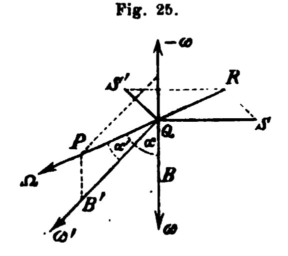
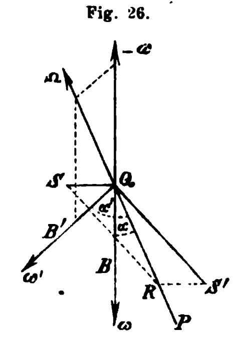


Fig. 26.



Wenn nun, wie es in den Figuren 24—26 geschen ist, mit QB und QB' allgemein solche Richtungen der mit den Drehungsaxen OA, $O'A'$ parallel gezogenen betreffenden Geraden bezeichnet werden, die mit der im einen oder andern Sinne genommenen Polaxe QP die spitzen Winkel $PQB = \alpha$ und $PQB' = \alpha'$ bilden, und wenn ε den Winkel BQB' bezeichnet, der in den Fällen von Fig. 25 und Fig. 26 = dem Winkel (ω, ω') und jedenfalls spitz, im Falle von Fig. 24 dagegen = dem Winkel $(-\omega, \omega')$ und spitz oder stumpf ist, so entsprechen den unterschiedenen 3 Fällen die Beziehungen:

Fig. 24.	Fig. 25.	Fig. 26.
$\alpha + \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = -\varepsilon$
$r + r' = e$	$r - r' = e$	$r - r' = -e,$

welche zusammengefasst werden können in den Gleichungen:

$$\alpha \pm \alpha' = \pm \varepsilon; \quad r \pm r' = \pm e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus der ersten und aus Gl. (1) folgt ebenso wie im vorigen §.:

$$tg\, \alpha = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \pm \frac{\omega}{\omega'}}; \quad tg\, \alpha' = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} \pm \cos \varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

aus der zweiten und aus Gl. (3):

$$r = \pm e \frac{tg\, \alpha}{tg\, \alpha \pm tg\, \alpha'}; \quad r' = \pm e \frac{tg\, \alpha'}{tg\, \alpha \pm tg\, \alpha'} \quad \ldots\ldots (6).$$

Die Ansicht der Figuren 24—26 lässt erkennen, dass die Winkelgeschwindigkeit der relativen Drehung um die Polaxe:

$$\Omega = \begin{cases} \omega \cos\alpha + \omega' \cos\alpha' & \text{für } e = r + r' \text{ (Fig. 24)} \\ -\omega \cos\alpha + \omega' \cos\alpha' & \text{„ } e = r - r' \text{ (Fig. 25)} \\ \omega \cos\alpha - \omega' \cos\alpha' & \text{„ } e = r' - r \text{ (Fig. 26)} \end{cases}$$

ist, oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos\alpha}{r'} = \frac{\omega' \cos\alpha'}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

und die relative Schiebungsgeschwindigkeit längs der Polaxe (QR in Fig. 24 bis 26),

$$v = \begin{cases} r\omega \sin\alpha + r'\omega' \sin\alpha' & \text{für } e = r + r' \\ r\omega \sin\alpha - r'\omega' \sin\alpha' & \text{„ } e = r - r' \\ -r\omega \sin\alpha + r'\omega' \sin\alpha' & \text{„ } e = r' - r \end{cases}$$

oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{v}{e} = \omega \sin\alpha = \omega' \sin\alpha' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Durch r und α ist die Lage der Polaxe gegen die Drehungsaxe OA, durch r' und α' ihre Lage gegen $O'A'$ bestimmt, da man ausserdem weiss, dass sie in einer mit beiden Drehungsaxen parallelen Ebene liegt, und auch der Umstand, ob ihr Schnittpunkt Q mit der gemeinsamen Normale OO' der Drehungsaxen in der Strecke OO' oder ausserhalb derselben auf der Seite von O' oder O liegt, dadurch entschieden wird, dass die Diagonale des über ω' und $-\omega$ (mit Berücksichtigung der betreffenden Axrichtungen) construirten Parallelogramms beziehungsweise mit beiden Seiten, oder nur mit der Seite ω', oder nur mit der Seite $-\omega$ einen spitzen Winkel bildet. Ist diese Entscheidung getroffen, so sind dadurch auch der Winkel ε (als Winkel der Axrichtungen ω' und $-\omega$ im ersten, ω' und ω im zweiten und dritten Falle) und die Vorzeichen in den Gleichungen (5) und (6) bestimmt, so dass $tg\,\alpha$ und $tg\,\alpha'$ nach Gl. (5), dann r und r' nach Gl. (6) unzweideutig berechnet werden können.

Sind φ und φ' entsprechende Drehungswinkel der beiden Elemente, und ist

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

gegeben, so sind durch die Gleichungen (5) und (6) die Grössen $tg\,\alpha$ und r, $tg\,\alpha'$ und r' als Functionen von φ, letztere dann auch als Functionen von

$$\varphi' = \int_0^{\varphi} f(\varphi)\, d\varphi = F(\varphi)$$

bestimmt und somit die Gestalten beider Axoide. Wenn insbesondere das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' constant ist, so sind die Axoide sogenannte hyperbolische oder einschalige Rotationshyperboloide um OA und $O'A'$ als Axen, nämlich Flächen, welche eine in ihrer Anfangslage die gemeinsame Normale OO' von OA und $O'A'$ in einem gewissen Punkte Q rechtwinklig schneidende Gerade QP beschreibt, wenn sie in unveränderlichen relativen Lagen beziehungsweise gegen OA oder $O'A'$ um diese Axen rotirt. Die Meridianlinien dieser Flächen sind Hyperbeln, deren reelle Halbaxen beziehungsweise $OQ = r$ und $O'Q' = r'$ sind, und deren Asymptoten unter den Winkeln α resp. α' gegen OA resp. $O'A'$ als imaginäre Hauptaxen geneigt sind. Ist nämlich, was z. B. die Fläche um OA als Axe betrifft, die Strecke $QP = p$, und ist P' die Projection des Punktes P auf die durch OO' gehende Normalebene zur Axe OA (die Ebene des kleinsten Parallelkreises oder sogenannten Kehlkreises der in Rede stehenden Fläche), so ergiebt sich aus

$$OP' = x = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{QP'}^2} = \sqrt{r^2 + p^2 \sin^2 \alpha}$$
$$\text{und } PP' = y = p \cos \alpha$$

die Gleichung der Meridianlinie durch Elimination von p:

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{(r \cot g\, \alpha)^2} = 1.$$

§. 25. Bestimmung von Elementenflächen für gegebene Axoide.

Wenn die Axoide von Paarelementen gegeben oder (für ein gegebenes Gesetz ihrer gleichzeitigen Drehungen um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage) nach vorigem §. bestimmt worden sind, so können entsprechende Elementenflächen, d. h. sich berührende und deshalb kinematisch allein in Betracht kommende Oberflächentheile der Elemente nach Methoden gefunden werden, die den früher für den Fall cylindrischer Axoide besprochenen analog sind. Zu dem Ende ist zunächst der allgemein für die Oberflächen höherer Elementenpaare gültige (dem ersten der in §. 15 für den Fall cylindrischer Axoide angeführten Hülfssätze entsprechende) Satz zur Verfügung, dass jede der beiden Elementenflächen die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der gleitend-rollenden Bewegung des mit ihr verbundenen Axoids gegen das mit jener verbundene Axoid nach und nach einnimmt. Er kann unmittelbar dazu dienen, eine Elementenfläche F' zu der gegebenen anderen F zu bestimmen oder

auch praktisch herzustellen, indem ein Werkzeug mit schneidigen Kanten, die nahe neben einander in einer der gegebenen Fläche F congruenten Fläche liegen, gegen einen Körper, aus dem das andere Element oder ein Modell desselben gebildet werden soll, unter allmähliger Annäherung in eine solche relative Bewegung versetzt wird, die der gegebenen relativen Bewegung beider Elemente gleich ist oder wenigstens vollkommen gleich wird, wenn die Annäherung des Werkzeugs an den zu bearbeitenden Körper einen gewissen Grad erreicht hat. Dieses Verfahren ist besonders dann brauchbar, wenn die Fläche F durch mechanische Hülfsmittel leicht herstellbar, wenn sie z. B. eine Schraubenfläche, d. h. eine Fläche ist, die von irgend einer Linie bei gleichzeitiger Drehung und Schiebung um resp. längs einer Axe mit constantem Verhältnisse der elementaren Drehungen und Schiebungen erzeugt wird, insbesondere z. B. zur Herstellung des Schraubenrades als des einen Elementes zu einer gegebenen Schraube als dem anderen Elemente eines Paares. — In allen diesen Fällen berühren sich die Elemente in Linien, nämlich in den Durchschnittslinien der auf einander folgenden Lagen der einen Elementenfläche gegen das andere Element.

Die Sätze unter 2) und 3) in §. 15 lassen sich nicht ebenso unmittelbar auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen, und somit auch nicht die darauf beruhenden Bestimmungsmethoden entsprechender Elementenflächen F, F'. Ist nämlich B ein Berührungspunkt von F, F' und $BP = p$ das Perpendikel auf die Polaxe PQ, so braucht die gemeinsame Normale von F und F' im Punkte B nicht etwa mit BP zusammen zu fallen noch überhaupt eine ganz bestimmte Lage gegen BP oder gegen die Polaxe PQ zu haben. Ist Ω die relative Winkelgeschwindigkeit, v die relative Schiebungsgeschwindigkeit der Elemente um resp. längs der Polaxe, so bewegt sich der Punkt B des einen Elementes gegen das andere nach der Richtung BB', welche senkrecht zu BP ist und mit PQ den Winkel

$$\tau = arctg \frac{p\Omega}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bildet, und damit diese Bewegung unbeschadet andauernder Berührung möglich sei, ist nur nöthig, dass die gemeinsame Berührungsebene von F und F' im Punkte B durch die Gerade BB' hindurch gehe, dass also die gemeinsame Normale BN in der Ebene liege, die zu BB' senkrecht ist, also in der Ebene, die durch BP geht und mit der Polaxe den Winkel $\nu = 90^0 - \tau$ bildet. Bei cylindrischen Axoiden ist $v = 0$, also $\tau = 90^0$, $\nu = 0$; BN muss die Polaxe schneiden, und zwar rechtwinklig schneiden, entsprechend dem Satze 2) in §. 15, sofern dann die Elemente selbst cylindrisch und ihre erzeugenden Geraden mit denen der Axoide parallel sind.

Durch eine bewegliche Linie L können entsprechende Elementenflächen, die sich beständig in der Linie berühren (analog der in §. 17 erklärten Methode der Hülfspolbahnen), als die von der Linie gegen das eine und andere Element beschriebenen Flächen F, F' erhalten werden, wenn ihre Bewegung so geregelt wird, dass die entsprechenden relativen Bewegungsrichtungen jedes Punktes B von L gegen das eine und andere Element stets mit der durch Gl. (1) bestimmten Richtung BB' übereinstimmen. Das ist der Fall, wenn die elementare relative Bewegung von L gegen das eine und folglich dann auch gegen das andere Element stets eine elementare Schraubenbewegung um die Polaxe von solcher Art ist, dass die betreffenden relativen Winkelgeschwindigkeiten und Schiebungsgeschwindigkeiten Ω', v' resp. Ω'', v'' dieselben Verhältnisse zu einander haben wie die entsprechenden Grössen Ω, v für die relative Bewegung der Elemente gegen einander:

$$\frac{p\Omega}{v} = \frac{p\Omega'}{v'}, \text{ also auch } = \frac{p(\Omega + \Omega')}{v + v'} = \frac{\Omega''}{v''} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Mechanisch können so entsprechende Elementenflächen hergestellt werden, indem als Linie L die schneidige Kante eines Werkzeugs benutzt und dieses relativ gegen die zu bearbeitenden Körper gemäss der Bedingung (2) bewegt wird.

Insbesondere ist diese Bedingung dann erfüllt, wenn die Linie L mit dem einen der gegebenen Axoide fest verbunden ($\Omega' = 0$, $v' = 0$, also $\Omega'' = \Omega$, $v'' = v$), z. B. mit einer Geraden dieses Axoids zusammenfallend angenommen wird. Bei Zahnrädern entsteht so eine Verzahnungsart, die analog der Punktverzahnung bei cylindrischen Rädern (die eigentlich auch eine Linienverzahnung ist, da den Punkten der Zahnprofile gerade Linien der Zahnflächen entsprechen) als Linienverzahnung bezeichnet werden kann, ebenso wie dort aber praktisch durch eine Triebstockverzahnung ersetzbar ist, indem die Elementenflächen durch äquidistante Flächen (analog dem Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven nach §. 18), insbesondere also gerade Linien als Elementenflächen durch conaxiale Cylinderflächen ersetzt werden.

Liesse man die Linie L sich so bewegen, dass sie beständig mit der Polaxe zusammenfällt, wodurch wegen $p = 0$ der Bedingung (2) unabhängig von Ω' und v' genügt wird, so beschriebe sie die gegebenen Axoide selbst als zusammengehörige Elementenflächen. Eine rein rollende gegenseitige Bewegung der letzteren würde selbst diesem durch allgemeinere Reibungsräder zu realisirenden Falle nur dann zukommen, wenn die zugleich als Axoide und als Elementenflächen wirksamen Oberflächen derselben cylindrisch oder conisch wären. —

Beschränkt man sich auf die weniger weit gehende Forderung, dass sich die Elementenflächen stets nur in wenigstens einem Punkte berühren sollen, so können dergleichen noch allgemeiner durch eine bewegliche Fläche H erhalten werden als die Umhüllungsflächen F, F' aller Lagen derselben beziehungsweise gegen das eine und das andere Element, ohne dass die Bewegung dieser Fläche an irgend eine Bedingung geknüpft wäre. Indem dieselbe in jeder Lage sowohl F wie F' in je einer Linie L resp. L' berührt (in der Durchschnittslinie dieser und einer unendlich nahe benachbarten Lage von H gegen das betreffende Element), ist es, um principiell, d. h. abgesehen von Rücksichten der Ausführbarkeit und der praktischen Zweckmässigkeit, die Flächen F, F' als Elementenflächen benutzen zu können, nur nöthig, dass die Linien L, L' in der Fläche H sich schneiden, so dass der Schnittpunkt, in dem sich dann F, F' gegenseitig berühren, in jeder dieser Flächen eine gewisse Bahn durchläuft, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird. Sofern nämlich die Bedingung, dass F, F' in ihrem Berührungspunkte B eine gemeinsame Tangente von gewisser durch Gl. (1) bestimmter Richtung BB' haben müssen, in Beziehung auf jede der beiden Flächen die Erfüllung nur einer Gleichung erfordert, kann ihr im Allgemeinen durch eine stetige Folge zusammengehöriger Werthe der zwei Coordinaten entsprochen werden, wodurch die Lage des Punktes B in F oder F' bestimmt ist. Beschränkt wird aber die zulässige Bewegung und die Gestalt der Hülfsfläche H durch weitere Forderungen, z. B. durch die, dass die Berührungslinien L, L' von F und F' mit H nicht nur einen, sondern alle Punkte gemein haben, d. h. sich nicht schneiden, sondern zusammenfallen sollen in einer Linie, in der sich dann F und F' gegenseitig berühren, ferner durch die Forderung, dass diese Berührungslinie eine Gerade sein soll u. s. f. Im folgenden §. werden diese Forderungen für einen speciellen Fall näher in Betracht gezogen.

§. 26. Evolventenflächen von Schraubenlinien als Elementenflächen für Umdrehungshyperboloide als Axoide.

Wenn die Elemente R, R' eines Paares um windschiefe Axen A, A' von unveränderlicher gegenseitiger Lage mit Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' von unveränderlichem Grössenverhältnisse drehbar, ihre Axoide folglich nach §. 24 einschalige Rotationshyperboloide sind, so giebt es gewisse Elementenflächen F, F', die den in §. 19 besprochenen Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Pol-



bahnen analog und ihrer Eigenschaften wegen von besonderem Interesse sind, namentlich als Zahnflächen von Rädern, die dann mit Rücksicht auf die Gestalt ihrer Axoide Hyperboloidräder genannt werden können, während ihre fragliche Verzahnungsart als allgemeine Evolventenverzahnung*) zu bezeichnen ist.

Nach §. 19 konnte die Kreisevolvente als Zahnprofil von Cylinderrädern vermittels einer Geraden entstanden gedacht werden, die in der gemeinsamen Ebene der kreisförmigen Polbahnen sich so bewegt, dass sie einer festen Geraden in derselben parallel bleibt und von ihr mit einer der gemeinsamen Peripheriegeschwindigkeit, also auch den Winkelgeschwindigkeiten der Polbahnen proportionalen Geschwindigkeit sich entfernt, indem dann die fraglichen Profile als Umhüllungscurven der relativen Lagen dieser Geraden gegen die eine und die andere Polbahn sich ergaben. Analog werde hier angenommen, dass, während die Elemente R, R' mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um ihre festen Axen A, A' sich drehen, eine Ebene E sich so bewegt, dass sie einer festen Ebene E_0 parallel bleibt und von derselben mit einer den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' proportionalen Geschwindigkeit u sich entfernt. Die Umhüllungsfläche F aller relativen Lagen von E gegen R ist der Ort der geraden Durchschnittslinien G von je zwei auf einander folgenden relativen Lagen dieser Ebene E, und da je zwei auf einander folgende dieser Geraden G in einer Ebene liegen (in der mittleren von 3 auf einander folgenden Lagen der Ebene E), so muss F eine abwickelbare Fläche sein, also eine Wendecurve (Umhüllungscurve ihrer Geraden) haben, die mit S bezeichnet sei. Ebenso seien G' die Geraden und sei S' die Wendecurve der abwickelbaren Fläche F', die von den relativen Lagen der Ebene E gegen das Element R' umhüllt wird. Sind insbesondere G, G' zwei entsprechende, d. h. solche Gerade, in denen die Flächen F, F' gleichzeitig von der Hülfsebene E berührt werden, so schneiden sich diese Geraden im Allgemeinen in einem gewissen Punkte B, in dem dann F, F' die gemeinsame Berührungsebene E haben, somit sich gegenseitig berühren, so dass sie principiell als Elementenflächen dienen können. Die 3 Grössen, welche die Bewegung der Ebene E bestimmen, nämlich die Geschwindigkeit u und die spitzen Winkel φ, φ', unter denen sie von den Axen A, A' geschnitten werden mag, können dabei einstweilen beliebig gewählt werden.

---

* Auch spiraloidische Verzahnung genannt: siehe J. Pützer, über den spiraloidischen Zahneingriff; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1860, S. 234.

Jede der Flächen F, F' kann als geradlinige Fläche auch von einer Geraden beschrieben werden; um aber die relative Bewegung zu erkennen, die zu dem Ende diese Gerade beziehungsweise gegen R und R' haben muss, sind die Flächen F, F' näher zu bestimmen. Zunächst kann man bemerken, dass die relative Bewegung der Ebene E gegen R, wobei sie F als Umhüllungsfläche erzeugt, zusammengesetzt ist aus einer Drehung um A mit der Winkelgeschwindigkeit ω entgegengesetzt der Drehung von R um A und aus einer Schiebung senkrecht zur festen Ebene E_0 mit der Geschwindigkeit u. Letztere kann zerlegt werden in eine Schiebung mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{u}{\sin\varphi}$$

im Sinne der Axe A und eine Schiebung im Sinne der Ebene E selbst, die aber gleichgültig ist für die Gerade G, in welcher E von einer nächstfolgenden Lage geschnitten wird, so dass auch F bezeichnet werden kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer Ebene, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω entgegengesetzt dem Drehungssinne von R um A gedreht und mit der Geschwindigkeit a längs A verschoben wird. Denkt man sich nun um A als Axe eine Cylinderfläche mit dem Radius ϱ und in derselben eine Schraubenlinie, deren Tangenten unter dem Winkel φ gegen A geneigt sind, so stimmt jene Bewegung von E überein mit der Bewegung einer Normalebene der Cylinderfläche C, die nach und nach durch alle Tangenten G der Schraubenlinie hindurchgeht, wenn nur ϱ so gewählt wird, dass die Winkel- und die Schiebungsgeschwindigkeit um resp. längs A sich wie $\omega : a$ zu einander verhalten, d. h. wenn

$$\varrho\,\omega = a\,tg\,\varphi = \frac{u}{\cos\varphi} \qquad \text{. . . . . (1)}$$

gemacht wird. Hieraus ergiebt sich, dass F die Tangenten- oder Evolventenfläche einer Schraubenlinie ist, die auf der mit A conaxialen Cylinderfläche C zum Radius ϱ liegt, und deren Tangenten unter dem Winkel φ gegen A geneigt sind; die Schraubenlinie selbst ist die Wendecurve S der Fläche F. Ebenso ist F' die Evolventenfläche einer unter dem Winkel φ' gegen ihre Axe A' geneigten Schraubenlinie S' auf einer Cylinderfläche um A' als Axe, deren Radius ϱ' der Gleichung entspricht:

$$\varrho'\omega' = a'\,tg\,\varphi' = \frac{u}{\cos\varphi'}, \qquad \text{. . . . . (2).}$$

unter a' die Geschwindigkeit verstanden, mit welcher der Schnittpunkt von E und A' in dieser Axe sich bewegt.



Die Elementenfläche F, z. B. als Zahnfläche eines Rades R, kann hiernach praktisch hergestellt werden, indem eine gerade Meisselkante, unter dem Winkel φ gegen die Axe A geneigt und mit einem kürzesten Abstande ϱ von derselben, nach der Richtung von A mit einer Geschwindigkeit a bewegt wird, die zu der Winkelgeschwindigkeit ω, mit welcher gleichzeitig der zu bearbeitende Radkörper R um A gedreht wird, das Verhältniss $\varrho\, cotg\, \varphi$ hat. In gleicher Weise ist die Fläche F' herzustellen bei Substitution von $\varphi', \varrho', a', \omega'$ für $\varphi, \varrho, a, \omega$. Dabei können die 4 Grössen φ, ϱ, φ', ϱ', durch welche a und a' bei gegebenen Werthen von ω und ω' bestimmt sind, beliebig so gewählt werden, dass sie nur der einen aus Gl. (1) und (2) folgenden Bedingung genügen:

$$\varrho\omega \cos\varphi = \varrho'\omega' \cos\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Diese an eine Bedingungsgleichung geknüpfte Wahl der 4 Grössen φ, ϱ, φ', ϱ' lässt der Ebene E dieselbe Bewegungsfreiheit wie die bedingungslose Wahl der ihre Bewegung ursprünglich bestimmenden 3 Gössen φ, φ', u.

Jede Berührungsebene T der Cylinderfläche C schneidet die Fläche F in einer Geraden G und zwar rechtwinklig, da sie normal zu der die Fläche F in dieser Geraden G berührenden Normalebene E von C ist; jede Normale von F, weil in einer solchen Normalebene T von F liegend, berührt also die Cylinderfläche C. Ebenso wird C' von jeder Normale der Fläche F' berührt. Die gemeinsame Normale von F, F' im Schnittpunkte B von zwei entsprechenden Geraden G, G' berührt also beide Cylinderflächen C, C', etwa in den Punkten M, M', während sie unter den Winkeln $90^0 - \varphi$ und $90^0 - \varphi'$ beziehungsweise gegen die Axen A und A' geneigt ist, so dass, wenn N den Normaldruck zwischen F und F' im Berührungspunkte B bedeutet, die durch ihn übertragene Arbeitstärke

$$= N\varrho\omega \cos\varphi = N\varrho'\omega' \cos\varphi'$$

ist, die nach Gl. (3) einander gleichen Producte also der pro Einheit des Normaldrucks übertragenen Arbeitstärke gleich sind. In der Geraden MM' als sogenannter Eingriffslinie im Falle von Zahnrädern R, R' bewegt sich der Eingriffspunkt B mit der Geschwindigkeit u im Sinne der Bewegung von E.

Nun giebt es aber 4 gerade Linien MM', welche die Cylinderflächen C, C' berühren und mit A, A' gegebene Winkel $= 90^0 - \varphi$ und $90^0 - \varphi'$ bilden; sie liegen gegen einander wie parallele Kanten eines Parallelepipedum, je zwei auf entgegengesetzten Seiten von C und von C', und es fragt sich, welche von ihnen als Eingriffslinie zu benutzen sei, wenn ausserdem gefordert wird, dass die Flächen F, F' sich in ihrem Berührungspunkte B ihre convexen Seiten zukehren sollen, um (bei Beschränkung auf hin-



länglich kleine Flächentheile) sicher zu sein, dass sie nicht etwa an einer Stelle sich schneiden und somit als Zahnflächen unbrauchbar werden. Zur Beantwortung dieser Frage kann man bemerken, dass, ebenso wie jede Gerade G durch ihren Berührungspunkt mit der Wendecurve S, so die vollständige Fläche F durch die Wendecurve selbst in zwei Theile getheilt wird, die in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, indem der eine Theil mit dem andern dadurch zur Deckung gebracht werden kann, dass er mit seiner Axe A in die entgegengesetzte Lage der letzteren umgewendet und die ihn begrenzende Schraubenlinie S mit der den anderen Theil begrenzenden nämlichen Schraubenlinie S zur Deckung gebracht wird. Von der Seite der Axe A aus gesehen, nach welcher bei Beschreibung der Fläche F durch die Gerade G die Schiebungsgeschwindigkeit a dieser letzteren gerichtet ist, erscheint derjenige Theil von F convex, welcher hierbei von dem Theil der Geraden G beschrieben wird, der sich von der Schraubenlinie S abwickelt. Von derselben Seite der Axe A aus gesehen muss sich das Rad R mit der Cylinderfläche C und der darauf liegenden Schraubenlinie S in solchem Sinne um A drehen, als ob letztere als Schraubenspindel in eine Mutter hineingeschraubt werden sollte, wenn der genannte Theil von F mit vorausgekehrter convexer Seite als treibende Zahnfläche dienen soll, wobei sich B im Sinne von M gegen M' bewegt, diese Gerade MM' also, wenn sie in ihrer eigenen Richtung mit der Geschwindigkeit u gleitend (der Punkt B in ihr fest) gedacht wird, sich bei M von einer Schraubenlinie L abwickelt, die, auf der Cylinderfläche C liegend, die Schraubenlinie S rechtwinklig schneidet. Umgekehrt muss dabei, wenn die getriebene Zahnfläche F' ihre convexe Seite hinterwärts, der treibenden Zahnfläche F zukehren soll, dieselbe Gerade MM' sich bei M' auf eine Schraubenlinie L' aufwickeln, die in der Cylinderfläche C' die Schraubenlinie S' rechtwinklig schneidet. Diesen Bedingungen (analog dem Verhalten der Eingriffslinie mm' in Fig. 19, §. 19 für die Evolventenverzahnung von Cylinderrädern bezüglich auf die den Schraubenlinien L und L' entsprechenden, dort mit E und E' bezeichneten Hülfskreise) entspricht aber nur eine jener 4 Geraden MM', die unter den Winkeln $90^0 - \varphi$ und $90^0 - \varphi'$ beziehungsweise gegen A und A' geneigt die Cylinderflächen C und C' berühren; diese ist dann die zu benutzende Eingriffslinie und bedingt die Stellen, wo die Räder R, R' auf den Axen A, A' zu befestigen sind. Auch ist der Eingriff durch Beschränkung der Zahnlängen so zu begrenzen, dass der Berührungspunkt B beständig zwischen M und M' (ebenso wie in Fig. 19 der Eingriffspunkt p beständig zwischen m und m') liegt. Wegen jener Abhängigkeit der Eingriffslinie vom Drehungssinne der Räder sind

für den umgekehrten Drehungssinn (wobei das vorher treibende zum getriebenen Rade wird) die anderen Seiten der Zähne im Allgemeinen nicht als Zahnflächen zu gebrauchen, ist vielmehr ein eigenes Räderpaar an solchen anderen Stellen der Axen nöthig, dass diejenige jener 4 Geraden MM' jetzt als Eingriffslinie zur Geltung kommt, welche der vorher benutzten diagonal gegenüber, d. h. auf der anderen Seite sowohl von C wie von C' liegt. —

Von besonderem Interesse ist die Frage, welchen Bedingungen die Grössen φ, ϱ, φ', ϱ' ausser der Gleichung (3) genügen müssen, wenn die Flächen F, F' sich beständig in einer Geraden berühren sollen. In dieser müssen dann zwei entsprechende Gerade G, G', also auch zwei Berührungsebenen T, T' der Cylinderflächen C, C' als gemeinsame Normalebene von F, F' zusammenfallen. Eine gemeinsame Berührungsebene T haben aber die Cylinderflächen C, C', sofern ihre Axen A, A' nicht parallel sind, nur dann, wenn sie sich selbst in einem gewissen Punkte D berühren, der dann in der Geraden liegt, welche die Axen A, A' in gewissen Punkten O, O' rechtwinklig schneidet, so dass, wenn wieder e den kürzesten Abstand OO' dieser Axen bedeutet,

$$\varrho + \varrho' = \pm e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sein muss, nämlich

$$\varrho + \varrho' = e,\ \varrho - \varrho' = e \text{ oder } \varrho - \varrho' = -e,$$

jenachdem D in der Strecke OO' oder ausserhalb derselben auf der Seite von O' oder von O liegt. Indem ferner die Berührungsebene T der Cylinderflächen C, C' mit den Axen A, A' parallel, also senkrecht zu OO', die zur Ebene T senkrechte Ebene E folglich parallel mit OO' ist, müssen ihre spitzen Winkel φ, φ' mit den Axen A, A' der Bedingung

$$\varphi + \varphi' = \pm \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

entsprechen, unter ε den Winkel verstanden, den zwei von irgend einem Punkte q der Ebene E aus parallel mit den Axen A, A' so gezogene Richtungen qb, qb' mit einander bilden, dass sie gegen die in gewissem Sinne qp genommene Durchschnittslinie der Ebenen E und bqb' unter den spitzen Winkeln φ, φ' geneigt sind. Dabei hat Gl. (5) die erste, zweite oder dritte der Formen:

$$\varphi + \varphi' = \varepsilon;\ \varphi - \varphi' = \varepsilon;\ \varphi - \varphi' = -\varepsilon,$$

jenachdem qp, qb' oder qb die mittlere der fraglichen 3 Richtungen ist, entsprechend den Figuren 24, 25 und 26 (§. 24) bei Ersetzung der Buchstaben Q, P, B, B', α, α' durch q, p, b, b', φ, φ'.



Durch die Gleichungen (3), (4) und (5) sind die 4 Grössen $\varphi, \varrho, \varphi', \varrho'$ immer noch nicht vollständig als Functionen der gegebenen Grössen e, ε und $\frac{\omega'}{\omega}$ bestimmt; es giebt also unendlich viele selbst solche Verzahnungsarten von Hyperboloidrädern, bei denen sich die Zähne in geraden Linien berühren. Sind durch die Annahme einer vierten Beziehung zwischen den gegebenen und den die Flächen F, F' charakterisirenden Grössen $\varphi, \varrho, \varphi', \varrho'$ die Zahnformen bestimmt worden, so wird durch nachträgliche Aenderung von e oder ε die Erfüllung von Gl. (4) oder (5) zwar gestört, die von Gl. (3) aber nicht: der Eingriff dieser Zähne bleibt ein dem gegebenen constanten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' entsprechender richtiger Eingriff, nur geht die Linienberührung in Punktberührung über.

Würde als vierte Beziehung die Gleichung

$$\omega \sin \varphi = \omega' \sin \varphi'$$

angenommen, so wären sie und die Gleichungen (3), (4), (5) mit den Gleichungen (1), (2) und (4) in §. 24 identisch, wenn $\varphi = \alpha$, $\varphi' = \alpha'$, $\varrho = r$, $\varrho' = r'$ gesetzt wird: statt der Zahnflächen ergäben sich die Axoide selbst als Oberflächen hyperboloidischer Reibungsräder.

Wird als vierte Beziehung die Gleichung

$$\varrho\omega = \varrho'\omega' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

angenommen, so ergeben sich hieraus und aus Gl. (4) die Halbmesser ϱ, ϱ' der Cylinderflächen C, C' ebenso wie nach §. 21, Gl. (4) die Theilkreishalbmesser von Cylinderrädern, deren Axenentfernung $= e$ und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss $= \frac{\omega}{\omega'}$ ist. Aus Gl. (3) und (5) folgt dann

$$\varphi = \varphi' = \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Lässt man φ in die Grenze Null übergehen, so geht die von der Eingriffslinie MM' berührte Schraubenlinie L auf C in das kreisförmige Profil dieser Cylinderfläche mit dem Halbmesser ϱ über, die Zahnfläche F (beschrieben von einer Geraden, welche C berührt und MM' rechtwinklig schneidet, bei der Abwälzung dieser Geraden MM' auf L) in die cylindrische Fläche, deren Profil die Evolvente des Kreises L ist; das Rad R ist dann ein Cylinderrad mit Evolventenverzahnung (§. 19). Mit Punktberührung ist der Eingriff auch eines solchen Rades mit einem Hyperboloidrade auf unendlich mannigfache Weise möglich, indem die Grössen ϱ, ϱ' und φ' nur der einen Bedingung

$$\varrho\omega = \varrho'\omega' \cos \varphi' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

entsprechend anzunehmen sind, in welche die Gl. (3) für diesen Fall übergeht. Für Linienberührung kommen aber nach Gl. (4) und (5) noch die weiteren Bedingungen

$$\varrho \pm \varrho' = \pm e;\ \varphi' = \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

hinzu, woraus dann für ϱ und ϱ' sich dieselben Ausdrücke ergeben wie für die Theilkreishalbmesser von Cylinderrädern, deren Axenentfernung $= e$ und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss $= \frac{\omega}{\omega' \cos \varepsilon}$ ist. Dieser (von Olivier in seiner *théorie géométrique des engrenages* für sich erörterte) Eingriff ist übrigens an die Voraussetzung $\varepsilon < 90^0$ gebunden.

Sind endlich beide Räder Cylinderräder mit Evolventenverzahnung, d. h. $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$, so geht die Bedingung (3), der die Halbmesser ϱ, ϱ' ihrer Hülfskreise (Hülfscylinder) zu entsprechen haben, in die Form (6) über. Sollen sich die Zähne in geraden Linien berühren, so müssen die Axen A, A' parallel sein, entsprechend $\varepsilon = 0$ nach Gl. (5), während dann Gl. (4) als Bedingung dafür, dass die Cylinderflächen C, C' eine gemeinsame Berührungsebene haben, fortfällt. Bei geänderter Entfernung e der parallelen Axen findet deshalb ein solcher Eingriff nach wie vor mit Linienberührung in richtiger Weise, einem gegebenen Verhältnisse $\frac{\omega}{\omega'}$ entsprechend, statt, während er durch gleichzeitige oder alleinige Aenderung von ε in einen richtigen Eingriff mit Punktberührung übergeht.

II. Unselbständige Elementenpaare und kinematische Ketten.

Wenn der im §. 1 aufgestellte Begriff einer Maschine allgemein zutreffend sein soll, wenn also jede Maschine als eine zwangläufig geschlossene kinematische Kette mit einem festgestellten Gliede soll betrachtet werden können, so ist nun eine nachträgliche Erweiterung der Voraussetzungen nöthig, die dem Begriffe einer zwangläufig geschlossenen Kette bisher zu Grunde lagen; insbesondere gilt das in Betreff der seitherigen Voraussetzungen, dass die Elemente eines Paares und die Glieder einer Kette durchaus starre Körper seien, sowie dass die Geschlossenheit eines Paares oder einer Kette eine selbständige, d. h. durch die Gestalt der Elemente resp. durch die Verbindungsweise der Glieder allein vermittelte sei.



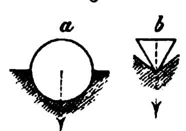
a. Unselbständige Elementenpaare.

§. 27. Kraftschlüssige Elementenpaare.

Während die selbständige Geschlossenheit eines Elementenpaares darin besteht, dass jede mit dem kinematischen Charakter des Paares unverträgliche gegenseitige Bewegung seiner Elemente durch deren Starrheit und Gestalt verhindert wird, heisst ein Elementenpaar nach Reuleaux kraftschlüssig, wenn bei materiell nur unvollständig ausgeführter gegenseitiger Stützung der Elemente dieselbe in einem gewissen Sinne nicht sowohl durch den Widerstand vermittelt wird, den die Elemente selbständig vermöge ihrer Gestalt und Starrheit ihrer relativen Bewegung in diesem Sinne entgegensetzen, sondern durch eine anderweitige Kraft, die sogenannte Schliessungskraft. Dabei können zwei Fälle stattfinden, indem die Schliessungskraft entweder nur die Aufgabe hat, die beiden Elemente und somit ihre Axoide in Berührung zu erhalten, oder zugleich dazu dienen soll, eine bestimmte gegenseitige Bewegung dieser Axoide zu erzwingen, insbesondere z. B. dieselben, wenn sie abwickelbare Flächen sind, zu relativer Rollung zu nöthigen unter Ausschluss jeder relativ gleitenden Bewegung.

Erstere Function der Schliessungskraft genügt zur Sicherung des kinematischen Charakters eines Elementenpaares, dessen Axoide zusammenfallen, also eines niederen Paares. So können ein Cylinder mit horizontaler Axe und ein nur im unteren Theile seiner Oberfläche ihn berührender, theilweise (höchstens halb) ausgeführter Hohlcylinder (z. B. das offene, deckellose Lager einer horizontalen Welle, Fig. 27, a) durch die Wirkung der Schwerkraft als Schliessungskraft zu einem kraftschlüssigen Cylinderpaare werden resp. zu einem kraftschlüssigen Drehkörperpaare, wenn die axiale Gleitbarkeit auf bekannte Weise verhindert ist. — Unter Umständen ist die Wahl eines unselbständigen kraftschlüssigen anstatt eines selbständig geschlossenen Paares nicht nur zur Vereinfachung zulässig, sondern durch anderweitige Rücksichten bedingt. So kann ein Cylinderpaar als Umschlusspaar nicht so ausgeführt werden, dass die Axoide (zwei in der geometrischen Axe zusammenfallende Gerade) in den Oberflächen liegen, die Elemente sich also mit ihren Axoiden selbst materiell berühren und somit ohne Gleitung und entsprechende Reibung nur aufeinander rollen, wogegen dies dadurch möglich ist, dass das Paar als Keilschneide mit zugehöriger Pfanne (Fig. 27, b) aus-

Fig. 27.



geführt wird, wie es zu möglichstem Ausschluss von Reibung bei Waagen üblich ist und dann nothwendig einen unselbständigen Kraftschluss erfordert.

Wenn aber bei höheren Elementenpaaren ihre abwickelbaren Axoide durch die Schliessungskraft nicht nur in Berührung erhalten, sondern auch zu reiner Rollung genöthigt werden sollen, so kann das diese Kraft nicht unmittelbar, sondern nur vermittels der ihr entsprechenden Reibung, wie es insbesondere bei Reibungsrädern (§. 15), z. B. bei den Rädern von Fuhrwerken der Fall ist. Ein solches Rad bildet mit der Fahrbahn, die als Stück eines Rades von unendlich grossem Halbmesser betrachtet werden kann, ein kraftschlüssiges höheres Elementenpaar mit cylindrischen Axoiden, wobei wieder die Schwerkraft als Schliessungskraft dient, während die ihr entsprechende Reibung bei hinlänglicher Grösse das Gleiten des Rades auf der Fahrbahn verhindert.

§. 28. Bildsame Körper als Paarelemente.

Wenn auch streng genommen alle, selbst festen Körper unter der Einwirkung äusserer Kräfte einer gewissen Deformation unterworfen sind, so erhalten doch die aus ihnen bestehenden Maschinentheile im Allgemeinen solche Dimensionen, dass sie durch die wirksamen Kräfte kaum merklich deformirt werden, und sie deshalb als Paarelemente ohne in Betracht kommenden Fehler als starr betrachtet werden können. Unter bildsamen Körpern dagegen, um die es sich hier handelt, sollen solche verstanden werden, die in Folge ihrer inneren Beschaffenheit oder ihrer Gestalt in hohem Grade und schon durch mässige Kräfte deformirt werden können. Dass auch solche Körper zur Elementenbildung u. U. geeignet sind, ist die Folge der im vorigen §. besprochenen Zulässigkeit des Kraftschlusses unselbständiger Paare, sofern nur die fraglichen Körper sich gegen Kräfte, die als Schliessungskräfte in gewissem Sinne auf sie wirken, in ähnlichem Grade widerstandsfähig verhalten wie jene bei genügenden Dimensionen als starr betrachteten festen Körper allseitig widerstandsfähig sind.

Bildsame Körper von (innerhalb praktischer Grenzen) beliebig zu steigernder Widerstandsfähigkeit gegen Zugkräfte, von Reuleaux deshalb Zugkraftorgane genannt, sind insbesondere Seile (aus Faserstoffen oder Draht), Bänder (aus Geweben, aus Metallen oder — als Riemen — aus Leder) und Ketten (Gliedketten, Gelenkketten). Sie können mit abgerundeten starren Körpern, längs denen sie gleiten, oder mit Trommeln, auf die sie sich auf- oder von denen sie sich abwickeln, oder mit Rollen bei



gleichzeitig an verschiedenen Stellen stattfindender Auf- und Abwickelung gepaart werden, indem solche an und für sich unselbständige Paare durch Kräfte, die am Seil, Band oder an der Kette ziehend wirken, geschlossen werden. Bei der Rolle mit gleichzeitig sich auf- und abwickelndem Zugkraftorgan haben die Schliessungskräfte nicht nur, wie in den übrigen Fällen, die Berührung beider Theile, sondern auch (durch Reibung) die Verhinderung des Gleitens zu vermitteln. Indem übrigens das jeweils ohne Gleiten auf der Rolle liegende Stück des Zugkraftorgans kinematisch als mit der Rolle fest verbunden, d. h. als ein Theil derselben zu betrachten ist, müssen das auflaufende und das ablaufende Stück des Zugkraftorgans als besondere Elemente betrachtet werden, die mit der als Verbindung von zwei gleichen Elementen zu betrachtenden Rolle kraftschlüssig gepaart sind, gleich als ob letztere eine conaxiale feste Verbindung von zwei gleichen Rollen wäre, auf deren eine ein Zugkraftorgan sich aufwickelt, während ein gleich langes Stück eines anderen von der anderen Rolle sich abwickelt.

Bildsame Körper, die nur gegen Druckkräfte eine gewisse Widerstandsfähigkeit haben und deshalb mit Reuleaux als Druckkraftorgane bezeichnet werden mögen, sind namentlich Flüssigkeiten verschiedener Art. Sie können mit Hohlkörpern (Gefässen, Röhren) gepaart werden, indem die Schliessung solcher an und für sich unselbständiger Elementenpaare durch Kräfte, die auf die Flüssigkeit drückend wirken, vermittelt wird. Während das Zugkraftorgan durch die Zugkräfte in beständiger Berührung mit der Aussenfläche des zugehörigen starren Elementes erhalten wird, wird das Druckkraftorgan durch die Druckkräfte in Berührung mit der Innenfläche des zugehörigen starren Hohlkörpers erhalten, und so in beiden Fällen die das Elementenpaar charakterisirende gegenseitige Stützung beider Elemente bewirkt.

Solche bildsame Körper, denen das durch diese Bezeichnung ausgedrückte Verhalten nur vermöge ihrer Gestalt, nicht vermöge ihrer inneren Beschaffenheit zukommt, können unter Umständen als Zugkraft- oder als Druckkraftorgane auftreten je nach der Art, wie sie mit einem starren Körper gepaart werden. So hat ein Metallband die Function eines Zugkraftorgans, wenn es in Berührung mit der (äusseren) Oberfläche eines Cylinders an beiden Enden von tangentialen Zugkräften, dagegen die Function eines Druckkraftorgans, wenn es in Berührung mit der (inneren) Oberfläche eines Hohlcylinders beiderseits von tangentialen Druckkräften angegriffen wird; in beiden Fällen kann es z. B. als Bremsband dienen.

Ausser den Zug- und Druckkraftorganen sind endlich noch Federn als solche bildsame Körper zu erwähnen, die im Gegensatz zu jenen für



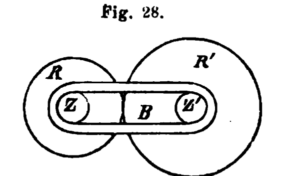
beliebige Angriffsweisen äusserer Kräfte der Art durch entsprechende Gestaltung widerstandsfähig gemacht werden können, dass sie als Elemente kraftschlüssiger Paare geeignet werden, immer aber unter Einschränkung auf eine einzige Angriffsweise in jedem besonderen Falle. Namentlich finden sie in Verbindung mit starren Körpern als Paarelemente Verwendung, um unselbständige Elementenpaare durch Federkraft zu schliessen, so bei Kolbendichtungen, Sperrklinken etc.

§. 29. Kettenschlüssige Elementenpaare.

Ebenso wie nach einer schon im §. 1 gemachten Bemerkung eine kinematische Kette zwangläufig geschlossen sein kann, ohne dass alle ihre einzelnen Elementenpaare zwangläufig sind, kann sie es auch sein, ohne dass ihre sämmtlichen Elementenpaare selbständig geschlossen oder kraftschlüssig, nämlich durch äussere, von der Kette selbst unabhängige Kräfte geschlossen zu sein brauchen, indem vielmehr solche Elementenpaare als kettenschlüssige eben durch die kinematische Verkettung ihrer Elemente geschlossen werden.

So können z. B. zwei Cylinderräder R, R' zwar so verzahnt werden, dass ihre Profile nach Richtung der gemeinsamen Tangente beider Theilkreise in beiderlei Sinn, sowie auch nach der Centrale gegen Annäherung sich stützen. Sie bleiben aber noch ungestützt nach Richtung der Centrale bezüglich auf Entfernung von einander, bilden also ein an und für sich ungeschlossenes oder unselbständiges Paar. Um dasselbe zu schliessen, können die Räder mit centralen Zapfen (Drehkörpern) Z resp. Z' versehen und diese durch einen sie gemeinschaftlich umschliessenden Bügel B verbunden werden: Fig. 28. Auf solche Weise entsteht eine zwangläufig geschlossene Kette von 3 Gliedern RZ, B, $Z'R'$, in der nun auch die beiden Räder eine vollständige Stützung erhalten haben ohne Beschränkung der ihren Axoiden entsprechenden gegenseitigen Beweglichkeit, und zwar enthält diese Kette Elementenpaare, die sogar alle 3 unselbständig sind.

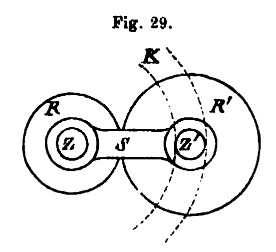
Fig. 28.



Ist aber, wie gewöhnlich, ein Spielraum zwischen den Zahnscheiteln jedes Rades und dem Grunde der Zahnlücken des anderen vorhanden, so dass beide sich nur im Sinne der gemeinsamen Theilkreistangente stützen, so wird die Schliessung der Kette und damit des Räderpaares R, R' herbeigeführt, indem die beiden unselbständigen Drehkörperpaare Z, B und Z', B

durch selbständige Z, S und Z', S (Fig. 28) ersetzt werden, nämlich der die beiden Zapfen gemeinschaftlich umfassende Bügel B durch einen Steg S ersetzt wird, der die Zapfen mit entsprechenden Hohlformen einzeln rings umschliesst, wobei im Uebrigen die Gestaltung dieses Steges kinematisch gleichgültig ist, derselbe insbesondere auch, wie es gewöhnlich der Fall ist, aus je zwei Zapfenlagern bestehen kann, von denen die je zwei Zapfen der beiden Radwellen umschlossen, und welche durch eine Lagerplatte oder anderweitig durch den festen Boden anstatt des Steges unter sich verbunden werden.

Fig. 29.



Uebrigens könnte das in Rede stehende, aus den gezahnten Rädern R, R' bestehende, unselbständige Elementenpaar auch schon durch eine zweigliedrige Kette geschlossen werden, indem etwa statt des Steges S und des einen Zapfens Z das zu letzterem gehörige Rad R mit einer Scheibe fest verbunden, und diese mit einer (in Fig. 29 punktirt angedeuteten) mit R concentrischen kreisförmigen Rinne K versehen würde, deren mittlerer Halbmesser = der Axenentfernung von R und R', und deren Querschnitt (Meridianschnitt) dem Meridianschnitt des Zapfens Z' congruent, deren Oberfläche nämlich, insoweit sie hier als Berührungsfläche mit dem Zapfen Z' in Betracht kommt, die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die Oberfläche (Umfläche) des letzteren bei irgend einer der relativen Beweglichkeit des Paares R, R' entsprechenden Bewegung des Gliedes $R'Z'$ gegen das Glied RK der Kette einnimmt. Die Elemente K und Z' bilden dann ein höheres Paar von zweifacher Beweglichkeit, wodurch die je zwei niederen und zwangläufigen Elementenpaare S, Z und S, Z' in ihrer resultirenden Function ersetzt werden. Ob solcher kinematischen auch eine constructive Vereinfachung der Kette und überhaupt ein praktischer Vortheil entspreche, ist eine andere Frage, auf die es hier zunächst nicht ankommt.

b. Unselbständige kinematische Ketten.

Unter dieser Bezeichnung sollen solche kinematische Ketten verstanden werden, die entweder **unbedingt**, nämlich in allen gegenseitigen Lagen ihrer Glieder und unabhängig von ihrer besonderen Verwendungsart als Getriebe, oder nur **bedingungsweise**, nämlich in gewissen gegenseitigen Lagen ihrer Glieder bei gewissen Verwendungsarten als Getriebe besonderer Hülfsmittel zu ihrer zwangläufigen Schliessung bedürfen.

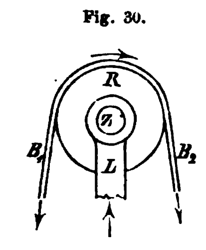


§. 30. Kraft- und Kettenschluss offener Ketten.

Unbedingt unselbständig sind namentlich offene Ketten, die durch ähnliche Mittel, wie unselbständige Elementenpaare, nämlich durch äussere Kräfte oder durch weitere kinematische Verkettung zwangläufig geschlossen werden können. Ein Beispiel ist die dreigliedrige Kette, Fig. 29, welche aus den in Eingriff befindlichen Zahnrädern R, R' und aus dem ihre Zapfen Z und Z' mit entsprechenden Hohlformen umschliessenden Stege S besteht, falls zwischen den Zahnflanken ein gewisser Spielraum vorhanden, die Zahndicke jedes Rades nämlich kleiner, als die Weite der Zahnlücken des anderen ist; die Schliessung erfolgt hier durch die Theilrisskraft, wodurch bei stetiger Drehung in gewissem Sinne die Zähne des einen mit denen des anderen Rades in Berührung erhalten werden.

Eine unselbständige Kette mit Zugkraftorgan ist beispielsweise eine drehbar gelagerte Rolle mit einem darüber hingeführten gespannten Riemen: Fig. 30. Sie besteht aus den 4 Gliedern: auflaufendes Riemenstück B_1, ablaufendes Riemenstück B_2, Rolle R mit Zapfen Z, Lagerkörper L; sie wird geschlossen durch Zugkräfte an den Riemen B_1 und B_2 nebst einer Gegenkraft am Lager L. Von ihren 4 Gliedern ist RZ ternär, durch R kraftschlüssig mit B_1 und mit B_2, durch Z selbständig mit L gepaart; die übrigen 3 Glieder sind einfache Elemente.

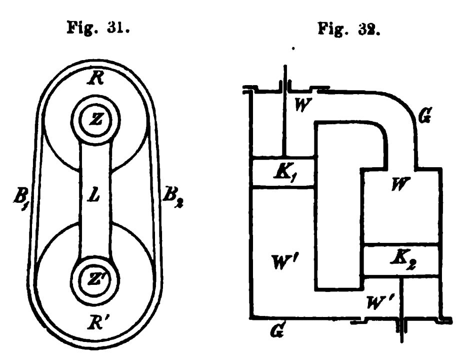
Fig. 30.



Eine viergliedrige unselbständige Kette mit Druckkraftorgan ist z. B. ein mit Wasser W gefülltes geschlossenes Gefäss G, in welches durch prismatische Oeffnungen zwei entsprechende Kolben K_1 und K_2 eintreten; die Schliessung der Kette erfolgt durch Druckkräfte an K_1 und K_2 nebst einer Gegenkraft an G. Die beiden Glieder G und W sind ternär (enthalten je 3 Elemente), indem G selbständig mit K_1 und K_2 und ausserdem kraftschlüssig mit W, das Wasser W aber ausser mit G auch mit K_1 und K_2 kraftschlüssig gepaart ist; K_1 und K_2 sind binäre Glieder. — Die Vergleichung dieser Kette mit der vorerwähnten (Fig. 30) lässt K_1 und B_1, K_2 und B_2, W und RZ, G und L als entsprechende Glieder erkennen. W und RZ sind beide ternär; die zwei Elemente, von denen das eine zu K_1 im Vergleich mit B_1, das andere zu K_2 im Vergleich mit B_2 hier hinzugekommen ist, sind gepaart mit den zwei Elementen, die G hier mehr enthält, als L dort.

Bei allen diesen Beispielen wurde die unselbständige Kette durch

äussere Kräfte geschlossen. Die Ersetzung dieses Kraftschlusses durch Kettenschluss kann namentlich bei den zwei letzten Beispielen durch Verdoppelung geschehen, nämlich durch Verbindung von zwei gleichartigen kraftschlüssigen Ketten in solcher Weise, dass die Schliessungskräfte der einen denen der anderen entgegengesetzt gleich sind und deshalb durch innere Kräfte der vereinigten betreffenden Glieder ersetzt werden können. So geht aus zweien der besprochenen viergliedrigen kraftschlüssigen Ketten mit Zugkraftorgan (Riemen) durch Verbindung der zwei einzelnen zu einem endlosen Riemen und der zwei Lagerkörper durch einen Steg, eine gemeinsame Lagerplatte oder dergl. das bekannte Riemengetriebe (Fig. 31) hervor, d. i. eine fünfgliedrige zwangläufig geschlossene Kette, die nun als solche (d. h. als Kette, nicht bezüglich ihrer einzelnen Elemente) vom Kraftschluss befreit ist, und von deren Gliedern RZ und $R'Z'$ ternär, L, B_1 und B_2 binär sind. — Auf ähnliche Weise geht aus



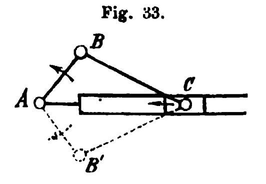
zweien der besprochenen viergliedrigen kraftschlüssigen Ketten mit Druckkraftorgan (Wasser) durch Verbindung von je zwei einseitig wirkenden zu einem zweiseitig wirkenden (d. h. beiderseitig von Wasser berührten) Kolben und der zwei Gefässe zu einem zusammenhängenden Gefässe (durch Leitungsröhren verbundene Hohlcylinder darstellend) das doppelt wirkende Wassergestänge (Fig. 32) hervor, gleichfalls eine fünfgliedrige zwangläufig geschlossene. als solche vom Kraftschluss befreite Kette, bestehend aus den unter sich getrennten Wassermassen W und W' als ternären Gliedern (den auch ternären Gliedern RZ und $R'Z'$ von Fig. 31 entsprechend), ferner dem Gefässe G als quaternärem Gliede (dem binären L in Fig. 31 entsprechend) und den zwei Kolben K_1 und K_2 als ternären Gliedern (den binären B_1 und B_2 in Fig. 31 entsprechend). — Durch verschiedene Durchmesser der Rollen oder der Kolben können dort die Winkelgeschwindigkeiten, hier die Translationsgeschwindigkeiten derselben in beliebige Verhältnisse gesetzt werden, die dadurch bedingt sind, dass ebenso wie bei Fig. 31 die Riemen B_1 und B_2 stets gleiche Weglängen, so bei Fig. 32 die ihnen entsprechenden Kolben K_1 und K_2 stets gleiche Räume durchlaufen.

§. 31. Todlagen von Getrieben.

Die zweite Art von Unselbständigkeit kinematischer Ketten, welche als nur bedingungsweise ihnen zukommend oben hervorgehoben wurde, beruht auf dem folgenden Umstande. Wenn eine im Allgemeinen zwangläufig geschlossene Kette durch Feststellung eines gewissen Gliedes zum Mechanismus gemacht ist, und ein anderes Glied durch eine dasselbe angreifende äussere Kraft in gewissem Sinne in Bewegung gesetzt, der Mechanismus somit zum Getriebe wird (§. 1), so werden auch seine übrigen nicht festgestellten Glieder in bestimmter Weise mitbewegt, indem die das eine Glied angreifende Kraft von Glied zu Glied bis zum festgestellten Gliede durch die ganze Kette hindurch unter entsprechender Grössen- und Richtungsänderung und Zerlegung in Componenten übertragen wird. Dabei kann es nun der Fall sein, dass in gewissen Lagen des Getriebes die Richtungslinie der durch eines seiner Glieder übertragenen Kraft durch Stützpunkte aller bis zum festen Gliede noch folgenden (wenigstens zwei) Elementenpaare hindurchgeht, so dass dann die fragliche Kraft von dem betreffenden Gliede auf das festgestellte Glied übertragen wird ohne die dazwischen liegenden Glieder (resp. das wenigstens eine dazwischen liegende Glied) zu irgend einer Bewegung anzutreiben, während von solcher Lage aus diese Glieder durch anderweitige Kräfte in beiderlei Sinn bewegt werden können, ohne dass dadurch auch die übrigen in ihrem Bewegungssinne beeinflusst würden. Solche Lagen eines Getriebes heissen **Todlagen** desselben, weil es in ihnen seinen übrigens vorhandenen Charakter als zwangläufige Kette eingebüsst hat, in Beziehung auf diese zur Erreichung des betreffenden machinalen Zweckes wesentliche Eigenschaft es also gewissermassen todt ist.

Dass bei dem hier vorausgesetzten (freilich nicht allgemein üblichen) begrifflichen Unterschiede zwischen Mechanismus und Getriebe die Todlagen nicht sowohl gewissen kinematischen Ketten oder selbst gewissen daraus hervorgehenden Mechanismen als solchen, sondern im Allgemeinen nur gewissen Verwendungsarten derselben als Getriebe zukommen, mag an einem Beispiel nachgewiesen werden. Es werde z. B. der bekannte **Schubkurbelmechanismus** (Fig. 33) betrachtet, bestehend aus Kurbel, Koppel, Schieber und dem festgestellten, einerseits das Kurbellager, andererseits die geradlinige Schieberbahn enthaltenden Stege; Steg und Kurbel, Kurbel und Koppel, Koppel und Schieber sind durch Drehkörper-

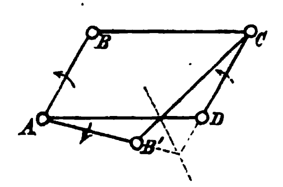
Fig. 33.



paare, deren parallele Axen beziehungsweise mit *A*, *B*, *C* bezeichnet seien, verbunden, Schieber und Steg durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen *A*, *B* und *C* gerichtet und mit der Ebene *AC* parallel ist. Dieser Mechanismus liefert ein unbedingt selbständiges Getriebe, wenn die Kurbel durch die treibende Kraft unmittelbar gedreht wird (Kurbelschubgetriebe), dagegen hat das Getriebe, welches aus demselben Mechanismus dadurch hervorgeht, dass der Schieber durch die treibende Kraft hin und her bewegt wird (Schubkurbelgetriebe), zwei Todlagen, den Grenzlagen des Schiebers entsprechend. In diesen Lagen wird die den Schieber angreifende Kraft ohne Zerlegung und Richtungsänderung durch die Koppel und die Kurbel auf den festen Steg übertragen, indem ihre Richtungslinie, die jetzt in einer Ebene liegenden Axen *A*, *B*, *C* rechtwinklig schneidend, durch die Stützpunkte hindurchgeht, in denen sich die Elemente der den Schieber mit der Koppel, diese mit der Kurbel, diese mit dem Stege verbindenden Paare berühren; Kurbel und Koppel sind dann je von entgegengesetzt gleichen Kräften angegriffen, die sich an ihnen Gleichgewicht halten, während durch anders gerichtete, z. B. die Kurbel in fraglicher Lage angreifende Kräfte sie selbst und die Koppel im einen oder anderen Sinne aus jener Lage herausbewegt werden können unbeschadet der in beiden Fällen gleichen Bewegung des Schiebers.

In Betreff dieses den Todlagen eines Getriebes eigenthümlichen Umstandes, dass von ihnen aus ein Theil der Kettenglieder in beiderlei Sinn bewegt werden kann, unbeschadet des stets gleichen Bewegungssinnes der übrigen, verdient der Fall besonders hervorgehoben zu werden, dass bei jenen entgegengesetzten Bewegungen des einen Theils der Kettenglieder der kinematische Charakter des Getriebes ein anderer wird, einen Wechsel erfährt, in welchem Falle mit Reuleaux die betreffende Todlage eine Wechsellage des Getriebes genannt werden möge. Die Todlagen des so eben besprochenen Schubkurbelgetriebes (Fig. 33) haben diesen Charakter nicht; denn wenn dasselbe von einer solchen Lage aus mit dem einen oder anderen Drehungssinne der Kurbel in die zweite Todlage übergeht, so sind die aufeinander folgenden Configurationen der Kette in beiden Fällen einander symmetrisch gleich, und gleichen Wegen des Schiebers entsprechen in beiden Fällen gleich grosse Drehungswinkel der Kurbel. Handelt es sich aber z. B. um einen Zwillingskurbelmechanismus (Fig. 34), bestehend aus zwei (von Axe zu Axe gerechnet) gleich langen Kurbeln *AB* und *CD*, die einerseits durch eine

Fig. 34.



Koppel *BC*, andererseits durch einen ebenso langen festgestellten Steg *AD* vermittels 4 Drehkörperpaare mit parallelen Axen *A*, *B*, *C*, *D* verbunden sind, so hat das durch primäre Drehung der einen oder anderen Kurbel aus diesem Mechanismus hervorgehende Getriebe auch zwei Todlagen, dem Zusammenfallen der Ebene *BC* mit der festen Ebene *AD* entsprechend, die aber hier in der That Wechsellagen sind. Denn wenn das Getriebe aus einer dieser Lagen in die andere, während die treibende Kurbel *CD* stets in gleichem Sinne rotirt, das eine Mal so übergeht, dass die getriebene Kurbel (*AB* in Fig. 34) der treibenden beständig parallel bleibt, das andere Mal so, dass die getriebene Kurbel (*AB'* in Fig. 34) der treibenden beständig symmetrisch gegenüber liegt in Beziehung auf die Gerade, welche die Schnittpunkte der gleichen Gegenseiten *AB'*, *CD* und *B'C*, *DA* des Vierecks *AB'CD* verbindet, so entsprechen gleichen Drehungswinkeln der treibenden Kurbel nicht auch in beiden Fällen gleiche Drehungswinkel der anderen. Die Getriebe beider Fälle haben verschiedene kinematische Charaktere und sind etwa als Parallelkurbelgetriebe und als symmetrisches Zwillingskurbelgetriebe ausdrücklich zu unterscheiden.

§. 32. Zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen.

Die einem Getriebe in seinen Todlagen fehlende Zwangläufigkeit kann durch verschiedene Mittel herbeigeführt werden: durch Kraftschluss, durch Kettenschluss, oder durch Elementenpaare, die nur in der Nähe der Todlagen zu gegenseitiger Stützung gelangen und dadurch die Kette zwangläufig schliessen.

Der Kraftschluss kann zuweilen durch Kräfte bewirkt werden, die nur zeitweise bei der Annäherung des Getriebes an eine Todlage zur Wirkung kommen, z. B. durch Gewichte, denen die Unterstützung entzogen wird. Häufiger wird er aber mittelbar durch die lebendige Kraft einer mit dem Getriebe in beständiger Bewegung befindlichen, besonders einer rotirenden Masse, eines sogenannten Schwungrades bewirkt (bei dem Schubkurbelgetriebe z. B. durch ein Schwungrad auf der Kurbelwelle), und zwar insbesondere dann, wenn es darauf ankommt, dass die Todlagen nicht nur überhaupt mit bestimmtem Bewegungssinne jedes Gliedes, sondern zugleich mit möglichst unveränderlichen Geschwindigkeiten gewisser Glieder überschritten werden, eine Aufgabe, die indessen nicht blos kinematischer, sondern zugleich mechanischer Natur ist.

Dieser Massenkraftschluss, wie er als ein durch die lebendige Kraft bewegter Massen vermittelter Kraftschluss näher bezeichnet werden

kann, ist für sich allein unzureichend, wenn das Getriebe von jeder, insbesondere also auch von einer Todlage aus erst in Bewegung soll gesetzt werden können. Der dann meistens angewendete Kettenschluss besteht in der Zuhülfenahme eines zweiten, dem ersten gleichen Getriebes, welches mit jenem so verbunden wird, dass niemals beide zugleich in Todlagen sich befinden. Sofern das auf unendlich mannigfache Weise geschehen kann, bleibt die nähere Bestimmung der besten Verbindungsweise beider Getriebe (ebenso wie beim Kraftschluss durch ein Schwungrad die Bestimmung der zweckdienlichsten Masse und Massenvertheilung desselben) ein vorwiegend mechanisches Problem, bedingt durch die Anforderungen, die an den Gang der betreffenden Maschine, an das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeiten gewisser Bestandtheile derselben gestellt werden. So können die Todlagen eines Schubkurbelgetriebes zwangläufig überschritten werden durch Verbindung von zwei gleichen solchen Getrieben mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle (z. B. bei sogenannten Zwillingsdampfmaschinen), die dann behufs möglichst gleichförmiger Rotation dieser Welle so angeordnet zu werden pflegen, dass die Summe des spitzen Winkels α, unter dem die beiden Kurbelrichtungen, und des spitzen Winkels β, unter dem die beiden Schubrichtungen gegen einander geneigt sind, $= 90^0$ ist, dass insbesondere $\alpha = 90^0$ (rechtwinklig versetzte Kurbeln) für $\beta = 0$ (gleiche Schubrichtungen), oder $\alpha = 0$ (gleich gerichtete Kurbeln, die dann auch zu einer beiden Getrieben gemeinschaftlichen vereinigt werden können) für $\beta = 90^0$ (rechtwinklig sich kreuzende Schubrichtungen) ist.

Der hier zunächst erwähnte Kettenschluss, insofern er in der Zuhülfenahme eines zweiten Getriebes, also eines selbst durch eine äussere Kraft angegriffenen Mechanismus besteht, kann näher als Kraftkettenschluss bezeichnet und von einem reinen Kettenschluss unterschieden werden. Gewöhnlich ist er mit Massenkraftschluss combinirt, so bei Zwillingsdampfmaschinen mit einem Schwungrade, das dann aber leichter sein darf, als unter sonst gleichen Umständen die Schwungräder der isolirten Maschinen zusammen. Auch bei Locomotiven (Zwillingsdampfmaschinen, dem Falle $\alpha = 90^0$, $\beta = 0$ entsprechend) ist zugleich Massenkraftschluss vorhanden, bewirkt durch die lebendige Kraft des ganzen Zuges unter Vermittelung der Reibung zwischen den Triebrädern und den Schienen.

Der reine Kettenschluss zur zwangläufigen Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes besteht in der Verbindung des letzteren mit einem anderen, dem seinigen gleichartigen Mechanismus, der nicht auch durch eine besondere äussere Kraft angegriffen wird, vielmehr nur dazu dient, die Uebertragung der Kraft und der Bewegung von dem unmittelbar an-



gegriffenen zu dem festgestellten Gliede des ursprünglichen Mechanismus unter diesem und dem hinzugefügten so zu vertheilen, dass sie in den Todlagen des ersteren von letzterem allein und zwar zwangläufig übernommen werden kann. So können die Todlagen des Parallelkurbelgetriebes $ABCD$ (Fig. 34, §. 31) kettenschlüssig überschritten werden durch Verbindung mit einem Mechanismus gleicher Art, der mit jenem den Steg AD gemein hat, und dessen unter sich (nicht nothwendig auch mit AB und CD) gleich lange Kurbeln AB' und $C'D$ beziehungsweise mit den Kurbeln AB und CD durch die gemeinschaftlichen Axen A und D in solcher Weise fest verbunden sind, dass die gleichen Winkel BAB', CDC' von 0 und 180° verschieden, insbesondere etwa $= 90^0$ sind (Locomotiven mit gekuppelten Axen); oder auch dadurch, dass eine dritte Kurbel $A'B'$, die (in einer Ebene mit den ebenso langen Kurbeln AB und CD) um eine fest gelagerte, mit A und D parallele, aber nicht in derselben Ebene liegende Axe A' drehbar ist, mit den Kurbelzapfen B und C durch Koppeln von den Längen $B'B = A'A$ und $B'C = A'D$ verbunden wird, die dann auch mit der ersten Koppel BC zu einem dreieckigen Rahmen BCB' vereinigt werden können.

Bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe ist ein analoges Verfahren, die Ueberschreitung der Todlagen durch Kettenschluss zu vermitteln, wegen des variablen Verhältnisses entsprechender Drehungswinkel der Kurbeln nicht ausführbar; dagegen führt die Schliessung durch Elementenpaare hier zum Ziele. Bei dieser Methode im Allgemeinen müssen von den Axoiden der aushülfsweise vorübergehend zu paarenden zwei Kettenglieder G, G' (jedenfalls solcher, die nicht schon beständig gepaart sind, also nicht benachbarter Glieder) kleine Stücke beiderseits von ihrer Berührungslinie (Polaxe) in der Todlage des Getriebes bekannt sein, insbesondere im gewöhnlichen Falle cylindrischer Axoide kleine Stücke ihrer Querschnitte (Polbahnen) B, B' beiderseits von ihrem der Todlage entsprechenden Berührungspunkte (Pol) P. Verzeichnet man in diesem Falle ein kleines Stück der Bahn F', das der in der Todlage mit P zusammenfallende Punkt F der Polbahn B beiderseits von dieser Lage relativ gegen B' durchläuft (entsprechend dem Rollen von B auf B'), so kann man nach den Methoden der Punktverzahnung und des Ersatzes von Elementenprofilen durch äquidistante Curven (§. 18) als das Profil des mit dem Gliede G zu verbindenden Elementes einen aus F als Mittelpunkt mit irgend einem kleinen Halbmesser ρ beschriebenen Kreis, und als das entsprechende Profil des anderen Elementes eine mit F' in der Entfernung ρ äquidistante Curve wählen. Das in der Todlage die Glieder G, G' paarende und dadurch bei passender Wahl dieser Glieder die Kette zwangläufig schliessende Elementenpaar ist

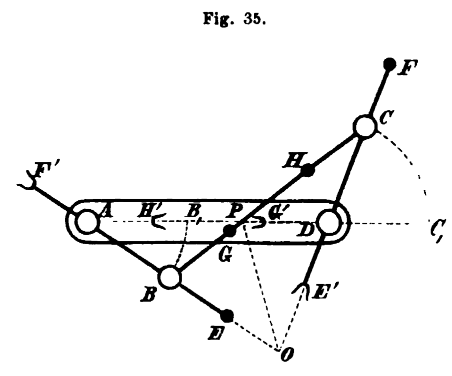


dann ein triebstockförmiger einzelner Zahn mit einer gabelförmigen entsprechenden einzelnen Zahnlücke.

Wenn nun z. B. das symmetrische Zwillingskurbelgetriebe *ABCD* in seinen Todlagen durch Elementenpaarung zwangläufig gemacht werden soll, so kann das durch Paarung entweder der Kurbeln *AB* und *CD*, oder der Koppel *BC* mit dem Stege *AD* geschehen, und es ergeben sich die diesen beiden Gliederpaaren als Elementenpaare entsprechenden Polbahnen durch folgende Betrachtung.

Es sei *ABCD* (Fig. 35) irgend eine Lage des Getriebes, entsprechend den von der Todlage AB_1C_1D aus gerechneten, in entgegengesetztem Sinne beschriebenen Drehungswinkeln B_1AB und C_1DC der Kurbeln, deren Länge hier kleiner, als die von Steg und Koppel vorausgesetzt ist; *P* sei der Durchschnittspunkt der Geraden *AD* und *BC*, *O* der Schnittpunkt von *AB* und *CD*. Wegen Gleichheit der Seiten sind die Dreiecke *ABD* und *CDB* congruent und symmetrisch liegend in Beziehung auf die Normale ihrer gemeinsamen Seite *BD* im Mittelpunkte derselben, so dass sie durch Drehung um diese Symmetrieaxe zur Deckung gebracht werden können. Letztere enthält deshalb die Punkte *O*, *P* und halbirt die Winkel *AOC*, *APC* (ihre Normale in *P* die Scheitelwinkel *APB*, *CPD*), und es ist:

Fig. 35.



$$OA = OC, \quad OB = OD,$$
$$PA = PC, \quad PB = PD.$$

Nun besteht die augenblickliche Bewegung von *CD* gegen *AB* in einer Drehung um *P* als Pol, nämlich als den Punkt, in dem sich die entsprechenden Halbmesser der von *C* um *B* und von *D* um *A* beschriebenen Kreise schneiden, und da

$$AP + BP = AD = DP + CP$$

ist, so folgt, dass die Polbahnen der Kurbeln *AB* und *CD* congruente Ellipsen sind mit den grossen Axen *EF'* und $E'F = AD$ und mit den Brennpunkten *A*, *B* resp. *C*, *D*.* Diese Ellipsen berühren

* Die Beziehungen zwischen entsprechenden Drehungswinkeln von solchen um je einen ihrer Brennpunkte drehbaren congruenten elliptischen Polbahnen,

sich mit PO als gemeinsamer Tangente in einem wechselnden Punkte P von AD. In der einen Todlage AB_1C_1D fallen E und E' in der einen Grenzlage von P, in der anderen fallen F und F' in der anderen Grenzlage von P zusammen. E und E', F und F' sind deshalb an entsprechenden Verlängerungen der Kurbeln als Zähne E, F und Zahnlücken E', F' (Triebstöcke und Gabeln) zu gestalten, um die Kurbeln zusammen zu paaren.

Was die Paarung der Koppel mit dem Stege betrifft, so kann man bemerken, dass die augenblickliche Bewegung von BC gegen AD (Fig. 35) eine Drehung um O, und dass

$$OA - OD = AB$$

ist. Daraus folgt, dass die Polbahn des Steges AD eine Hyperbel mit den Brennpunkten A, D und mit der reellen Axe $G'H'$ = der Kurbellänge ist, ebenso dann natürlich auch die Polbahn des (mit AD vertauschbaren) Gliedes BC die jener congruente Hyperbel mit den Brennpunkten B, C und der Axe $GH = G'H'$. Beide Hyperbeln berühren sich im Durchschnittspunkte O der Kurbelrichtungen (Mittellinien der Kurbeln) mit gemeinsamer Tangente OP. In den Todlagen des Getriebes fallen G, G' resp. H, H' mit dem Pol O zusammen, und es kann etwa die Koppel bei G und H mit Triebstöcken, der Steg bei G' und H' mit Gabeln als entsprechenden Zahnlücken versehen werden.

Ebenso wie durch Kettenschluss ist übrigens auch durch Elementenpaare die Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes nicht immer ausführbar; denn es ist dazu nöthig, dass der Pol der zu paarenden Glieder in zugänglicher Entfernung und auch nicht in der Richtungslinie der treibenden Kraft liege. Bei dem Schubkurbelgetriebe (Fig. 33) ist es also nicht möglich, weil in den Todlagen der Pol sowohl für die relative Bewegung von Kurbel und Schieber (d. i. der mit A zusammenfallende Schnittpunkt von BC mit der in A auf AC errichteten Senkrechten) wie für die relative Bewegung von Koppel und Steg (d. i. der mit C zusammenfallende Schnittpunkt von AB mit der in C auf AC errichteten Senkrechten) in die Richtungslinie AC der den Schieber angreifenden Kraft fällt; bei dem Parallelkurbelgetriebe (Fig. 34) ist es deshalb unthunlich, weil der Pol sowohl für die relative Bewegung der Kurbeln (Schnittpunkt von Koppel und Steg) wie für die relative Bewegung von Koppel und Steg (Schnittpunkt der Kurbeln) im Unendlichen liegt.

---

die also auch für entsprechende Drehungswinkel der Kurbeln AB und CD des vorliegenden Getriebes gelten, wurden in §. 22 unter 2) einer näheren Betrachtung unterworfen.

III. Elementare Mechanismen.

Die Kinematik ist insofern eine wesentliche Grundlage des Maschinenbaues, als sie Anleitung zur Bildung solcher elementarer Mechanismen geben soll, die zur Vermittelung gegebener, dem Zwecke gewisser Maschinen entsprechender Bewegungen geeignet sind, unter einem elementaren Mechanismus nach §. 1 einen solchen verstanden, dessen kinematische Kette einer Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist. Indessen ist es doch eben nur eine die unerlässliche Combinationsgabe des Constructeurs unterstützende Anleitung, die zu dem fraglichen Zweck von der Kinematik verlangt werden kann, da die umfassende Bezeichnung der zu irgend einem bestimmten Bewegungszwecke dienlichen Mechanismen theils unthunlich ist, weil derselbe Bewegungszweck im Allgemeinen auf viele verschiedene oder gar auf unzählig viele Arten durch Mechanismen erreicht werden kann, theils auch nur von geringem Werthe wäre, weil die Auswahl der praktisch brauchbaren und vortheilhaften unter den principiell möglichen Lösungen von Umständen abhängig bliebe, die, ausserhalb des Bereichs der Kinematik liegend, einer unendlichen Mannigfaltigkeit fähig, einer erschöpfenden Berücksichtigung im Voraus also unfähig sind. Ebenso ist es auch bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare und zusammengesetzter Ketten unmöglich, die kinematische Grundlegung des Maschinenbaues in erschöpfender Weise umgekehrt dadurch zu erzielen, dass systematisch alle möglichen Mechanismen ermittelt und ihre kinematischen Eigenschaften untersucht werden, um etwa so als Vorrath zur Auswahl für irgend einen zu realisirenden machinalen Bewegungszweck zu dienen; nur in beschränkter Weise ist diese Aufgabe lösbar, besonders bei Beschränkung auf einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren, die somit als Umschlusspaare ausgeführt werden können, wie sie namentlich mit Rücksicht auf die Leichtigkeit ihrer Herstellung und die Dauerhaftigkeit ihrer Form vorzugsweise verwendet werden. Diese und einige andere unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen mögliche Verbindungen von Elementenpaaren zu kinematischen Ketten und die Eigenschaften der daraus herstellbaren Mechanismen aufzusuchen, ist Zweck der folgenden Erörterungen.

a. Einfache Mechanismen.

Darunter werden solche Mechanismen verstanden, deren zwangläufig geschlossene kinematische Ketten einfach sind (§. 1). Die Glieder einer



solchen Kette enthalten je zwei Elemente, und seien in der Reihenfolge, in der sie durch die Elementenpaare

$A \quad B \quad C \ldots N$ verbunden sind,

allgemein mit $a \quad b \quad c \ldots n$ bezeichnet,

so dass das Elementenpaar A die Glieder n und a,

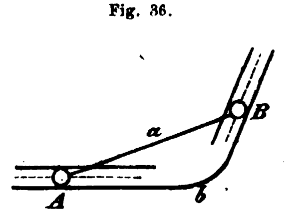
„ „ B „ „ a „ b,

„ „ C „ „ b „ c etc.

verbindet. Die Zahl der Glieder ist so gross wie die der Elementenpaare und wenigstens = 2.

Eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette mit nur 2 Gliedern wird z. B. gebildet (Fig. 36) vom einem Stabe a, der mit zwei Zapfen (Drehkörpern mit parallelen Axen) in entsprechenden geradlinigen Schlitzen einer Platte b so beweglich ist, dass eine relative Schiebung im Sinne der Zapfenaxen (infolge der Zapfenform) nicht stattfinden kann. Die Elementenpaare A, B sind hier höhere mit je zweifacher Beweglichkeit und je zwei Freiheitsgraden. Die relative Beweglichkeit der Glieder a und b ist dieselbe wie die des Figurenpaares „Strecke und Winkel“ (§. 12).

Fig. 36.



1. Einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren.

§. 33. Vorbemerkungen.

Einfache Mechanismen mit niederen Elementenpaaren kommen hier nur als wenigstens dreigliedrige Ketten in Betracht, weil sie, wenn zweigliedrig und zwangläufig beweglich, stets als einzelne zwangläufige niedere Elementenpaare betrachtet werden können. Wenn z. B. ein stabförmiger Körper, der am einen Ende cylinderförmig, am anderen plattenförmig und zwar so gestaltet ist, dass die parallelen Begrenzungsebenen dieses letzteren Stabendes mit der Cylinderaxe am anderen parallel sind, als das eine Glied a mit einem anderen Körper als zweitem Glied b, der mit entsprechender cylindrischer Bohrung und mit entsprechendem Schlitz versehen ist, einerseits durch ein Cylinderpaar A, andererseits durch ein Plattenpaar B verbunden wird, so entsteht zwar zunächst eine zweigliedrige Kette mit den zwei Elementenpaaren A und B, deren Glieder a, b aber dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente eines Prismenpaares, und in der That

sind die Berührungsflächen beider Elementenpaare *A*, *B* zusammen als getrennte Theile einer prismatischen (durch Translationsbewegung einer Geraden zu erzeugenden) Fläche zu betrachten. Oder wenn ein Körper *a* mit einem Körper *b* zugleich durch ein Schraubenpaar *A* und durch ein damit conaxiales Cylinderpaar *B* verbunden wird, so ist die relative Beweglichkeit der Körper *a*, *b* dieselbe, als ob sie nur durch das Schraubenpaar *A* als Elemente desselben verbunden wären; in der That ist hier die Berührungsfläche des Cylinderpaares *B* als geometrischer Ort unendlich vieler congruenter Schraubenlinien von gleicher Steigung mit denen des Schraubenpaares *A*, und sind somit die Berührungsflächen beider Elementenpaare *A*, *B* als nur getrennte Theile derselben Schraubenfläche zu betrachten. Ebenso verhält es sich mit einer Welle *a*, die an beiden Enden mit Zapfen in entsprechenden Lagern eines Gestelles *b* drehbar, mit diesem nämlich durch zwei conaxiale Drehkörperpaare *A*, *B* verbunden ist; die aus den Gliedern *a*, *b* bestehende Kette ist dann als ein einzelnes Elementenpaar, nämlich als ein Drehkörperpaar zu betrachten.

Um nun zu erkennen, wie viele und welche Mechanismen sich mit gewissen niederen Elementenpaaren bei einer gewissen Art der Verbindung ihrer Glieder durch dieselben bilden lassen, sind zunächst die möglichen betreffenden kinematischen Ketten zu ermitteln, und ist zu dem Ende zu untersuchen, ob die Minimalzahl von 3 Elementenpaaren resp. Gliedern zur Beweglichkeit der Kette ausreicht, wie gross dazu anderenfalls diese Zahl wenigstens sein muss, ferner wie gross sie höchstens sein darf, um noch die relative Zwangläufigkeit von je zwei Kettengliedern zur Folge zu haben. Bei dieser Untersuchung werden im Folgenden alle Elementenpaare zunächst nicht nur als niedere, unbeschadet der Allgemeinheit als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende vorausgesetzt, sondern auch als zwangläufige, somit als Prismenpaare, Drehkörperpaare oder Schraubenpaare, und zwar sollen der Reihe nach betrachtet werden:

1) Prismenketten, nämlich Ketten mit nur Prismenpaaren,

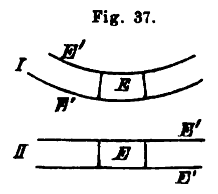
2) Drehkörperketten, nämlich Ketten mit Drehkörperpaaren allein oder zugleich mit Prismenpaaren,

3) Schraubenketten, nämlich Ketten mit Schraubenpaaren allein oder zugleich mit Prismen- resp. Drehkörperpaaren.

Diese Bezeichnungen und diese Aufeinanderfolge als dem Fortgange vom Speciellen zum Allgemeineren entsprechend sind dadurch begründet, dass das Prismen- und das Drehkörperpaar als Grenzformen des Schraubenpaares betrachtet werden können, das Prismenpaar aber auch als Grenzform des Drehkörperpaares. Ersteres ist schon in §. 5 bei der Herleitung

dieser 3 Paare als einzig möglicher zwangläufiger Umschlusspaare hervorgehoben worden. Was aber die Auffassung des Prismenpaares als Grenzfall des Drehkörperpaares betrifft, so werde letzteres in der Weise ausgeführt gedacht, dass ein ringförmiger Körper als das eine Element E in einer entsprechenden ringförmigen Höhlung des anderen Elementes E' mit diesem in Berührung ist, indem beide von je zwei conaxialen Umdrehungsflächen von solchen Lagen und mit so gestalteten (nicht concentrischen Kreisen als Bögen angehörigen) Meridianlinien begrenzt seien, dass irgend ein isolirtes Segmentstück des einen Elementes gegen das andere nicht anders beweglich, als um die gemeinsame Axe der beiden Umdrehungsflächen drehbar ist. Unter diesen Umständen kann unbeschadet des kinematischen Charakters dieses Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen Drehkörperpaares das eine der beiden Elemente auf ein solches Segmentstück reducirt werden, in Fig. 37, I z. B. das ursprünglich als voller Ring ausgeführte Element E. Lässt man dann die Axe weiter und weiter fortrücken (ohne Aenderung der Meridianlinien beider Umdrehungsflächen), so geht das Drehkörperpaar in der Grenze in ein Prismenpaar (Fig. 37, II) über, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe und zu der Richtung ist, nach welcher dieselbe ins Unendliche fortrückte. Diese vorgestellte Entstehungsweise des Prismenpaares wird im Folgenden mehrfach Dienste leisten, um die Verwandtschaft gewisser Gruppen von Mechanismen in ein helleres Licht zu setzen.

Fig. 37.



α. Mechanismen aus Prismenketten.

§. 34. Ebene Prismenkette.

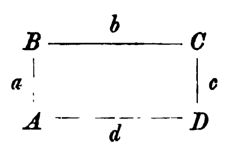
Eine Prismenkette heisse eben, wenn die Schubrichtungen ihrer Prismenpaare alle derselben Ebene H parallel sind. Eine solche, und zwar zwangläufig geschlossene einfache ebene Prismenkette bestehe (vorbehaltlich der zu erweisenden Möglichkeit) aus 3 Gliedern a, b, c, die durch die Prismenpaare A, B, C nach dem Schema

$$\underbrace{A \overset{a}{\text{------}} B \overset{b}{\text{------}} C}_{c}$$

so verbunden sind, dass die Schubrichtung keines dieser Paare mit der eines anderen derselben parallel ist. Letzteres muss vorausgesetzt werden,

weil, wenn z. B. die Schubrichtungen der Paare *A* und *B* parallel wären, die ganze Kette nur ein Prismenpaar wäre, bestehend aus dem Gliede *a* als dem einen und den vereinigten Gliedern *b*, *c* als dem anderen Elemente. Zur zwangläufigen Beweglichkeit der Kette ist nun erforderlich und genügend, dass irgend ein Glied, z. B. *a*, gegen irgend ein anderes, z. B. *c*, überhaupt beweglich sei, weil dann die Zwangläufigkeit die nothwendige Folge derjenigen des diese Glieder *a*, *c* unmittelbar verbindenden Paares *A* ist; dass aber Beweglichkeit hier vorhanden ist, folgt daraus, dass die Verbindung von *a* mit *c* durch die Paare *B* und *C* mit sich schneidenden, der Ebene *H* parallelen Schubrichtungen jede Schiebung nach irgend einer Richtung in *H*, insbesondere also auch diejenige zulässt, die dem Paare *A* zukommt.

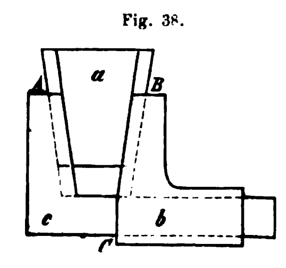
Besteht die ebene Prismenkette aus 4 Gliedern *a*, *b*, *c*, *d* nach dem Schema



so sind die Schubrichtungen von je zwei aufeinander folgenden Prismenpaaren verschieden vorauszusetzen, widrigenfalls sich die Kette auf ein einzelnes Paar reducirte. Sind aber die Schubrichtungen von *A* und *B*, desgleichen die von *C* und *D* verschieden, so ist *b* gegen *d* sowohl in Folge der Verbindung durch die Paare *A* und *B*, als in Folge der Verbindung durch die Paare *C* und *D*, somit überhaupt nach jeder Richtung in der Ebene *H* beweglich, die Zwangläufigkeit der Kette folglich nicht vorhanden.

Die ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur dreigliedrig sein mit verschiedenen Schubrichtungen ihrer 3 Prismenpaare. Eine solche ist z. B. die bekannte Keilkette (Fig. 38). Gewöhnlich ist sie kraftschlüssig; um selbständig geschlossen zu sein, wären indessen nur die Federn, mit denen der Keil *a* in entsprechenden Nuthen der Glieder *b* und *c* eingreift, schwalbenschwanzförmig (mit trapezförmigem, auswärts sich verbreiterndem Querschnitte) zu gestalten. — Indem die 3 Glieder einer solchen ebenen Prismenkette sich kinematisch weder an und für sich, noch bezüglich ihres Zusammenhanges mit den übrigen unterscheiden, sind auch die 3 Mechanismen, die daraus durch Feststellung eines Gliedes gebildet werden können,

Fig. 38.



kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 3 Prismenpaare parallel ist, in 2 Componenten parallel den Schubrichtungen der anderen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 3 Prismenpaare sind den betreffenden Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer zwangläufigen ebenen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die mit ihr in derselben Ebene liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 2 ist und die Richtungen aller 3 Geschwindigkeiten verschieden sind.

§. 35. Allgemeine Prismenkette.

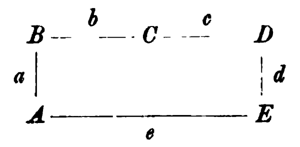
Eine nicht ebene einfache geschlossene Prismenkette muss, um beweglich zu sein, wenigstens 4 Paare enthalten; denn bei der dreigliedrigen Kette wären in diesem Falle irgend zwei Glieder, z. B. *a* und *c* unbeweglich gegen einander, indem die ihrer Verbindung durch das Paar *A* als einzig mögliche entsprechende Schiebung thatsächlich unmöglich, weil nicht parallel der Ebene wäre, längs welcher allein sich beide in Folge ihrer Verbindung durch die Paare *B*, *C* verschieben könnten.

Im Falle von 4 Gliedern *a*, *b*, *c*, *d* können von den Schubrichtungen der dieselben verbindenden Prismenpaare *A*, *B*, *C*, *D* schon je 3 nicht zugleich derselben Ebene parallel sein. Denn wenn z. B. die Schubrichtungen von *B*, *C*, *D* derselben Ebene parallel wären, mit der die Schubrichtung von *A* dann nicht parallel ist, so wäre damit *a* gegen *d* unbeweglich. Ist aber jene Bedingung erfüllt, dass schon die Schubrichtungen von je 3 Paaren nicht derselben Ebene parallel sind (in welchem Falle insbesondere auch nicht zwei Schubrichtungen parallel sein können), so ist zunächst ersichtlich, dass dann je zwei aufeinander folgende Glieder gegenseitig zwangläufig beweglich sind; denn das Glied *a* z. B. ist dann gegen *d* in Folge der Verbindung durch die Paare *B*, *C*, *D* nach jeder Richtung im Raume, insbesondere also auch nach derjenigen verschieblich, die seiner Verbindung mit *d* durch das Paar *A* als einzig mögliche entspricht. Was aber gegenüber liegende Glieder wie z. B. *b* und *d* betrifft, so ist das eine gegen das andere in Folge ihrer Verbindung durch die Paare *A*, *B* irgendwie längs einer gewissen Ebene, in Folge ihrer Verbindung durch die Paare *C*, *D* längs einer anderen Ebene, überhaupt also längs der Durchschnittslinie dieser Ebenen und nicht anders, somit zwangläufig verschiebbar. Die ganze Kette ist also



zwangläufig, da jedes ihrer Gliederpaare entweder durch *a*, *d* oder durch *b*, *d* repräsentirt werden kann.

Eine Prismenkette mit 5 Gliedern nach dem Schema



ist jedenfalls nicht zwangläufig. Denn die Schubrichtungen benachbarter Paare, wie *A* und *B*, müssten verschieden sein, widrigenfalls diese Paare sich auf eines reducirten; indem also das Glied *b* gegen das Glied *e* in Folge der Verbindung durch die Paare *A*, *B* beliebig längs einer gewissen Ebene verschieblich wäre, dürfte ihrer Verbindung durch die Paare *C*, *D*, *E* nur auch die Verschiebbarkeit längs einer gewissen anderen Ebene entsprechen, damit sie gegenseitig zwangläufig, nämlich nur längs der Durchschnittslinie beider Ebenen verschieblich seien. Die Schubrichtungen der Paare *C*, *D*, *E* müssten folglich derselben Ebene parallel sein, was dann aber, da dasselbe von je 3 aufeinander folgenden Paaren gilt, den Parallelismus der Schubrichtungen aller Paare mit derselben Ebene, somit nach vorigem §. die mehrfache Beweglichkeit der Kette zur Folge hätte.

Die nicht ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur viergliedrig sein der Art, dass die Schubrichtungen schon von je 3 ihrer 4 Prismenpaare nicht derselben Ebene parallel sind. Die 4 Mechanismen, die durch Feststellung eines Gliedes der Kette erhalten werden können, sind auch hier kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 4 Prismenpaare parallel ist, in 3 Componenten parallel den Schubrichtungen der übrigen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 4 Prismenpaare sind den betreffenden jener Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer allgemeineren zwangläufigen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die nicht in derselben Ebene mit ihr liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 3 ist und die Richtungen von je 3 Geschwindigkeiten nicht in derselben Ebene liegen. — Im Maschinenbau ist die viergliedrige Prismenkette nicht gebräuchlich. Sie könnte aber Anwendung finden sowohl dort wie auch z. B. bei Instrumenten zur mechanischen Ausführung von Rechnungsoperationen, denen die Beziehung zwischen den Kanten und den Diagonalen eines



Parallelepipedum zu Grunde liegt, wenn die Glieder mit Skalen versehen würden, an denen die relativen Schiebungen benachbarter Glieder, also der Paarelemente abzulesen sind.

β. Mechanismen aus Drehkörperketten.

Drehkörperpaare sind die im Maschinenbau am häufigsten angewendeten Elementenpaare. Neben den Vorzügen, die sie mit den übrigen Umschlusspaaren gemein haben, empfehlen sie sich auch selbst diesen gegenüber durch die Leichtigkeit ihrer Herstellung und dadurch, dass sie zu grösstmöglicher Verminderung von Reibungswiderständen, von Abnutzung und Arbeitsverlusten, sowie auch zu einfachster Vermittelung eines gleichförmigen Ganges der betreffenden Maschinen (durch rotirende Massen, Schwungräder) besonders geeignet sind. Die mit ihnen zu bildenden einfachen Mechanismen verdienen deshalb eine besonders eingehende Untersuchung, und zwar namentlich die ebenen, demnächst auch die sphärischen Drehkörpermechanismen, d. h. die beiden Fälle, in denen die Axen der Drehkörperpaare parallel sind oder sich in einem Punkte schneiden, die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied folglich in parallelen Ebenen oder in concentrischen Kugelflächen liegen.

§. 36. Ebene Drehkörperkette.

In der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, seien a, b, c . . . die Glieder, A, B, C . . . die Drehkörperpaare derselben; unter Umständen seien mit A, B, C . . . auch die geometrischen Axen der gleichnamigen Paare oder auch die Punkte bezeichnet, in denen diese Axen von der dazu senkrechten Zeichnungsebene H (mit welcher die Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder parallel sind) geschnitten werden; bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben A, B, C . . . seien dann $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ ... zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass z. B. A und B als Axen (gerade Linien) verstanden sind, wenn von der Ebene AB, als Punkte, wenn von der Geraden oder der Strecke AB die Rede sein wird, dass ferner die Buchstaben a, b . . als Längen verstanden sind, wenn sie in Gleichungen vorkommen oder wenn anderweitig von ihnen als von Grössen etwas ausgesagt wird u. s. f.



Im Falle der dreigliedrigen Kette *a*, *b*, *c* kann die Polaxe der relativen Bewegung irgend zweier Glieder, z. B. *a* und *c*, in Folge ihrer Verbindung durch die Paare *B*, *C* nur jede mit den Axen parallele Gerade in der Ebene *BC* sein; weil aber andererseits diese Polaxe nur die Axe *A* des die Glieder *a*, *c* unmittelbar verbindenden Paares sein kann, ist relative Bewegung nur möglich, wenn alle 3 Axen in derselben Ebene liegen. Liegen sie dabei im Endlichen, so tritt freilich schon in Folge einer unendlich kleinen Bewegung die bewegliche Axe aus der Ebene der mit dem festgestellten Gliede unbeweglichen zwei anderen Axen heraus, und wird damit die weitere Bewegung unmöglich. — Lässt man eine Axe, z. B. *C*, in der Ebene *AB* ins Unendliche rücken, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares *C* in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung senkrecht zur Ebene *AB* ist, so ist die Beweglichkeit nach wie vor nur unendlich klein. — Rücken zwei Axen, z. B. *B* und *C*, ins Unendliche, so müssen sie im Unendlichen zusammenfallen, um mit der Axe *A* in einer Ebene zu liegen (die Punkte *B*, *C* müssen in demselben Punkt der unendlich fernen Geraden der Ebene *H* liegen, um mit dem Punkt *A* in einer Geraden liegen zu können). Die Drehkörperpaare *B*, *C* sind dann in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen übergegangen; das Glied *b* ist zwar gegen *a* und *c* beliebig verschiebbar, aber *a* und *c* sind gegen einander unbeweglich resp. nur unendlich wenig beweglich geblieben: die ganze Kette ist ein Prismenpaar geworden, bestehend aus den Gliedern *b* und *ac*. — Liegen endlich alle 3 Axen im Unendlichen, so brauchen nicht mehr zwei zusammenzufallen, um mit der dritten in einer Ebene zu liegen (die Punkte *A*, *B*, *C* können verschiedene Punkte der unendlich fernen Geraden der Ebene *H* sein); die Kette geht damit in die schon besprochene ebene Prismenkette (§. 34) über. Hier kann es sich also nur noch um wenigstens viergliedrige Drehkörperketten mit ihren Derivaten handeln.

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette (Fig. 39) sei *d* das festgestellte Glied, also *a* eines der beiden ihm benachbarten, *b* das gegenüber liegende Glied. Das Glied *a* ist zwangläufig, wenn die Polaxe *A*, die seiner Verbindung mit *d* durch das Paar *A* entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit *d* durch die Paare *B*, *C*, *D* haben kann, was aber immer der Fall ist, ausser wenn die Axen *B*, *C*, *D* in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe *A* enthält. Das Glied *b* ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene *AB* von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene *CD* geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen *AB* und *CD* zusammenfallen.



Die viergliedrige ebene Drehkörperkette ist also zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen, sei es dass die vierte zugleich in dieser Ebene liegt oder nicht; diese Ausnahmefälle entsprechen übrigens, wenn nicht etwa ein Glied so lang wie die übrigen zusammen ist, nur Uebergangslagen des betreffenden Mechanismus. Ob letztere zugleich Todlagen (§. 31) sind oder ob in ihnen die den Mechanismus als Getriebe zu seiner Bewegung antreibende Kraft die Zwangläufigkeit vermittelt, hängt von der Art und Weise ab, wie der Mechanismus als Getriebe verwendet wird; jedenfalls sind es nur jene Uebergangslagen, in denen Todlagen stattfinden können.

Die fünfgliedrige Kette ist schon nicht mehr zwangläufig. Denn wenn das Glied *b* (Schema siehe §. 35) gegen das Glied *e* zwangläufig sein soll, so müssen die Axen *C*, *D*, *E* in einer Ebene liegen, die von der Ebene *AB* in der betreffenden Polaxe geschnitten wird. Es müssten also, wenn die Kette zwangläufig sein sollte, je 3 aufeinander folgende Paaraxen in einer Ebene liegen, die nicht die beiden anderen Axen enthielte, was unmöglich ist. —

Was die nun näher zu betrachtenden Mechanismen aus der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette betrifft, so sind dieselben durch die verhältnissmässigen Längen der Kettenglieder bedingt, wodurch allein sich letztere wesentlich unterscheiden können; von diesen Längenverhältnissen ist es dann auch abhängig, ob und inwiefern der Mechanismus von anderer Art ist, jenachdem er durch Feststellung des 1ten, 2ten, 3ten oder 4ten Gliedes einer gegebenen viergliedrigen Drehkörperkette erhalten wird. Im Folgenden soll immer das festgestellte Glied, hier mit *d* bezeichnet, der Steg genannt werden; das ihm gegenüber liegende ist dann *b* (bei beständiger Festhaltung der alphabetischen Reihenfolge *a*, *b*, *c* . . für die Bezeichnung der in der Kette aufeinander folgenden Glieder) und heisse die Koppel. Von den beiden anderen Gliedern *a*, *c* sei *a* das kürzere, sofern sie nicht gleich lang sind; sie sollen verschiedene Namen erhalten, jenachdem sie, wenn der Mechanismus alle möglichen Configurationen in stetiger Aufeinanderfolge durchläuft, dabei um ihre mit dem Stege festen Axen (*A* resp. *D*) zwischen zwei Grenzlagen schwingen (sich hin und her drehen), oder in einem unveränderlichen Sinne rotiren (sich rings herum drehen), und zwar sollen sie im ersten Falle als Schwinge, im zweiten als Kurbel bezeichnet werden. Indem sich nun entweder jedes dieser Glieder als Schwinge, oder das eine als Schwinge, das andere als Kurbel, oder endlich jedes als Kurbel verhält, sind die folgenden 3 Arten von Mechanismen zu unterscheiden:

1. Doppelschwingmechanismus (Doppelschwinge),
2. Schwingkurbelmechanismus (Schwingkurbel oder Kurbelschwinge),

3. Doppelkurbelmechanismus (Doppelkurbel).

Sofern die Bewegung von einem der Glieder a, c ausgeht (durch eine das Glied a oder c angreifende Kraft bewirkt wird), seien die betreffenden Getriebe bezeichnet als:

1. Doppelschwinggetriebe,
2. Schwingkurbelgetriebe oder Kurbelschwinggetriebe, jenachdem die Bewegung von der Schwinge oder von der Kurbel ausgeht,
3. Doppelkurbelgetriebe.

Bei der folgenden Uebersicht der Beziehungen zwischen den Längen a, b, c, d, die für die 1te, 2te oder 3te Mechanismenart charakteristisch sind, werden diese Längen einstweilen alle als endlich vorausgesetzt, auch die Specialfälle $c = a$ und $d = a$ vorläufig ausgeschlossen, so dass also

$$c > a;\quad d \gtrless a;\quad b < a + c + d$$

ist. Der um den Punkt A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AB = a$ beschriebene Kreis (Fig. 39—44) heisse der Kreis (B), der um den Punkt D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $DC = c$ beschriebene der Kreis (C); von der Geraden AD werde ersterer in den Punkten B_0, $B_{\prime\prime}$ letzterer in den Punkten C_0, $C_\prime$ geschnitten, welche Punkte so bezeichnet sind, dass die Richtungen $B_0B_\prime$ und $C_0C_\prime$ mit der Richtung AD übereinstimmen.

Sind die Längen a, c, d gegeben, und lässt man die Koppellänge $= b$ von der unteren Grenze = Null an zunehmen oder von der oberen Grenze $= a + c + d$ an abnehmen, so nimmt die Beweglichkeit des Mechanismus in beiden Fällen allmählig zu, indem die Glieder a und c in von Null an zunehmenden Schwingungswinkeln beweglich werden, der Mechanismus also anfangs eine Doppelschwinge ist. Somit wird überhaupt der Mechanismus eine Doppelschwinge sein für alle Werthe von $b < a + c + d$, die kleiner sind, als die kleinste, oder grösser, als die grösste Koppellänge, welche bei gegebenen Werthe von a, c, d einer Schwingkurbel oder Doppelkurbel zukommt, so dass nur noch für diese letzteren Mechanismenarten die Existenzbedingungen festgestellt zu werden brauchen. Dieselben, abhängig von der relativen Lage der Punkte A, B_0, $B_{\prime\prime}$ C_0, $C_{\prime\prime}$ D, sollen in zwei Gruppen betrachtet werden, jenachdem $d > a$ oder $d < a$ ist.

1) Wenn man im Falle $d > a$ bei gegebenen Längen a, c den Steg stetig kürzer werden lässt von einer solchen Länge $d > a + c$ an gerechnet, bei der die Kreise (B) und (C) sich gegenseitig ausschliessen (Fig. 39), so werden sich endlich diese Kreise schneiden, zuerst so, dass C_0 zwischen A und $B_\prime$ liegt (Fig. 40), dann so, dass C_0 zwischen A und B_0 liegt (Fig. 41), und wenn c nicht nur $> a$, sondern auch $> 2a$ ist, so kann schliesslich der Kreis (C) den Kreis (B) ganz einschliessen (Fig. 42). In allen diesen



Specialfällen, also überhaupt im Falle $d > a$ kann das Glied c nie Kurbel sein, wie lang auch die Koppel gewählt werden mag; denn zu dem Ende müsste der Punkt C in die Lagen C_0 und $C_,$ kommen können, wozu bei Fig. 39 erforderlich wäre, dass

$$C_0B_0 > b > C_0B_, \text{ und } C_,B_0 > b > C_,B_{,,}$$

also

$$C_0B_0 > b > C_,B_,$$

ist, was wegen $C_0C_, > B_0B_,$ nicht sein kann. Dieselbe unerfüllbare Bedingung für b ergiebt sich bei Fig. 40, bei Fig. 41 und Fig. 42 aber die gleichfalls unerfüllbare Bedingung:

$$C_0B_, > b > C_,B_,.$$

Ist $d > a$, so kann also der Mechanismus nicht Doppelkurbel, auch Schwingkurbel nur mit a als Kurbel, also mit c als Schwinge sein; die noch festzustellenden Bedingungen dieses letzteren Falles reduciren sich auf die Bedingungen für das Verhalten von a als Kurbel. Als diese ergeben sich bei Fig. 39 ($d > a + c$) und Fig. 40 ($a + c > d > c$):

$$B_,C_, > b > B_0C_0,$$

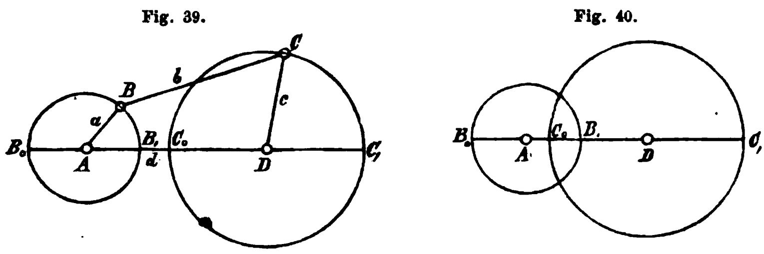


Fig. 39. Fig. 40.

also überhaupt:

$$d + c - a > b > d - c + a$$

für $d > c > a$;

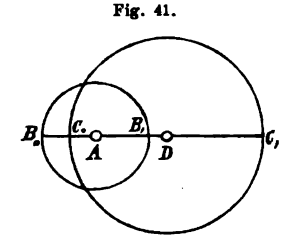


Fig. 41.

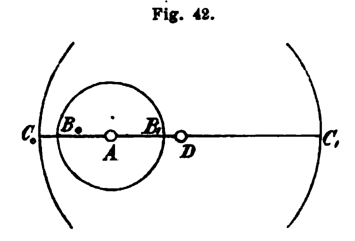


Fig. 42.

dagegen bei Fig. 41 ($c > d > c - a$) und Fig. 42 ($c - a > d > a$):

$$B_,C_, > b > B_,C_0,$$

also überhaupt:

$$c + d - a > b > c - d + a$$

für $c > d > a$.

2) Im Falle $d < a$ wird der Kreis (B) entweder vom Kreise (C) so geschnitten, dass C_0 zwischen A und B_0 liegt (Fig. 43), oder er wird von ihm eingeschlossen (Fig. 44). In beiden Fällen ist die Bedingung dafür, dass a Kurbel sei, dieselbe wie die für das Verfallen von c als Kurbel, nämlich

Fig. 43.

$$B_,C_0 > b > B_,C_,$$

oder
$$c + a - d > b > c - a + d.$$

In diesem Falle sind also die Glieder a und c nur gleichzeitig Kurbeln, und kann der Mechanismus nicht Schwingkurbel sein.

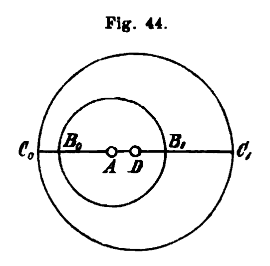


Fig. 44.

Das Resultat der Untersuchung ist somit folgendes: der viergliedrige ebene Drehkörpermechanismus a, b, c, d mit dem Gliede d als Steg ist Schwingkurbel (a Kurbel, c Schwinge), wenn

$$\left.\begin{array}{l} d > c > a \text{ (Fig. 39 und 40)} \\ \text{und } d + c - a > b > d - c + a \end{array}\right\} \ldots (1)$$

oder wenn
$$\left.\begin{array}{l} c > d > a \text{ (Fig. 41 und 42)} \\ \text{und } c + d - a > b > c - d + a \end{array}\right\} \ldots (2)$$

ist; er ist Doppelkurbel, wenn

$$\left.\begin{array}{l} c > a > d \text{ (Fig. 43 und 44)} \\ \text{und } c + a - d > b > c - a + d \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ist; endlich Doppelschwinge, wenn die Koppellänge den der betreffenden dieser 3 Grössenfolgen von a, c, d entsprechenden Bedingungen (1), (2), (3) nicht Genüge leistet, unbeschadet dessen, dass $0 < b < a + c + d$ ist.

Die Bedingungen (1), die auch geschrieben werden können:

$$d > c > a; \quad c - a > b - d > a - c,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$b > d > c > a; \quad d + c > b + a$$
$$d > b > c > a; \quad b + c > d + a$$
$$d > c > b > a; \quad c + b > d + a;$$

desgleichen die Bedingungen (2), auch zu schreiben:

$$c > d > a; \quad d - a > b - c > a - d,$$

die folgenden Gruppen:

$$b > c > d > a; \quad c + d > b + a$$
$$c > b > d > a; \quad b + d > c + a$$
$$c > d > b > a; \quad d + b > c + a.$$

Daraus folgt, dass der in Rede stehende Mechanismus allemal dann, aber nur dann eine Schwingkurbel ist, wenn das kürzeste aller 4 Glieder (als Kurbel) dem festgestellten Gliede benachbart, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die Bedingungen (3), die auch geschrieben werden können:

$$c > a > d;\quad a - d > b - c > d - a,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$\begin{aligned} b > c > a > d;\quad c + a > b + d \\ c > b > a > d;\quad b + a > c + d \\ c > a > b > d;\quad a + b > c + d, \end{aligned}$$

woraus ersichtlich, dass der in Rede stehende Mechanismus dann und nur dann eine Doppelkurbel ist, wenn das festgestellte Glied das kürzeste von allen, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die viergliedrige ebene Drehkörperkette kann also überhaupt nur dann einen Schwingkurbel- oder einen Doppelkurbelmechanismus liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kürzesten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kürzesten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingmechanismen aus der Kette hervor.*

Von besonderen Fällen sind zunächst diejenigen hervorzuheben, in

---

* Wenn Reuleaux, indem er mit *a, b, c, d* die aufeinander folgenden Glieder der Kette individuell, unabhängig von ihrer Beziehung zum festgestellten Gliede bezeichnet, den aus der Kette hervorgehenden Mechanismus als „rotirende Bogenschubkurbel" (Schwingkurbel) oder als „rotirende Doppelkurbel" (Doppelkurbel) oder als „oscillirende Doppelkurbel" (Doppelschwinge) beansprucht und entsprechend bezeichnet, jenachdem die Kette „auf *d* resp. *b*, auf *a* oder auf *c* gestellt", d. h. jenachdem das Glied *d* resp. *b*, das Glied *a* oder das Glied *c* festgestellt wird, so ist das obiger Untersuchung zufolge nur bedingungsweise zulässig. Insbesondere kann es der Fall sein, dass der Mechanismus eine „oscillirende Doppelkurbel" ist, auf welches Glied die Kette auch „gestellt" werden mag; zulässig ist jene Bezeichnung nur unter der Voraussetzung, dass *a* das kleinste Glied und dass die Summe aus seiner und aus der grössten Gliedlänge (die *b*, *c* oder *d* sein kann) kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

denen die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge der Summe der beiden anderen Gliedlängen gleich ist (als Grenzfall der Herstellbarkeit eines Schwingkurbel- oder eines Doppelkurbelmechanismus aus dieser Kette), sowie diejenigen, in denen zwei Glieder gleich lang sind; noch bemerkenswerther aber diejenigen, in denen das eine und das andere zugleich stattfindet, in denen es nämlich zwei gleiche kleinste und zwei gleiche grösste Glieder giebt, überhaupt also zwei mal zwei Glieder gleich lang sind. Diese letzteren Fälle werden in den folgenden Paragraphen näher besprochen, und zwar in §. 37 der Fall, dass die gleich langen Gliederpaare gegenüber liegende, in §. 38 der Fall, dass sie benachbarte Glieder sind.

§. 37. **Zwillingskurbeln.**

Wenn die gegenüber liegenden Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ($a = c$, $b = d$), so können bei Feststellung des Gliedes d, einerlei ob d und b die kürzeren oder die längeren Glieder sind, die beiden anderen a und c stets als Kurbeln um die Axen A und D in unveränderlichem Sinne rotiren, indem (mit den Bezeichnungen von Fig. 39 bis 44) BC in die Lagen B_0C_0 und $B_,C_,$ kommen kann; weil sich aber nun die beiden Kurbeln durch nichts unterscheiden, werde der entsprechende Doppelkurbelmechanismus insbesondere als Zwillingskurbelmechanismus bezeichnet, das Doppelkurbelgetriebe als Zwillingskurbelgetriebe. Letzteres hat zwei Todlagen AB_0C_0D und $AB_,C_,D$, in denen die 4 Paaraxen A, B, C, D in einer Ebene liegen. Von diesen Lagen aus können sich die Kurbeln AB und CD entweder so drehen, dass sie parallel bleiben, oder so, dass sie symmetrisch bleiben in Beziehung auf die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden anderen gleichen Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ (Fig. 35, §. 32, wo OP die Symmetrieaxe ist); das Getriebe heisse im ersten Falle ein Parallelkurbelgetriebe, im zweiten ein symmetrisches Zwillingskurbelgetriebe (Antiparallelkurbelgetriebe nach Reuleaux's Bezeichnung). Die verschiedenen kinematischen Eigenschaften dieser zweierlei Getriebe charakterisiren die fraglichen Todlagen als sogenannte Wechsellagen (§. 31).

Bei dem Parallelkurbelgetriebe drehen sich die beiden Kurbeln in gleichem Sinn und gleichzeitig um gleiche Winkel; die Ueberschreitung der Todlagen kann durch Massenkraftschluss oder durch Kettenschluss vermittelt werden (§. 32).

Bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe drehen sich die Kurbeln in entgegengesetztem oder in gleichem Sinn, jenachdem sie

kürzer oder länger sind, als der Steg und die Koppel; das Drehungsgesetz, nämlich die Beziehung zwischen gleichzeitigen Drehungswinkeln der Kurbeln, ist aber in beiden Fällen $\left(\text{bei demselben Verhältnisse } \frac{a = c}{b = d}\right)$ dasselbe. Bei Fig. 35 (§. 32) liegt der erste dieser beiden Fälle vor; *B,AB* und *C,DC* sind gleichzeitige Drehungswinkel der Kurbeln *AB* und *DC*, die durch entgegengesetzte Drehungen beschrieben werden. Würde aber das Glied *AB* festgestellt (zum Stege gemacht), so dass nun *AD* und *BC* die gleichen Kurbeln wären, so wären *BAB,* und *OBC* gleichzeitige Drehungswinkel derselben, die durch gleich gerichtete Drehungen beschrieben werden und den Winkeln *B,AB* und *ODA* = *C,DC* des vorigen Falles gleich sind. Das Aenderungsgesetz solcher entsprechender Drehungswinkel wurde schon im §. 22 unter 2) einer näheren Betrachtung unterworfen, indem es nach §. 32 identisch ist mit dem der entsprechenden Drehungswinkel congruenter elliptischer Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar sind. Die Ueberschreitung der Todlagen des symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes kann nach §. 32 durch Massenkraftschluss oder durch Paarschluss vermittelt werden, nämlich mit Bezug auf Fig. 35 daselbst für die Todlage *AB,C,D* durch das Elementenpaar *E, E'* oder *G, G'*, für die andere durch das Elementenpaar *F, F'* oder *H, H'*, und zwar sowohl im Falle des gegenläufigen wie in dem des gleichläufigen symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes, von denen übrigens das erstere in der Folge auch kürzer als gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe bezeichnet wird, da nur das gleichläufige ausdrücklich als symmetrisches von dem gleichfalls gleichläufigen Parallelkurbelgetriebe unterschieden zu werden braucht.

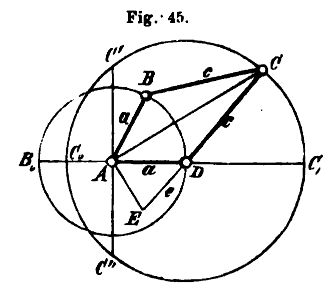
§. 38. Gleichschenklige Drehkörperkette.

Wenn zwei Paare benachbarter Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ($DA = AB = a$, $BC = CD = c$ in Fig. 45 oder $AB = BC = a$, $CD = DA = c$ in Fig. 46), so besteht das Viereck *ABCD* stets aus zwei gleichschenkligen Dreiecken (*DAB* und *BCD* in Fig. 45 resp. *ABC* und *CDA* in Fig. 46), und heisse deshalb (nach Reuleaux) die Kette selbst gleichschenklig. Aus ihr können zweierlei Mechanismen hervorgehen, jenachdem das festgestellte Glied *AD* eines der kürzeren Glieder $= a$ (Fig. 45) oder eines der längeren Glieder $= c$ (Fig. 46) ist; nach §. 36 ist der Mechanismus im ersten Falle eine Doppelkurbel, im zweiten eine Schwingkurbel (Kurbelschwinge), vorausgesetzt dass in den Uebergangslagen, in denen 3 von den 4 Paaraxen *A*, *B*, *C*, *D* in

einer Ebene liegen, und somit die Kette nicht selbständig geschlossen ist, die Schliessung durch besondere Hülfsmittel bewirkt wird, falls jene Uebergangslagen Todlagen sind, nämlich die Schliessung der Kette in ihnen nicht schon durch die Kraft vermittelt wird, die den Mechanismus bei seiner besonderen Verwendungsart als Getriebe in Bewegung setzt.

Der gleichschenklige Doppelkurbelmechanismus ist in Fig. 45 so gezeichnet, dass $c < 2a$ ist; es könnte aber auch $c = 2a$ oder $c > 2a$ sein. (Für den Fall $c = 2a$, wobei die um A und D mit den Halbmessern a und c beschriebenen Kreise sich in den zusammenfallenden Punkten B_0, C_0 berühren, ist der Mechanismus ursprünglich von Galloway angegeben worden.) Wenn von der Lage $ADC_{,}D$ aus (der in §. 36 mit $B_{,}$ bezeichnete Punkt fällt hier mit D zusammen) die kleine Kurbel sich um den Winkel $DAB = \alpha$, die grosse um den Winkel $C_{,}DC = \gamma$ dreht, so besteht zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln die Beziehung:

Fig. 45.



$$a \sin\frac{\alpha}{2} = c \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right); \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{c \sin\gamma}{a + c\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Daraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = c\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)\left(d\gamma - \frac{d\alpha}{2}\right)$$

und somit das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_c der Kurbeln a, c:

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{c\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{c}{2}\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2c}{c + a\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

oder auch, wenn AE normal zu AC bis zum Durchschnitt E mit CD gezogen und $DE = e$ gesetzt wird, indem dann

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(DAE)}{\sin(DEA)} = \frac{e}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist,

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c + e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Hierin ist e positiv oder negativ, jenachdem der Punkt E ausserhalb der Strecke CD oder in derselben liegt; ist die Gerade $C'AC''$ normal zu AD, so ist

in den Lagen $C_{,}$ C' C_0 C'' $C_{,}$ des Punktes C
$e = a$ 0 $-a$ 0 a.

Somit ergiebt sich, dass

der Lage $C_{,}$ C' C_0 C'' $C_{,}$ des Punktes C
die Lage D B_0 D B_0 D des Punktes B
mit $\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c+a}$ 2 $\frac{2c}{c-a}$, 2 $\frac{2c}{c+a}$ entspricht.

Die kleine Kurbel macht 2 Umdrehungen, während die grosse nur eine macht; das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss, welches somit im Durchschnitt $= 2$ ist, schwankt zwischen den Grenzen:

$$\left.\begin{array}{l} max \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c-a} \\ min \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c+a} \end{array}\right\} \text{ und ist } \frac{max \frac{\omega_a}{\omega_c}}{min \frac{\omega_a}{\omega_c}} = m = \frac{c+a}{c-a} \quad \ldots\ldots (4).$$

Werden die Rotationen der kleinen Kurbel von der Lage AB_0 aus gerechnet, so dreht sich während derselben die grosse Kurbel abwechselungsweise durch den erhabenen und durch den hohlen Winkel $C'DC''$; oder wenn letztere gleichförmig rotirt, so ist das Verhältniss der Zeiten der auf einander folgenden von der Lage AB_0 aus gerechneten Rotationen der kleinen Kurbel $=$ dem Verhältnisse der hohlen Winkel $C_{,}DC'$ und $C'DC_0$, und es ist dies das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier (d. h. zweier von irgend einer Anfangslage aus gerechneter) Rotationen der kleinen Kurbel, indem bei ihnen das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Kurbeln abwechselungsweise beständig grösser oder beständig kleiner, als der Mittelwerth 2 ist. Ist also dieses Zeitverhältniss $= n$ gegeben, so ist

$$n = \frac{\pi - arc\cos\frac{a}{c}}{arc\cos\frac{a}{c}}\,; \quad \frac{a}{c} = \cos\frac{\pi}{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

somit auch*

$$m = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos\frac{\pi}{n+1}} = cotg^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

* Diese Beziehung zwischen m und n ist dieselbe wie bei zwei congruenten elliptischen Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar

und findet man hiernach z. B. für

$n = 2$	3	4	5
$\frac{a}{c} = 0{,}5$	0,707	0,809	0,866
$m = 3$	5,83	9,47	13,93

Wenn bei dem in Rede stehenden Mechanismus die Bewegung von einer der Kurbeln ausgeht und somit der Fall eines gleichschenkligen Doppelkurbelgetriebes vorliegt, so sind die Uebergangslagen $AB_0C'D$ und $AB_0C''D$, in denen nur die Axen D, A, B in einer Ebene liegen, nicht Todlagen; die beiden anderen ADC_0D und ADC_rD, in denen alle Axen in eine Ebene und zugleich die Axen B, D zusammenfallen, sind dagegen Todlagen, wenn die Bewegung von der grossen Kurbel ausgeht, und zwar sind sie Wechsellagen, weil ohne zwangläufige Ueberschreitung derselben von ihnen aus der Mechanismus von anderer Art werden, nämlich in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder c gegen die zum anderen Element vereinigten Glieder a um die zusammengefallenen Axen B, D. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsellagen (§. 32) kann durch Massenkraftschluss (durch ein mit der kleinen Kurbel verbundenes Schwungrad) oder durch Elementenpaare vermittelt werden, nämlich durch Paarung eines der Glieder a mit dem gegenüber liegenden Gliede c; von den Polbahnen der zu paarenden

---

sind (§. 22, Gl. 11), also auch dieselbe wie bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus (§. 37), indem dessen Kurbeln nach §. 32 sich ebenso drehen wie jene elliptischen Polbahnen, wenn die Excentricität ε der letzteren (Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte von einander zur grossen Axe) dem Verhältnisse der Kurbellänge $AB = DC = a$ (Fig. 35, §. 32) zur Länge $AD = BC = b$ von Steg und Koppel gleich ist. Die Längenverhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{c}$ der Kettenglieder, welche beziehungsweise bei jenem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus und bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus denselben Werthen von m und n entsprechen, stehen nach Gl. (11) in §. 22 und nach obiger Gl. (4) in der Beziehung:

$$\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 = \frac{c+a}{c-a}.$$

Bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus bedeutet zwar n das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier aufeinander folgender halber Umdrehungen der einen Kurbel bei gleichförmiger Rotation der anderen, doch liesse sich dieselbe Bedeutung auch bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus realisiren durch Uebertragung der Drehung der kleinen Kurbel im Verhältnisse 2 : 1.

Glieder sind dazu kleine Stücke beiderseits von ihren den Wechsellagen entsprechenden Berührungspunkten zu verzeichnen. Sollen z. B. die Glieder AB und CD (Fig. 45) gepaart werden, so findet man (gemäss der in §. 11 angeführten allgemeinen Regel) die Polbahn von CD als Ort aller Schnittpunkte der Geraden BC und DA bei Feststellung von CD und Bewegung von AB, die Polbahn von AB als Ort aller Schnittpunkte derselben Geraden bei Feststellung von AB und Bewegung von CD.*

Bei dem **gleichschenkligen Schwingkurbelmechanismus** (Fig. 46) seien C', C'' die Punkte des mit dem Halbmesser c um D beschriebenen Kreises, deren Entfernungen vom Punkte $A = 2a$ sind, und B', B'' die Punkte, in denen der um A mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis von den Geraden AC', AC'' geschnitten wird. Dann sind DC', DC'' die Grenzlagen der Schwinge DC, deren Schwingungswinkel also

Fig. 46.

$$C'DC'' = 4 \, arc \sin \frac{a}{c}$$

ist; und wenn die Kurbel im Sinne $B'BB_0$ rotirt, so entsprechen

den Wegen $B'B_0B''$, $B''B_1B'$ des Punktes B
die Wege $C'AC''$, $C''AC'$ des Punktes C.

Den Bewegungen der Schwinge zwischen ihren Grenzlagen im einen und im anderen Sinne entsprechen also verschieden grosse Drehungen der Kurbel, oder bei gleichförmiger Rotation der letzteren verschiedene, nämlich solche Zeiten, die sich wie die hohlen Winkel B_0AB' und $B'AB_1$ verhalten. Ist dieses Zeitverhältniss $= n$, so ist

$$n = \frac{\pi - arc \cos \frac{a}{c}}{arc \cos \frac{a}{c}}; \quad \frac{a}{c} = \cos \frac{\pi}{n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (5). Geht die Bewegung von der Kurbel aus (**gleichschenkliges Kurbelschwinggetriebe**), so sind die Uebergangslagen AB_0AD und AB_1AD Wechsellagen, indem von ihnen aus der Mechanismus in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder a gegen die zum anderen

* Für den Fall $c = 3a$ sind die Polbahnen in Reuleaux's „theor. Kinematik", S. 192, gezeichnet.



Element vereinigten Glieder *c* um die zusammenfallenden Axen *A*, *C*. Geht die Bewegung von der Schwinge aus (gleichschenkliges Schwingkurbelgetriebe), so sind die Uebergangslagen $AB'C'D$ und $AB''C''D$ Todlagen, von denen aus die Bewegung der Kurbel in beiderlei Sinn erfolgen kann. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsel- resp. Todlagen kann wieder durch Massenkraftschluss oder durch Paarung gegenüber liegender Kettenglieder geschehen; letzteres würde insbesondere bei dem Kurbelschwinggetriebe vorzuziehen sein, sofern ein Schwungrad im Allgemeinen nur mit einem in unveränderlichem Sinne fast gleichförmig rotirenden Körper zweckmässig zu verbinden ist.

§. 39. Ebene Schubkurbelkette.

Von grösserer praktischer Wichtigkeit, als die in den beiden vorigen Paragraphen betrachteten, durch die Gleichheit gewisser Gliedlängen charakterisirten Specialformen der ebenen Drehkörperkette, sind diejenigen, die daraus durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen; inwiefern letztere als Grenzfälle der ersteren betrachtet und daraus hervorgehend vorgestellt werden können, wurde in §. 33 mit Beziehung auf Fig. 37 erläutert. Hier wird zunächst nur eines der 4 Drehkörperpaare in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt und die entsprechende Kette als Schubkurbelkette bezeichnet im Anschlusse an die Bezeichnung des am allgemeinsten angewendeten der daraus hervorgehenden Mechanismen.

Indem jetzt die Kettenglieder sich insofern unterscheiden, als zwei von ihnen unter sich durch ein Prismenpaar verbunden sind, die beiden anderen aber, mit jenen durch Drehkörperpaare verbunden, auch unter sich durch ein Drehkörperpaar verbunden sind, können nun (was in §. 36 bei der ebenen Drehkörperkette im Allgemeinen nicht anging) die einzelnen Glieder der Kette an und für sich, d. h. unabhängig von ihrer Lage gegen das in einem Mechanismus jeweils festgestellte Glied, mit bestimmten Buchstaben bezeichnet werden, ohne die Allgemeinheit weiter zu beschränken. Diejenigen Kettenglieder, die sowohl unter sich wie mit den beiden anderen durch Drehkörperpaare verbunden sind, seien mit *a* und *b*, und zwar mit *a* das kleinere von ihnen bezeichnet (vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles $a = b$); durch die stets beibehaltene Buchstabenfolge *a*, *b*, *c*, *d* für die in der Kette aufeinander folgenden Glieder sind dann auch die Bezeichnungen *c*, *d* der beiden anderen vollkommen bestimmt, und



es ist das Elementenpaar D, welches in ein Prismenpaar übergegangen ist, indem die betreffende Paaraxe jetzt im Unendlichen liegt. Die Schubrichtung des Prismenpaares D ist normal zu der Richtung, nach der diese Axe ins Unendliche fortrückte, in welcher Hinsicht der Fall von besonderer Wichtigkeit ist, dass diese letztere Richtung normal zur Ebene AC, und somit die Schubrichtung des Prismenpaares der Ebene AC parallel ist. Dieser Fall wird im Folgenden stets vorausgesetzt, wenn von der ebenen Schubkurbelkette schlechtweg die Rede ist; anderen Falls soll sie ausdrücklich als allgemeine Schubkurbelkette bezeichnet werden.

Die Benennung der Glieder bezieht sich auf die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen. Das festgestellte Glied heisst nach wie vor der Steg; ein bewegliches Glied a oder b heisst Koppel, wenn es dem Stege gegenüber liegt, anderen Falls Kurbel oder Schwinge, jenachdem es um eine feste Axe in stets gleichem Sinne rotirt oder zwischen zwei Grenzlagen schwingt; ein bewegliches Glied c oder d heisse eine Schleife, wenn es um eine feste Axe (rotirend oder schwingend) drehbar ist, bei anderer Bewegungsart ein Schieber. Die Benennungen der Mechanismen sollen, wie bei den aus der Drehkörperkette (§. 36) abgeleiteten, den Namen der beiden dem Stege benachbarten Glieder angepasst, beziehungsweise daraus zusammengesetzt werden. Ist eines dieser Glieder dasjenige, von dem die Bewegung ausgeht, so kann durch Voranstellung des Namens dieses treibenden Gliedes das entsprechende Getriebe von demjenigen unterschieden werden, bei dem die Bewegung vom anderen dieser beiden dem Mechanismus den Namen gebenden Glieder ausgeht; nur wenn das dem Stege gegenüber liegende Glied das treibende ist, bedarf es eines besonderen Zusatzes zur bestimmten Bezeichnung des Getriebes.

Hiernach sind es nun folgende 4 Mechanismen, die aus der ebenen Schubkurbelkette hervorgehen können, je nach der Wahl des festgestellten (in den folgenden Figuren durch Unterstreichung seiner Buchstabenbezeichnung angedeuteten) Gliedes.

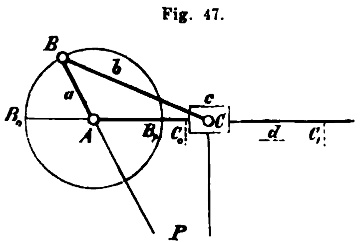


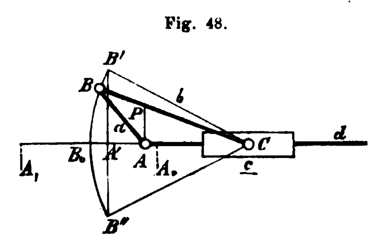
Fig. 47.

1. Schubkurbel, aus der Kette hervorgehend durch Feststellung des Gliedes d (Fig. 47); a ist Kurbel, b Koppel, c Schieber. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers in einer Strecke $C_0C_1 = B_0B_1 = 2a$; der veränderliche Pol P, um den sich dabei die Koppel jeweilig dreht, ist der Schnittpunkt von AB und der Normalen zu AC im Punkte C. Dieser

Mechanismus ist der am meisten gebräuchliche zur Umsetzung einer rotirenden in eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung oder umgekehrt, jenachdem die Kurbel das treibende Glied ist (Kurbelschubgetriebe) oder der Schieber (Schubkurbelgetriebe). Im letzteren Falle sind die Uebergangslagen AB_0C_0 und $AB_,C_,$ Todlagen, von denen aus bei einerlei Bewegungssinn des Schiebers die Kurbel in beiderlei Sinn rotiren kann; die zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen mit stets demselben Drehungssinne der Kurbel pflegt (nach §. 32) durch Massenkraftschluss (durch ein Schwungrad auf der Kurbelwelle) oder durch Kraftkettenschluss (durch Verbindung von zwei gleichen Schubkurbelgetrieben mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle) oder durch beide Mittel zugleich bewirkt zu werden. Unter sich mögen die beiden Todlagen AB_0C_0 und $AB_,C_,$, in denen der Winkel ABC beziehungsweise $= 0$ und 180^0 ist, als obere und untere Todlage, die Punkte B_0 und $B_,$ als oberer und unterer Todpunkt unterschieden werden (analog der sogenannten oberen und unteren Conjunction eines innerhalb der Erdbahn umlaufenden Planeten B bezüglich auf A als Sonne und C als Erde).

2. Schubschwinge (Fig. 48), durch Feststellung des Gliedes c aus der Kette hervorgehend; d ist Schieber, a Koppel (mit dem jeweiligen Schnittpunkte P von BC und der Normalen zu AC im Punkte A als Pol), b Schwinge. Der Schieber bewegt sich in einer Strecke $A_0A_, = 2a$ hin und her, während die Schwinge zwischen den Grenzlagen CB' und CB'' schwingt, die dann erreicht werden, wenn A in A' liegt so, dass $CA'B'$ und $CA'B''$ rechte Winkel sind; der Schwingungswinkel $B'CB''$ ist also $= 2 \, arc \sin \frac{a}{b}$, und es entsprechen

Fig. 48.



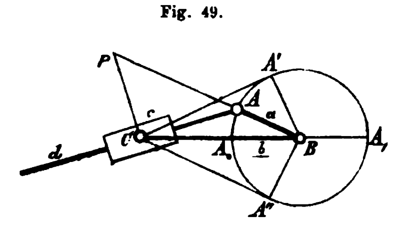
den Lagen $A_0 \; A' \; A_, \; A' \; A_0$ des Punktes A

die Lagen $B_0 \; B' \; B_0 \; B'' \; B_0$ des Punktes B.

Die Beziehung zwischen dem relativen Drehungswinkel B_0AB der Koppel gegen den Schieber und dem entsprechenden Wege A_0A des letzteren ist dieselbe, wie bei der Schubkurbel (Fig. 47) die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel B_0AB der Kurbel und dem Wege C_0C des Schiebers. Einige, freilich seltene Anwendungen hat dieser Mechanismus als Getriebe besonders in der Weise gefunden, dass dabei die Bewegung von der Koppel ausgeht; Todlagen sind dann nicht vorhanden.

3. **Schwingende Kurbelschleife** (Fig. 49), entsprechend der Feststellung des Gliedes b; c ist Schleife, d Schieber, a Kurbel. Der Pol P, um den sich der Schieber d jeweilig dreht, wird in dem Schnittpunkte von AB mit der Normalen zu AC im Punkte C gefunden (ebenso wie in Fig. 47 der Pol für die Bewegung von b gegen d gefunden wurde). Während die Kurbel rotirt, schwingt die Schleife zwischen den Grenzlagen CA' und CA'' (Winkel $CA'B = CA''B = 90^0$), und wenn jene gleichförmig rotirt, erfolgen die Schwingungen der Schleife im einen und im anderen Sinne in verschiedenen Zeiten, deren Verhältniss

Fig. 49.



$$n = \frac{\text{Winkel } A_{,}BA'}{\text{Winkel } A'BA_0} = \frac{\pi - arc\cos\frac{a}{b}}{arc\cos\frac{a}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ist, in Uebereinstimmung mit Gl. (7), §. 38 für die gleichschenklige Kurbelschwinge (Fig. 46), wenn $\frac{a}{c}$ dort $= \frac{a}{b}$ hier ist; der Schwingungswinkel $A'CA'' = 2\, arc\sin\frac{a}{b}$ der Schleife ist dann aber nur halb so gross wie dort derjenige der Schwinge. Diese Ungleichheit der Schwingungszeiten der Schleife im einen und im anderen Sinne bei gleichförmiger Rotation der Kurbel hat Veranlassung gegeben, den vorliegenden Mechanismus in der Weise als Getriebe zu verwenden, dass dabei die Bewegung von der Kurbel ausgeht, d. h. als schwingendes Kurbelschleifgetriebe, um von der Schleife aus ein Werkzeug (Schneid- oder Stosswerkzeug) zu bewegen, dessen Rückgang schneller als der Vorgang erfolgen soll; Todlagen sind dabei nicht vorhanden. Noch häufiger ist übrigens die Benutzung dieses Mechanismus als Getriebe in der Weise, dass die Bewegung vom Schieber ausgeht, wie bei oscillirenden Dampfmaschinen, wo der Cylinder die Schleife, die Kolbenstange mit Kolben der Schieber ist; dabei sind dann BA_0C und $BA_{,}C$ Todlagen, die auf ähnliche Weise wie bei dem Schubkurbelgetriebe (Fig. 47) zwangläufig überschritten werden können.

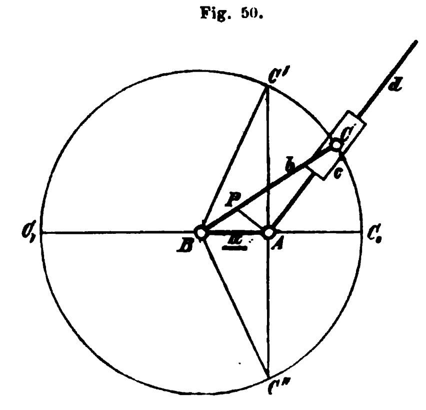
4. **Rotirende Kurbelschleife** (Fig. 50); das Glied a ist Steg, b Kurbel, c Schieber, d Schleife; der jeweilige Pol von c ist der Schnittpunkt P von BC und der Normalen zu AC im Punkte A (ebenso wie in Fig. 48 der Pol von a bezüglich der relativen Bewegung gegen c). Schleife

und Kurbel rotiren um ihre Axen A und B mit Winkelgeschwindigkeiten ω_a resp. ω_b, deren Verhältniss veränderlich, im Mittel ∓ 1, am grössten in der Lage C_0, am kleinsten in der Lage $C_,$ des Punktes C ist, und zwar

$$\left.\begin{aligned} max\,\frac{\omega_a}{\omega_b} &= \frac{b}{b-a} \\ min\,\frac{\omega_a}{\omega_b} &= \frac{b}{b+a} \end{aligned}\right\} \text{somit}\ \frac{max\,\frac{\omega_a}{\omega_b}}{min\,\frac{\omega_a}{\omega_b}} = m = \frac{b+a}{b-a} \quad \ldots\ldots (2).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ist das Verhältniss n der Zeiten, welche die Schleife zur einen und zur anderen der beiden halben Umdrehungen gebraucht, deren Grenzlagen AC', AC'' zu AB senkrecht sind, = dem Verhältnisse der hohlen Winkel $C_,BC'$, $C'BC_0$, also

Fig. 50.



$$n = \frac{\pi - arc\,cos\,\frac{a}{b}}{arc\,cos\,\frac{a}{b}};$$

$$\frac{a}{b} = cos\,\frac{\pi}{n+1} \quad \ldots (3).$$

Diese Gleichungen (2) und (3) sind dieselben, wie die in §. 38 für die gleichschenklige Doppelkurbel aufgestellten Gleichungen (4) und (5) bei Vertauschung von c mit b; sie ergeben also auch wie dort:

$$m = cotg^2\,\frac{\pi}{2(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und es ist ersichtlich, inwiefern diese rotirende Kurbelschleife jener gleichschenkligen Doppelkurbel ebenso entspricht wie die schwingende Kurbelschleife (Fig. 49) der gleichschenkligen Kurbelschwinge entsprechend gefunden wurde. Alle diese Mechanismen können (ebenso wie gegenläufige Zwillingskurbeln oder elliptische Räder) als Getriebe zur Hin- und Herbewegung von Werkzeugen mit schnellerem Rückwärts-, als Vorwärtsgang benutzt werden. —

Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette werden viel seltener im Maschinenbau angewendet. Ist bei einer solchen (Fig. 51) e die Entfernung der parallelen geradlinigen relativen Bahnen, welche die Punkte C, A als Punkte der Elemente c und d des Prismenpaares c, d durchlaufen, so kann die Kette aus einer viergliedrigen Drehkörperkette $ABCD$ dadurch hervor-

Fig. 51.

gegangen gedacht werden, dass die Axe D ins Unendliche gerückt ist, während die Gliedlängen CD und AD sich um $CD - AD = e$ unterscheiden. Indem somit $AB = a$ die kleinste, CD die grösste Gliedlänge dieser Kette ist, kann sie nach der allgemeinen Entwickelung in §. 36 nur dann einen der Doppelkurbel oder der Schwingkurbel analogen Mechanismus liefern, wenn

$$a + CD < b + AD, \text{ also } a + e < b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, was gemäss der Voraussetzung $a < b$ nur bei der im engeren Sinne so genannten Schubkurbel ($e = 0$) ohne Weiteres der Fall ist, so ergiebt sich nach jener allgemeinen Entwickelung in §. 36 durch Feststellung des kürzesten Gliedes a die der Doppelkurbel analoge allgemeine rotirende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 50), durch Feststellung eines der beiden dem kürzesten benachbarten Glieder d oder b die der Schwingkurbel analoge allgemeine Schubkurbel (entsprechend Fig. 47) mit der Schublänge

$$s = \sqrt{(b+a)^2 - e^2} - \sqrt{(b-a)^2 - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

des Schiebers c oder die allgemeine schwingende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 49), endlich durch Feststellung des dem kürzesten gegenüberliegenden Gliedes c die der Doppelschwinge analoge allgemeine Schubschwinge (entsprechend Fig. 48).

Mechanismen der letzten Art mit nur schwingender resp. geradlinig hin- und hergehender Bewegung beider dem festgestellten benachbarter Glieder ergeben sich aus der allgemeinen Schubkurbelkette immer, wenn die Bedingung (5) nicht erfüllt ist, einerlei welches das festgestellte Glied sein möge. Bei Feststellung von d erhält man dann statt der Schubkurbel eine Schubschwinge ebenso wie immer bei Feststellung von c, bei Feststellung von b oder a aber statt der schwingenden resp. rotirenden Kurbelschleife einen Mechanismus, der nur aus dieser allgemeinen Schubkurbelkette ($e > 0$) hervorgeht, und welcher, indem dem festgestellten Gliede einerseits eine Schwinge, andererseits eine schwingende Schleife benachbart ist, als schleifende Doppelschwinge oder auch kürzer als Schleifschwinge bezeichnet werden kann.

Ein Anwendungsbeispiel der allgemeinen Schubschwinge und zwar derjenigen, in welche bei Feststellung des Gliedes d die allgemeine Schubkurbel wegen Nichterfüllung der Bedingung (5) übergeht, bietet der Schwartzkopff'sche Universalschraubenschlüssel dar. Bei demselben wird das Glied d (Fig. 51) dadurch festgestellt, dass eine damit verbundene zur Schubrichtung des Prismenpaares c, d senkrechte ebene Ansatzfläche gegen eine

Seitenfläche der festzudrehenden oder zu lösenden Schraubenmutter angelegt wird; eine damit parallele Ansatzfläche des Gliedes *c* wird dann gegen die entgegengesetzte Seitenfläche der Schraubenmutter dadurch angedrückt, dass die Schwinge *a* durch einen mit ihr verbundenen Handgriff in entsprechendem Sinne gedreht wird. Ist so die Mutter zwischen den beiden Ansatzflächen eingeklemmt, so bildet sie mit dem ganzen Mechanismus einen starren Körper, der nun vermittels des Handgriffes weiter gedreht werden kann. Als Getriebe kommt also der Mechanismus hier so zur Verwendung, dass er als allgemeines Schwingschubgetriebe zu bezeichnen ist.

§. 40. Bewegungsgesetze des Schubkurbelmechanismus.

Bei der ausgedehnten Anwendung, welche die Schubkurbel (Fig. 47 im vor. §.) im Maschinenbau findet, ist es von Interesse, das Bewegungsgesetz dieses Mechanismus näher festzustellen und in Formeln zu bringen, auf die im weiteren Verlauf dieses Werkes vielfach Bezug zu nehmen sein wird. Insbesondere handelt es sich dabei um die Beziehung zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte B und C, also des Kurbelzapfens und des Schiebers, indem die Bewegung jedes anderen Punktes der Koppel BC durch die ihrer Endpunkte B, C bestimmt ist.

Ist γ der Winkel ACB, der dem von der oberen Todlage aus gerechneten Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$ der Kurbel entspricht, so ergiebt sich der entsprechende Weg des Schiebers:

$$s = C_0C = B_0C - b = a(1 - \cos\alpha) - b(1 - \cos\gamma)$$

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\alpha - \frac{1 - \cos\gamma}{\lambda} \text{ mit } \lambda = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

oder wegen $a \sin\alpha = b \sin\gamma$, also $\sin\gamma = \lambda \sin\alpha$ und mit Rücksicht darauf, dass γ ein (positiver oder negativer) spitzer Winkel, $\cos\gamma$ folglich positiv ist,

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\alpha - \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Wäre α ein von der unteren Todlage aus gerechneter Drehungswinkel der Kurbel und s der entsprechende Weg des Schiebers, so brauchte in dieser Gleichung nur λ entgegengesetzt genommen zu werden, und gilt dieselbe Bemerkung dann auch für alle aus der Gl. (2) abgeleiteten Gleichungen. Ist nämlich der Winkel $B_1AB = \alpha'$, $C_1C = s'$, so ist nach Gl. (2)

$$\frac{2a-s'}{a}=1-\cos(\pi-\alpha')-\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\pi-\alpha')}}{\lambda}$$

$$\frac{s'}{a}=1-\cos\alpha'+\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha'}}{\lambda},$$

wie auch aus Gl. (2) durch Vertauschung von s mit s', α mit α', λ mit $-\lambda$ hervorgeht.

In der Regel ist λ ein hinlänglich kleiner Bruch, um, wenn die in Gl. (2) vorkommende Wurzelgrösse in die Reihe

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha-\frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\alpha-\dots$$

entwickelt wird, auf die Berücksichtigung des Gliedes mit der niedrigsten Potenz von λ sich beschränken zu dürfen, entsprechend dann auch in der Gleichung für den Schieberweg:

$$\frac{s}{a}=1-\cos\alpha-\frac{1}{2}\lambda\sin^2\alpha-\frac{1}{8}\lambda^3\sin^4\alpha-\dots \quad \dots\dots (3).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges von der oberen zur unteren Todlage ($\alpha=90^0$) ergiebt sich:

$$\frac{s}{a}=1-\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}=1-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^3-\dots \quad \dots\dots (4)$$

und für die Mitte des Schieberweges ($s=a$):

$$(\lambda\cos\alpha+1)^2=1-\lambda^2\sin^2\alpha;\quad \cos\alpha=-\frac{1}{2}\lambda \quad \dots\dots (5).$$

Aus dem Ausdrucke von $\frac{s}{a}$ ergiebt sich das Verhältniss entsprechender Wege des Schiebers und des Kurbelzapfens (der Punkte C und B, Fig. 47) $=\frac{s}{a\alpha}$ und das Verhältniss ihrer gleichzeitigen Geschwindigkeiten $\frac{w}{v}=\frac{1}{a}\frac{ds}{d\alpha}$. Unmittelbarer erhält man dieses Geschwindigkeitsverhältniss von Schieber und Kurbelzapfen mit Rücksicht auf die Bedeutung des Pols P der Koppel BC aus dem Dreiecke PBC:

$$\frac{w}{v}=\frac{PC}{PB}=\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\gamma}=\sin\alpha-\cos\alpha\,tg\,\gamma \quad \dots\dots\dots (6).$$

oder wegen $$tg\,\gamma=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\lambda\sin\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}$$

$$\frac{w}{v} = \sin\alpha\left(1 - \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$= \sin\alpha\left[1 - \lambda\cos\alpha\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha + \ldots\right)\right] \ldots\ldots\ldots (8).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges ($\alpha = 90^0$) ist

$$w = v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und für die Mitte des Schieberweges ($s = a$) wegen $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\lambda$ nach Gl. (5), also

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\lambda^2\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2\right)} = \sqrt{1-\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{w}{v} &= \sqrt{1-\frac{1}{4}\lambda^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\lambda^2}{1-\frac{1}{2}\lambda^2}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}\lambda^2}}{1-\frac{1}{2}\lambda^2}\\ &= 1 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{23}{128}\lambda^4 + \ldots\end{aligned}\right\} \ldots (10).$$

Für $\alpha = 0$ und 180^0 ist das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v} = 0$; beim Uebergange von einer zur anderen Todlage nimmt es also zuerst zu und dann ab, nachdem es ein Maximum erreicht hatte für den durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = 0$$

bestimmten Werth von α. Dieser Differentialquotient von $\frac{w}{v}$ nach α ergiebt sich aus Gl. (6):

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \cos\alpha + \sin\alpha\, tg\,\gamma - \frac{\cos\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}$$

oder wegen $\sin\gamma = \lambda\sin\alpha,\quad \cos\gamma\, d\gamma = \lambda\cos\alpha\, d\alpha \ldots\ldots\ldots (11)$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \cos\alpha + \sin\alpha\, tg\,\gamma - \lambda\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\gamma} \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\frac{\sin^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}} \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\left[\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\left(1+\lambda^2\sin^2\alpha+\ldots\right)\right]\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha+\ldots\right)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}\lambda^3\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha\right) + \ldots (14).$$

Unter der Voraussetzung, dass λ ein kleiner Bruch und dass der dem Maximum von $\frac{w}{v}$ entsprechende Werth von $\cos\alpha$ eine mit λ vergleichbare Grösse ist, muss dieser Werth nach Gl. (14) bei Vernachlässigung der Glieder von der Grössenordnung λ^5 der folgenden Gleichung entsprechen:

$$\cos\alpha + \lambda(1 - 2\cos^2\alpha) + \frac{1}{2}\lambda^3 = 0.$$

Als erster Näherungswerth folgt $\cos\alpha = -\lambda$, und wenn dieser in dem Gliede mit λ substituirt wird, als zweiter Näherungswerth:

$$\cos\alpha = -\lambda(1 - 2\lambda^2) - \frac{1}{2}\lambda^3 = -\lambda + \frac{3}{2}\lambda^3 \quad \ldots\ldots (15),$$

der bis auf Glieder von der Grössenordnung λ^5 richtig und in der That, wie vorausgesetzt wurde, eine mit λ vergleichbare Grösse ist. Mit derselben Annäherung findet man hiermit nach Gl. (3) den entsprechenden Schieberweg:

$$\frac{s}{a} = 1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{9}{8}\lambda^3 \quad \ldots\ldots (16)$$

und nach Gl. (8) das grösste Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v}$ selbst:

$$max\frac{w}{v} = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 \quad \ldots\ldots (17).$$

Mit Hülfe des durch Gl. (6)—(8) bestimmten Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{w}{v}$ und seines durch Gl. (12)—(14) bestimmten Differentialquotienten $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)$ ist schliesslich die Beziehung zwischen den Beschleunigungen des Kurbelzapfens und des Schiebers auszudrücken. Indem nämlich, unter t die Zeit verstanden, $\frac{d\alpha}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel $= \frac{v}{a}$ und somit

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{w}{v}\right) \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{dw}{dt} - w\frac{dv}{dt}\right)\frac{a}{v}$$

ist, ergiebt sich zwischen der Beschleunigung des Schiebers $= \frac{dw}{dt}$ und den beiden Componenten der Beschleunigung des Kurbelzapfens (Tangentialbeschleunigung $= \frac{dv}{dt}$ und Normalbeschleunigung $= \frac{v^2}{a}$) die Beziehung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{w}{v} + \frac{v^2}{a} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) \quad \ldots\ldots (18).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel beschränkt sich die Beschleunigung des Kurbelzapfens B auf seine alsdann constante Normalbeschleunigung, und ist das Beschleunigungsverhältniss der Punkte C, B:

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

insbesondere für die obere Todlage ($\alpha = 0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = 1 - \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20),$$

für die Mitte des Kurbelweges ($\alpha = 90^0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^3 + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (21),$$

für die Mitte des Schieberweges ($s = a, \cos\alpha = -\frac{1}{2}\lambda$) näherungsweise nach Gl. (14):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = -\frac{1}{2}\lambda + \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) + \frac{1}{2}\lambda^3 = \frac{1}{2}\lambda \quad \ldots \ldots \quad (22),$$

endlich, nachdem es bei der durch Gl. (15) oder (16) näherungsweise bestimmten Lage der Kurbel resp. des Schiebers durch Null gegangen und negativ, d. h. dem Bewegungssinne entgegengesetzt geworden ist, für die untere Todlage ($\alpha = 180^0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = -(1 + \lambda) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Die durch Gl. (20) und (23) bestimmten Absolutwerthe der Schieberbeschleunigung

$= (1 - \lambda)\frac{v^2}{a}$ im Sinne $C_0 C_,$ für die Lage C_0

und $= (1 + \lambda)\frac{v^2}{a}$ im Sinne $C_, C_0$ für die Lage $C_,$

des Schiebers sind Maximalwerthe, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Lagen und Bewegungszustände des Mechanismus in Beziehung auf die Schieberbahn $C_0 C_,$ hervorgeht.

Vermittels der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte B, C kann schliesslich die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines beliebigen Punktes X der Koppel BC gefunden werden, und zwar am übersichtlichsten mit Hülfe des Pols P und des Beschleunigungscentrums Q (Fig. 52), nachdem zuvor die Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ um P

und die Beschleunigung $= \varphi$ im Abstande $= 1$ von Q bestimmt worden sind. Jene Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega = \frac{v}{PB} = \frac{w}{PC} = \frac{w : \sin \alpha}{PA} = \frac{w : \sin \alpha}{PB - a} = \frac{w : \sin \alpha}{\frac{v}{\omega} - a},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (7) folgt:

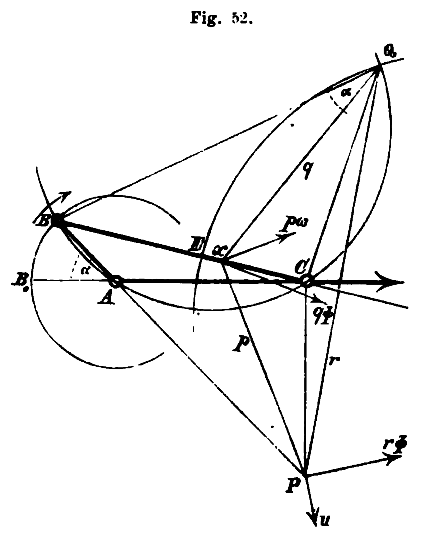
$$v - a\omega = \frac{w}{\sin \alpha}; \quad \omega = \frac{1}{a}\left(v - \frac{w}{\sin \alpha}\right) = \frac{v}{a} \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \quad . \; (24).$$

Hiermit kann die Lage des Pols P auch durch seine Entfernungen

$$PB = \frac{v}{\omega}, \quad PC = \frac{w}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (25)$$

von den Punkten B, C bestimmt werden, und ergiebt sich die Geschwindigkeit des beliebigen Punktes X von $BC = p\omega$, normal zu $PX = p$ gerichtet.

Fig. 52.



Das Beschleunigungscentrum Q ist nach bekannten Gesetzen der allgemeinen Kinematik dadurch charakterisirt, dass die Beschleunigungen der verschiedenen Systempunkte den Entfernungen der letzteren von Q proportional und gegen ihre Verbindungslinien mit Q in gleichem Sinne gleich geneigt sind. Indem nun — bei Voraussetzung gleichförmiger Rotation der Kurbel — die Beschleunigung des Punktes B die Richtung BA, die von C die Richtung AC oder CA hat und somit unter dem Winkel α oder $180^0 - \alpha$ gegen jene geneigt ist, müssen auch die Geraden BQ, CQ unter demselben Winkel gegen einander geneigt sein, muss also Q in dem Kreise liegen, der über BC als Sehne die Winkel α und $180^0 - \alpha$ als Peripheriewinkel fasst, d. h. in dem Kreise, der durch die Punkte A, B, C geht. Da ferner der Ort aller Punkte Q, deren Entfernungen von zwei Punkten B, C ein constantes Verhältniss (hier $=$ dem Verhältnisse der Beschleunigungen $\frac{v^2}{a}$ und $\frac{dw}{dt}$ dieser Punkte) haben, der Kreis ist, dessen Durchmesser EF in der Geraden BC so liegt, dass seine Endpunkte E, F (von denen in Fig. 52 nur der erste sicht-

bar ist) die Strecke BC in jenem Verhältnisse theilen, hier also so, dass

$$BE:CE=BF:CF=\frac{v^2}{a}:\frac{dw}{dt}=1:\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)$$

ist, so ist das Beschleunigungscentrum Q einer der beiden Schnittpunkte jenes Kreises durch A, B, C mit diesem Kreise über dem Durchmesser EF und zwar derjenige von beiden, für welchen die Beschleunigungen von B und C in gleichem Sinne beziehungsweise gegen BQ und CQ gleich geneigt sind. (Der in Fig. 52 mit Q bezeichnete Schnittpunkt ist das Beschleunigungscentrum insofern, als bei der betreffenden Lage des Mechanismus die Beschleunigung des Punktes C im Sinne AC gerichtet ist.) Mit Rücksicht auf das Dreieck QBC, dessen Winkel bei $Q=\alpha$ ist, hat man nun:

$$b^2=\overline{QB}^2+\overline{QC}^2-2\,.\,QB\,.\,QC\,.\cos\alpha$$

und daraus mit

$$QB=\frac{1}{\varphi}\frac{v^2}{a},\quad QC=\frac{1}{\varphi}\frac{dw}{dt}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(26)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{b}\sqrt{\left(\frac{v^2}{a}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-2\frac{v^2}{a}\frac{dw}{dt}\cos\alpha}\\&=\frac{v^2}{ab}\sqrt{1+\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)\right]^2-2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right).\cos\alpha}\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\;(27).$$

Hiermit kann die Lage des Beschleunigungscentrums Q auch durch seine Entfernungen von den Punkten B, C nach Gl. (26) bestimmt werden, und ergiebt sich endlich die Beschleunigung des beliebigen Punktes X von $BC=q\varphi$, unter dem Winkel QBA gegen $XQ=q$ geneigt.

Ebenso ist die Beschleunigung des Punktes P, wenn er mit BC fest verbunden gedacht und die Strecke $PQ=r$ gesetzt wird, $=r\varphi$ mit einem Neigungswinkel $=QBA$ gegen PQ. Den Sätzen der allgemeinen Kinematik zufolge ist aber diese Beschleunigung des Pols auch $=u\omega$ und normal gegen die in P sich berührenden Polbahnen (des Steges und der Koppel) gerichtet, wenn u die Wechselgeschwindigkeit des Pols, d. h. die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher derselbe in der festen (mit dem Stege verbundenen) Polbahn sich bewegt. Diese Wechselgeschwindigkeit ist also:

$$u=\frac{r\varphi}{\omega}$$

und normal zur Beschleunigung $r\varphi$ des Pols P gerichtet. Ihr in Fig. 52 angedeuteter Sinn entspricht dem Umstande, dass, wie bekannt, der Sinn der Polbeschleunigung durch rechtwinklige Drehung des Sinnes von u entgegen dem Drehungssinne von ω erhalten wird. —

Indem die hier entwickelten Formeln namentlich insofern Anwendung finden, als es sich bei Dampfmaschinen um die Beziehung zwischen der Bewegung des Kolbens (als Schieber c) im Cylinder (als Steg d) und der Bewegung des Kurbelzapfens B resp. der Winkelbewegung der Kurbel a handelt, mag schliesslich darauf hingewiesen werden, dass sie nicht ohne Weiteres auch für oscillirende Dampfmaschinen gelten, bei denen nach Art der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49 im vor. §.) der Cylinder (als Schleife c) um die Axe C schwingt und die Kurbel nicht um A, sondern um B rotirt. Die Bewegung des Kolbens im Cylinder ist dann zwar als relative Bewegung des Gliedes d gegen das Glied c die gerade umgekehrte wie im vorigen Falle als Relativbewegung von c gegen d, aber der vom unteren Todpunkte A_0 aus gerechnete Drehungswinkel A_0BA der Kurbel entspricht jetzt in Fig. 47 nicht dem Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$, sondern dem Winkel $ABC = \beta = \alpha - \gamma$, so dass die Ermittelung der Beziehungen, die bei der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49) zwischen der Bewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Kurbeldrehung stattfinden, darauf hinausläuft, die der Schieberbewegung bei der Schubkurbel (Fig. 47) entsprechenden Grössen durch den Winkel $ABC = \beta$ anstatt durch den Winkel $B_0AB = \alpha$ auszudrücken.

Um zu dem Ende die in obigen Gleichungen vorkommenden Functionen von α durch solche von β auszudrücken, hat man

$$\lambda \sin \alpha = \sin \gamma = \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

daraus $$tg\, \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \lambda}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{(\cos \beta - \lambda)^2}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}}.$$

Die Wurzelgrösse ist in diesem Ausdrucke von $\cos \alpha$ absolut zu nehmen, weil α und β gleichzeitig von 0 bis 180° wachsen, also $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ gleichzeitig positiv und deshalb, wie der Ausdruck von $tg\, \alpha$ erkennen lässt, $\cos \alpha$ und $\cos \beta - \lambda$ stets einerlei Zeichens sind. Die Substitution dieser Ausdrücke von $\sin^2 \alpha$ und $\cos \alpha$ in Gl. (2) liefert:

$$\frac{s}{a} = 1 - \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}} - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \beta}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}}\right) \quad (28).$$

Durch Entwicklung in eine nach wachsenden Potenzen von λ fortschreitende Reihe findet man:

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\beta + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\beta + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\beta \cos\beta$$
$$+ \frac{1}{8}\lambda^3 \sin^2\beta (4\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \ldots \ldots \ldots \ldots (29).$$

Rechnet man β von der oberen Todlage BA, (Fig. 49) der Kurbel und s vom entsprechenden anderen Ende des relativen Schieberweges, so hat man in Gl. (28) und (29) nur $2a - s$ für s, $180^0 - \beta$ für β zu setzen, wodurch sich Gleichungen ergeben, die aus Gl. (28) und (29) auch durch Vertauschung von λ mit $-\lambda$ hervorgehen. Dieselbe Bemerkung, analog der oben in Beziehung auf Gl. (2) gemachten, gilt dann auch für alle abgeleiteten Gleichungen.

Beschränkt man sich unter der Voraussetzung, dass λ ein kleiner Bruch ist, auf die Berücksichtigung der Glieder mit der ersten Potenz von λ, so geht Gl. (29) aus Gl. (3) durch Vertauschung von α mit β, λ mit $-\lambda$ hervor, woraus dann, unter v wieder die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, also hier des Punktes A (Fig. 49) verstanden, mit Rücksicht auf die so eben gemachte Bemerkung und darauf, dass ebenso

wie oben $\quad \frac{w}{v} = \frac{1}{a}\frac{ds}{d\alpha}, \quad \frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)$ war,

so hier $\quad \frac{w}{v} = \frac{1}{a}\frac{ds}{d\beta}, \quad \frac{dw}{dt} : \frac{v^2}{a} = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{w}{v}\right)$ ist,

folgt, dass in erster Annäherung die Beziehungen zwischen der Relativbewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Bewegung des Kurbelzapfens A bei der schwingenden Kurbelschleife dieselben sind wie die zwischen den Bewegungen des Schiebers und des Kurbelzapfens B bei der Schubkurbel, wenn nur die Bewegung des Kurbelzapfens in beiden Fällen vom oberen oder in beiden Fällen vom unteren Todpunkte aus gerechnet wird, d. h. von B_0 in Fig. 47 und von A, in Fig. 49, oder von B, in Fig. 47 und von A_0 in Fig. 49. Die genauere Entwickelung dieser Beziehungen ist für die schwingende Kurbelschleife weniger wichtig und zudem weniger einfach, als für die Schubkurbel.

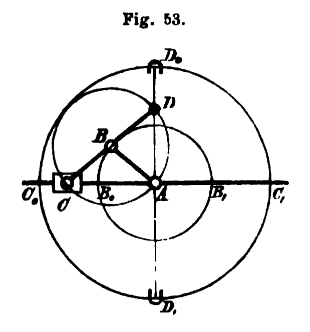
§. 41. Gleichschenklige Schubkurbelkette.

Bei Besprechung der Mechanismen, die aus der (im engeren Sinne so genannten) ebenen Schubkurbelkette erhalten werden können, waren die Glieder $AB = a$, $BC = b$ verschieden lang ($a < b$) vorausgesetzt worden,

vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles $a = b$. In diesem letzteren, d. i. im Falle der gleichschenkligen Schubkurbelkette, sind die Glieder a, b und ebenso dann auch die Glieder c, d kinematisch nicht verschieden, womit zugleich der Unterschied der dort als Schubkurbel und als Schubschwinge (Fig. 47 und Fig. 48), desgleichen der Unterschied der als schwingende und als rotirende Kurbelschleife (Fig. 49 und Fig. 50) bezeichneten Mechanismen fortfällt. In der That kann die gleichschenklige Schubkurbelkette auch aus der gleichschenkligen Drehkörperkette (§. 38) und zwar dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass die längeren gleichen Glieder c unendlich lang, d. h. durch ein Prismenpaar verbunden werden, dessen Schubrichtung parallel der Axenebene der sie mit den anderen gleichen Gliedern $= a$ verbindenden Drehkörperpaare ist; von den beiden Mechanismen aus der gleichschenkligen Drehkörperkette geht dann derjenige, welcher, entsprechend der Feststellung eines der Glieder c, dort als gleichschenklige Schwingkurbel (Fig. 46) bezeichnet wurde, in einen als gleichschenklige Schubkurbel zu bezeichnenden, und der dort bei Feststellung eines der Glieder a als gleichschenklige Doppelkurbel (Fig. 45) bezeichnete in einen als gleichschenklige Kurbelschleife zu bezeichnenden Mechanismus über.

Bei der gleichschenkligen Schubkurbel (Fig. 53) ist, während die Kurbel $AB = a$ um A rotirt, der Schieber längs dem Stege in einer geradlinigen Bahn $C_0AC_1 = 4a$ beweglich, deren Mitte A und die als Grenzfall der kreisbogenförmigen Bahn $C'AC''$ (Fig. 46) des Punktes C bei der gleichschenkligen Schwingkurbel zu betrachten ist. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers, dem Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$ der ersteren der Weg

Fig. 53.



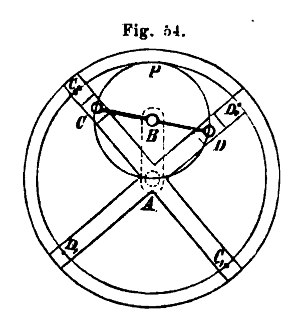
$$C_0C = s = 2a(1 - \cos\alpha)$$

des letzteren = dem von einem Todpunkte aus gerechneten Schieberwege eines Schubkurbelmechanismus, dessen Kurbellänge $= 2a$ und verschwindend klein im Vergleich mit der Koppellänge ist. Ist der Schieber das treibende Glied (gleichschenkliges Schubkurbelgetriebe), so sind die Grenzlagen C_0 und C_1 Todlagen und durch dieselben Mittel wie bei dem nicht gleichschenkligen Schubkurbelgetriebe zwangläufig zu überschreiten, insbesondere durch Verbindung der Kurbel mit einem Schwungrade. Geht aber die Bewegung von der Kurbel aus (gleichschenkliges Kurbel-

schubgetriebe), und ist letztere durch Drehung um 90^0 aus der Lage AB_0 in die Richtung AD_0 (Fig. 53) gekommen, der Schieber also von C_0 nach A, so ist diese Lage des Getriebes eine Wechsellage, indem von ihr aus bei fortgesetzter Kurbeldrehung der Schieber nicht nothwendig auch weiter zu gehen braucht, vielmehr der Mechanismus in ein Drehkörperpaar sich verwandeln kann, entsprechend einer Drehung der mit der Kurbel vereinigten Koppel um die zusammenfallenden Axen A, C. Ist aber ersteres der Fall, d. h. geht der Schieber weiter über A hinaus, so gelangt das Getriebe in eine zweite Wechsellage, wenn die Kurbel bei fortgesetzter Drehung in die Richtung $AD_,$ und der Schieber bei seiner rückläufigen Bewegung von $C_,$ her wieder nach A gelangt ist. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser beiden Wechsellagen in der Weise, dass der Schieber zu beständiger Hin- und Herbewegung in der Strecke $C_0C_,$ genöthigt wird, kann durch Paarung gegenüber liegender Glieder, z. B. der Koppel BC mit dem Stege, entsprechend den Polbahnen dieser Glieder in der Nähe jener Lagen, vermittelt werden. Diese Polbahnen aber sind Cardanische Kreise um A und B mit den Halbmessern $2a$ und a; denn wenn CB über B hinaus um $BD = BC = a$ verlängert wird, so liegen die Punkte A, C, D beständig in dem Kreise um den Mittelpunkt B mit dem Halbmesser a, ist also CAD ein rechter Winkel, und die Bewegung der Koppel gegen den Steg identisch mit der Bewegung der Strecke CD im rechten Winkel C_0AD_0. In den Wechsellagen berühren sich die Polbahnen mit den Punkten D, D_0 oder D, $D_{,,}$ und es kann die Paarung geschehen durch einen cylindrischen Triebstock bei D mit zwei entsprechenden Schlitzen bei D_0 und $D_,$, die in einem mit dem Stege fest verbundenen Körper ihre Oeffnungen gegen A hin kehren.

Bei der **gleichschenkligen Kurbelschleife**, entsprechend der Feststellung eines der Glieder a vorliegender Kette, etwa des Gliedes AB, Fig. 54, können die Kurbel BC um die Axe B und die Schleife AC um die Axe A in gleichem Sinne rotiren mit einem constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse $= 2$ als Grenzfall der gleichschenkligen Doppelkurbel (§. 38, Fig. 45), indem das dieser entsprechende veränderliche Winkelgeschwindigkeitsverhältniss nach Gl. (3) daselbst, dessen Mittelwerth nur $= 2$ war, mit $c = \infty$ in den constanten Werth 2 übergeht. Die Kreise um A und B mit den Halbmessern $2a$ und a sind hier die Polbahnen beziehungsweise der Schleife und der Kurbel, und sie berühren sich in einem in der Verlängerung von AB

Fig. 54.





fest liegenden Punkte P als Pol. Ist die Kurbel treibendes Glied (gleichschenkliges Kurbelschleifgetriebe), so sind Todlagen nicht vorhanden. Geht aber die Bewegung von der Schleife aus (gleichschenkliges Schleifkurbelgetriebe), so würde, wenn C mit A zusammenfällt, der Schieber mit der Schleife vereinigt um die zusammenfallenden Axen A, C gegen die mit dem Stege vereinigte Kurbel sich drehen können, wenn nicht eine zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen durch besondere Hülfsmittel herbeigeführt wird, z. B. wieder durch einen cylindrischen Triebstock D an der Verlängerung $BD = BC$ der Kurbel nebst entsprechenden, mit der Schleife verbundenen Schlitzen bei D_0 und $D_{\prime}$. Statt dessen kann auch, wie Fig. 54 andeutet, durch Verdoppelung der Kurbel und der Schleife die einfache in eine zusammengesetzte Kette verwandelt werden, bestehend aus den ternären Gliedern CBD und $C_0D_0C_{\prime}D_{\prime\prime}$, die einerseits durch Drehkörperpaare mit dem binären Stege AB, andererseits mit den binären Schiebern C und D, und zwar die verdoppelte Kurbel durch Drehkörperpaare, die verdoppelte Schleife durch Prismenpaare verbunden sind. Dieselbe Bewegungsübertragung zwischen zwei in gleichem Sinne rotirenden Wellen mit den Axen A, B könnte auch durch Zahnräder mit innerem Eingriff bewirkt werden, denen aber der in Rede stehende Mechanismus besonders dann vorzuziehen sein kann, wenn die Entfernung AB der Axen klein ist. —

Indem der kinematische Charakter der hier besprochenen gleichschenkligen Schubkurbelkette wesentlich darauf beruht, dass in der ebenen Schubkurbelkette nicht nur die Glieder a, b gleich lang gemacht wurden, sondern auch die beiden anderen, unendlich langen Glieder c, d der ihr zu Grunde liegenden Drehkörperkette schon gleich lang waren, ist ihre Abstammung wesentlich auf die im engeren Sinne so genannte Schubkurbelkette beschränkt, und können analoge Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette (Fig. 51, §. 39) nicht erhalten werden, da deren Glieder c, d, obschon unendlich lang, doch nicht gleich, sondern um e verschieden lang sind, die Kette somit durch Specialisirung nur dadurch der allgemeineren gleichschenkligen Drehkörperkette subsumirt werden kann, dass gleichzeitig $a = b$ und $e = 0$ gemacht, d. h. der hier schon besprochene Fall vollständig hergestellt wird. Ist bei der allgemeinen Schubkurbelkette nur $a = b$, so ist damit die Bedingung (5) in §. 39 nicht erfüllt, so dass die Kette nur die dort schon erwähnten zweierlei Mechanismen, die allgemeine Schubschwinge bei Feststellung eines der Glieder c, d und die schleifende Doppelschwinge bei Feststellung eines der Glieder a, b liefert, ohne dass dieselben im Falle $a = b$ bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten darböten.



§. 42. Kreuzschieberkette.

In §. 39 ist die ebene Schubkurbelkette aus der ebenen Drehkörperkette dadurch abgeleitet worden, dass eines der 4 Drehkörperpaare A, B, C, D dieser letzteren als in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt wurde, entsprechend dem Fortrücken der Axe dieses Paares ins Unendliche, womit die beiden dadurch verbundenen Kettenglieder selbst unendlich lang wurden. Indem aber jetzt zwei der 4 Drehkörperpaare als in Prismenpaare übergegangen vorausgesetzt werden sollen, sind zwei Fälle zu unterscheiden, indem diese zwei Paare entweder benachbarte, wie C und D, oder gegenüber liegende, wie B und D, sein können; da ein Glied der ursprünglichen Drehkörperkette unendlich lang wird, indem die Axe eines der beiden Drehkörperpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbinden, ins Unendliche rückt, so sind im ersten Falle drei Glieder ($BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) unendlich lang geworden, im zweiten Falle dagegen alle vier.

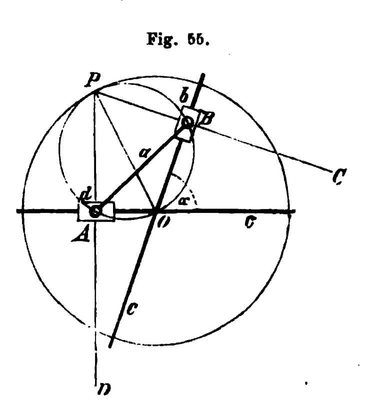
Hier wird zunächst der erste Fall vorausgesetzt, dass zwei benachbarte C, D der 4 Drehkörperpaare in Prismenpaare übergegangen sind. Das Glied $AB = a$ ist dann von endlicher Länge geblieben und durch Drehkörperpaare mit den Gliedern b, d verbunden, die ihrerseits mit dem Gliede c durch Prismenpaare verbunden sind. Die Schubrichtungen der letzteren sind jedenfalls nicht parallel, sondern gekreuzt, weil sonst die ganze Kette in ein Prismenpaar überginge, bestehend aus c als dem einen und aus den (gegeneinander unbeweglich gewordenen) Gliedern d, a, b als dem anderen Elemente. Das Glied c kann deshalb, sofern es nicht Steg, d. h. festgestellt ist, ein Kreuzschieber genannt, und die ganze Kette danach als Kreuzschieberkette bezeichnet werden. Die Benennungen der übrigen Glieder sollen je nach ihrer Lage und nach der Art ihrer Beweglichkeit in den aus der Kette hervorgehenden Mechanismen, desgleichen auch die Benennungen dieser Mechanismen selbst je nach dem Verhalten ihrer dem Stege benachbarten Glieder gemäss denselben Principien gewählt werden wie bisher, und wie sie insbesondere mit Bezug auf die Schubkurbelkette in §. 39 näher angegeben sind. — Ist α der Winkel, den die Schubrichtungen der beiden Prismenpaare mit einander bilden, so ist der Specialfall bemerkenswerth, dass $\alpha = 90^0$, in welchem die Kette als rechtwinklige im Gegensatze zu einer schiefwinkligen Kreuzschieberkette bezeichnet werde.

Ist O, Fig. 55, der Schnittpunkt der unter dem Winkel α gegen einander geneigten (auf eine mit ihnen parallele Ebene projicirten) Bahnen



der Punkte *A*, *B* gegen den Kreuzschieber *c*, so ist die relative Bewegung der Glieder *a*, *c* identisch mit der des Figurenpaars „Strecke *a* in Winkel α“ (§. 12); die Polbahnen dieser Glieder sind also Cardanische Kreise, und zwar ist der Durchmesser des zum Gliede *a* gehörigen (durch die Punkte *A*, *B*, *O* gehenden) kleineren Kreises = dem Halbmesser des (um *O* als Mittelpunkt) zum Gliede *c* gehörigen grösseren Kreises $= \frac{a}{\sin \alpha}$; als Berührungspunkt beider Kreise (der Pol *P*) ist der Durchschnitt der Normalen zu *AO* und *BO* in den Punkten *A* und *B*. Die relative Bewegung der Glieder *b*, *d* ist eine nur gleitende; die Punkte des

Fig. 55.



einen bewegen sich gegen das andere in congruenten Kreisen vom Halbmesser *a* in gleicher Weise (entsprechend dem unter III, b, α) in §. 3 aufgeführten Falle umkehrbarer Beweglichkeit), so dass entsprechende Normalen aller Punktbahnen beständig parallel sind, der Pol folglich stets im Unendlichen liegt.

Betrachtet man die Kette als Drehkörperkette *ABCD*, so dass *C* und *D* die unendlich fernen Punkte der Geraden *PB* und *PA* sind, so ist in dem unendlich grossen Dreiecke *PCD* jede Seite kleiner, als die Summe der beiden anderen, und zwar um eine unendlich grosse Strecke kleiner, so dass dieselbe Beziehung auch dann noch stattfindet, wenn die unendlich langen Dreiecksseiten um endliche Strecken verändert werden: *PC* um *PB* zur Darstellung der Gliedlänge $BC = b$, *PD* um *PA* zur Darstellung der Gliedlänge $AD = d$. Indem dann endlich diese Beziehung auch dadurch nicht geändert wird, dass zu irgend einer der unendlich grossen Strecken *b*, *c*, *d* die endliche Strecke *a* hinzugefügt wird, so ist ersichtlich, dass die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen, und dass somit hier stets die Bedingung erfüllt ist, die nach §. 36 zur Folge hat, dass die Kette dreierlei Mechanismen liefert, welche, jenachdem das kürzeste Glied *a* oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder *b*, *d* oder das ihm gegenüberliegende Glied *c* festgestellt wird, den bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen beziehungsweise als Doppelkurbel, als Schwingkurbel und als Doppelschwinge bezeichneten Mechanismen analog sind, und von denen hier nicht, wie es bei der Schubkurbelkette (gemäss Fig. 47 und Fig. 49) der Fall

war, die beiden der Feststellung von b oder d entsprechenden, obschon beide der Schwingkurbel analogen Mechanismen doch verschiedenartig ausfallen, weil hier die dem kürzesten benachbarten Glieder b, d kinematisch ganz gleich sind.

1. Wenn das Glied a festgestellt ist, so verhalten sich die benachbarten Glieder d, b als rotirende Schleifen, und zwar drehen sie sich um die Axen A, B in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel, indem die Schubrichtungen der Prismenpaare, wodurch sie mit dem Kreuzschieber verbunden sind, beständig unter dem Winkel α gekreuzt bleiben; der Mechanismus ist danach als Kreuzschleifenmechanismus zu bezeichnen. Eine bemerkenswerthe Anwendung findet er in der Oldham'schen Kuppelung zur änderungslosen Uebertragung der rotirenden Bewegung zwischen zwei parallelen Wellen mit kleiner Axenentfernung $AB = a$. Diese Wellen sind die Glieder d, b, in dem Lagergestelle a drehbar und mit Scheiben (Kuppelungsscheiben) endigend, in welche an ihren äusseren, in kleiner Entfernung $= e$ einander zugekehrten und zu den Axen A, B senkrechten ebenen Flächen je eine gerade Nuth eingearbeitet ist; der Kreuzschieber ist eine Scheibe von der Dicke e, die mit zwei geraden Federn, welche an ihren entgegengesetzten Flächen sich rechtwinklig kreuzend hervorragen, in die entsprechenden Nuthen der Kuppelungsscheiben eingreift. Sofern die Bewegung von einer der Wellen ausgeht, kommt somit der Mechanismus hier als rechtwinkliges Kreuzschleifengetriebe zur Verwendung.

Nach §. 12 beschreiben die Punkte von c gegen a Cardioiden, die Punkte von a gegen c Ellipsen. Letzteres wird benutzt in dem Ovalwerke von Leonardo da Vinci. Dabei ist $\alpha = 90^0$, also der Halbmesser des kleineren Cardanischen Kreises (in §. 12 mit r bezeichnet) $= \frac{1}{2} a$ und AB (Fig. 55) ein Durchmesser dieses Kreises. Liegt der beschreibende Punkt S des festen Lagergestelles a in der Entfernung s vom Mittelpunkte der Strecke AB, so sind nach §. 12, Gl. (3),

wenn $\quad s < \frac{1}{2} a$ ist, $\frac{1}{2} a + s$ und $\frac{1}{2} a - s$,

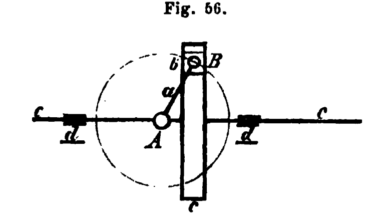
wenn $\quad s > \frac{1}{2} a$ ist, $s + \frac{1}{2} a$ und $s - \frac{1}{2} a$

die Halbaxen der Ellipse, die der Punkt S gegen den als Planscheibe (mit auf einer Seite sich rechtwinklig kreuzenden schwalbenschwanzförmigen Nuthen) ausgeführten Kreuzschieber beschreibt, und wenn die Einrichtung getroffen ist, dass nicht nur s, sondern auch die Axenentfernung a allmählig

geändert werden kann, so sind die zu beschreibenden Ellipsen bezüglich auf Gestalt und Grösse innerhalb gewisser Grenzen stetig veränderlich. Wird der beschreibende Punkt durch die Spitze oder (mit den Axen *A*, *B* parallele) Schneide eines Werkzeugs ersetzt, das parallel mit den Axen verschiebbar ist, so kann auf solche Weise ein mit dem Kreuzschieber *c* fest verbundener Körper elliptisch abgedreht werden.

2. Bei Feststellung eines der Glieder *b*, *d* verhält sich *a* als Kurbel, und ist der Mechanismus als Kreuzschieberkurbel zu bezeichnen. Er findet besonders als rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) Anwendung anstatt einer Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), aus welcher er dadurch entstanden gedacht werden kann, dass die Axe *C* im Sinne der Schieberbahn *AC* ins Unendliche rückte und somit die Koppel *b* in einen Schieber überging, der mit dem zum rechtwinkligen Kreuzschieber gewordenen Schieber *c* durch ein Prismenpaar mit zu *AC* senkrechter Schubrichtung verbunden ist. Die Beziehungen zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Kurbelzapfens *B* und des Kreuzschiebers ergeben sich aus den Formeln in §. 40 mit $\lambda = 0$.

Fig. 56.



3. Bei Feststellung des Kreuzschiebers *c* verhalten sich die benachbarten Glieder *b*, *d* als Schieber mit gekreuzten Schubrichtungen, durch das Glied *a* als Koppel verbunden; der Mechanismus kann als Kreuzschiebermechanismus bezeichnet werden. Mit $\alpha = 90^0$ findet er Anwendung bei einem bekannten Ellipsenzirkel, wobei sich der die Ellipsen verzeichnende Stift *S* an einer Verlängerung der als Lineal ausgeführten Koppel befindet; die Halbaxen dieser Ellipsen sind $= s + \frac{1}{2}a$ und $= s - \frac{1}{2}a$, unter *s* die Entfernung des Stiftes *S* vom Mittelpunkte der Strecke *AB* verstanden. Sie sind durch Aenderung von *a* und *s* veränderlich, indem die der Koppel angehörigen Elemente der Drehkörperpaare *A*, *B* sich an Hülsen befinden, die an verschiedenen Stellen des betreffenden Lineals festgeklemmt werden können. Das Instrument ist die Umkehrung des Leonardo'schen Ovalwerkes; während bei diesem die Ellipsen von einem Punkte des festen Gliedes *a* auf dem beweglichen Gliede *c* beschrieben werden, werden sie hier von einem Punkte des beweglichen Gliedes *a* auf dem festen Gliede *c* beschrieben.

§. 43. Schieberschleifenkette.

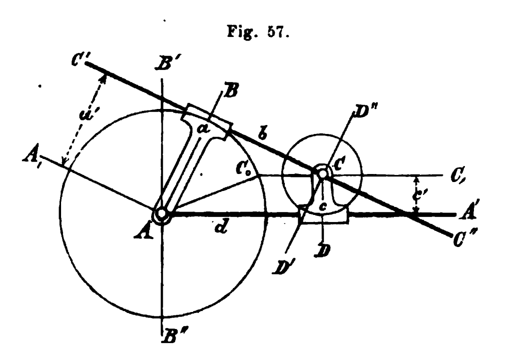
Wenn von den 4 Drehkörperpaaren A, B, C, D einer ebenen Drehkörperkette zwei gegenüber liegende, etwa B und D in Prismenpaare übergehen, und somit alle 4 Gliedlängen a, b, c, d unendlich gross werden, so mag die entstehende Kette als Schieberschleifenkette bezeichnet werden, weil, welches Glied auch festgestellt werden mag, von den beiden ihm benachbarten Gliedern immer das eine in gerader Bahn verschiebbar, das andere um eine feste Axe drehbar, mit dem folgenden aber durch ein Prismenpaar verbunden ist, jenes somit als Schieber, dieses als Schleife sich verhält gemäss den in §. 39 festgesetzten Benennungen. Die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen könnten somit höchstens von zweierlei Art, rotirende oder schwingende Schieberschleifen sein, jenachdem die Schleife um ihre feste Axe rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, entsprechend beziehungsweise der Schwingkurbel und der Doppelschwinge bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen. Ob der erste dieser beiden Fälle (rotirende Schieberschleife) überhaupt möglich sei, kann vermittels des allgemeinen Kriteriums in §. 36 deshalb hier nicht unmittelbar festgestellt werden, weil sich nicht sagen lässt, welches die kleinste und welches die grösste der unendlich grossen Gliedlängen ist. Man kann nur sagen, dass der Unterschied der Gliedlängen $AB = a$ und $BC = b$ der Entfernung a' (Fig. 57) der relativen Bahnen AA, und CC' gleich sei, welche die Punkte A und C als Punkte der beiden Elemente des Prismenpaares a, b durchlaufen, und ebenso dass der Unterschied der Gliedlängen $CD = c$ und $DA = d$ gleich sei der Entfernung c' der relativen Bahnen AA' und CC, derselben Punkte A und C, insofern sie den Elementen des Prismenpaares c, d angehören. Weil übrigens nach §. 36 die Bedingung für die Möglichkeit einer Schwingkurbel dieselbe wie die für die Möglichkeit einer Doppelkurbel ist (kleinste + grösste Gliedlänge < Summe der beiden anderen), hier aber ein der Doppelkurbel analoger Mechanismus nicht vorkommt, so ist zu schliessen, dass auch ein der Schwingkurbel analoger Mechanismus hier unmöglich ist, dass also die in Rede stehende Kette nur einen Schieberschleifenmechanismus mit schwingender Schleife liefern kann.

Dasselbe ergiebt sich durch Betrachtung von Fig. 57, in welcher $a' > c'$ angenommen ist. Befindet sich das Glied c im Sinne AA' unendlich weit von A entfernt, so hat AB (die von A auf CC' gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied a) die zu AA' senkrechte Lage AB'. Bewegt sich dann c gegen A hin, so dreht sich a gegen d im Sinne $B'AA'$



bis der Punkt C in den Schnittpunkt C_0 seiner gegen das Glied d beschriebenen relativen Bahn mit dem um A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a' beschriebenen Kreise und AB in die Lage AC_0 gekommen ist. Das Glied c kann jetzt nur wieder rückwärts längs d gleiten, während a sich weiter drehen kann bis AB in die Lage AB'' gekommen ist, wenn c sich wieder in unendlicher Entfernung befindet. Bewegt sich aber jetzt c wieder gegen A hin, so muss sich a rückläufig gegen d drehen, da der um A mit dem Halbmesser a' beschriebene Kreis in seinem Durchschnittspunkte mit AB stets eine durch C gehende Tangente hat. Befindet sich andererseits das Glied a im Sinne CC' unendlich weit von C entfernt, so hat CD (die von C auf AA' gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied c) die zu CC' senkrechte Lage CD'. Bewegt sich dann a gegen C hin und darüber hinaus, so dreht sich c gegen b im Sinne $D'CC''$ so, dass CD die Lage CC'' erreicht, wenn AB mit dem Gliede a um die Strecke c' über C hinaus gekommen, und endlich die Lage CD'', wenn a im Sinne CC'' unendlich weit von C entfernt ist. Einer rückläufigen Gleitung von a längs b entspricht dann aber nothwendig auch eine rückläufige Drehung von c um die Axe C. Sofern in Wirklichkeit die relativen Gleitbahnen von a gegen b und von c gegen d auf Strecken von endlicher Grösse beschränkt sind, ist ersichtlich, dass die relativen Schwingungswinkel von a gegen d und von c gegen b jedenfalls $< 180^0$ sein müssen.

Fig. 57.



Von Specialfällen sind nur die beiden zu erwähnen, dass $c' = a'$ oder $c' = 0$ ist. Im ersten Falle reducirt sich indessen die Kette auf ein Prismenpaar, bestehend aus den vereinigten Gliedern d, a als einem und den vereinigten Gliedern b, c als dem anderen Elemente. Im Falle $c' = 0$ erhält man eine Kette, die sich zu der allgemeinen Schieberschleifenkette ähnlich verhält wie die im engeren Sinne so genannte zur allgemeinen Schubkurbelkette, ohne dass übrigens bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten mit diesem Specialfalle verbunden wären, in welchem insbesondere auch nur eine Mechanismenart aus der Kette hervorgehen kann: eine schwingende Schieberschleife. —

Die besonderen Ketten, die aus der ebenen Drehkörperkette dadurch

erhalten werden können, dass die Axen gewisser ihrer Drehkörperpaare ins Unendliche rücken, diese Paare also in Prismenpaare übergehen, sind mit den im Vorhergehenden besprochenen erschöpft. Würden nämlich 3 von den 4 Drehkörperpaaren *A*, *B*, *C*, *D*, etwa *B*, *C*, *D* durch Prismenpaare ersetzt, deren Schubrichtungen dann alle verschieden sein müssten, um nicht die ganze Kette in ein einziges Prismenpaar übergehen zu lassen, so würden die zu einem starren Körper *ad* vereinigten Glieder *a* und *d* zusammen mit den Gliedern *b*, *c* eine zwangläufig geschlossene ebene Prismenkette (§. 34) bilden, die durch Auflösung des Gliedes *ad* in ein durch das Drehkörperpaar *A* verbundenes Gliederpaar *a*, *d* keine Aenderung ihres kinematischen Charakters erführe, da durch die Unveränderlichkeit des Winkels, unter welchem die im Gliede *a* feste Schubrichtung des Prismenpaares *a*, *b* gegen die im Gliede *d* feste Schubrichtung des Prismenpaares *c*, *d* geneigt ist, jede relative Drehung der Glieder *a*, *d* unmöglich gemacht würde, diese Glieder sich also in der Kette doch wie ein einziger starrer Körper verhielten.

§. 44. Zapfenerweiterung.

Die im Vorhergehenden betrachteten und ebenso die im Folgenden noch zu besprechenden Mechanismen kommen häufig in so eigenthümlichen und von den durch die schematischen Figuren angedeuteten so abweichenden Formen vor, bedingt theils durch die allgemeinen Anforderungen des Maschinenbaues, theils durch die besonderen Eigenthümlichkeiten der jeweils vorliegenden constructiven Aufgabe, dass dadurch ihr kinematischer Charakter verdeckt, die Erkenntniss desselben durch die erforderliche Abstraction von constructiv vielleicht sehr wesentlichen, kinematisch aber gleichgültigen Gestaltungen erschwert wird. Bei den Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren werden diese Unterschiede der Form bei demselben kinematischen Charakter besonders durch zwei Umstände bedingt: durch die Umkehrbarkeit der niederen Paare und durch die vom Gesichtspunkte der Kinematik aus gleichgültige Grösse des Durchmessers, mit welchem die zur Verbindung der Kettenglieder besonders häufig dienenden Drehkörperpaare (Zapfen mit entsprechenden Hohlkörpern) an den Oberflächentheilen, mit denen die Elemente sich berühren, ausgeführt werden.

Was den ersten Umstand, die Umkehrbarkeit der niederen Elementenpaare betrifft, so ist es z. B. kinematisch gleichgültig, ob bei der Schieberschleifenkette (Fig. 57 im vorigen §.) von dem Drehkörperpaare *A* der



Vollkörper (Zapfen) dem Gliede a und der entsprechende Hohlkörper (Zapfenlager, Zapfenhülse) dem Gliede d angehört oder umgekehrt, desgleichen ob von dem die Glieder a, b verbindenden Prismenpaare das Vollprisma dem Gliede b, das entsprechende Hohlprisma dem Gliede a angehört, wie in Fig. 57 angedeutet ist, oder ob das Umgekehrte stattfindet u. s. f.

Von noch grösserem Einflusse auf die äussere Erscheinung solcher Mechanismen, welche Drehkörperpaare enthalten, insbesondere also der aus der ebenen Drehkörperkette hervorgehenden Mechanismen ist die Vergrösserung des Durchmessers der zumeist cylindrischen Elementenflächen, d. h. der mit einander in Berührung befindlichen Oberflächentheile der Elemente dieser Paare: die von Reuleaux so genannte Zapfenerweiterung, namentlich häufig bei den Mechanismen aus der ebenen Schubkurbelkette vorkommend. Sind bei einem solchen (Fig. 47—50, §. 39) a', b', c' die Halbmesser der Elementenflächen beziehungsweise der Drehkörperpaare A, B, C, die dabei (bis auf Vorsprünge zur Verhinderung der axialen Verschiebbarkeit der betreffenden Elemente) als cylindrisch vorausgesetzt werden, so können dieselben insbesondere solche Erweiterungen erfahren, dass

$$a' > a + b', \quad b' > a + a' \text{ oder } > b + c', \quad c' > b + b'$$

ist, dass sie also die Elementenfläche eines benachbarten Drehkörperpaares der Kette mit umfassen, ja es kann zugleich

$$a' > a + b' \text{ und } b' > b + c'$$

sein, so dass die Elementenfläche des Paares C innerhalb der des Paares B und mit dieser innerhalb der des Paares A liegt, oder zugleich

$$c' > b + b' \text{ und } b' > a + a',$$

so dass die Elementenfläche des Paares A innerhalb der des Paares B und mit dieser innerhalb der des Paares C liegt.

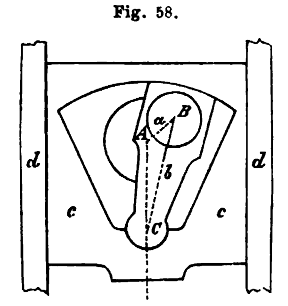
Von diesen Ausführungsformen der Schubkurbelkette ist namentlich die dem Falle $b' > a + a'$ entsprechende sehr gebräuchlich, indem dabei der Zapfen des Drehkörperpaares B in eine excentrische Scheibe übergegangen ist, die im Falle des Schubkurbelmechanismus, d. h. bei Feststellung des Gliedes d (Fig. 47) zugleich als die Kurbel dient, von welcher bei Verwendung dieses Mechanismus als Kurbelschubgetriebe der Antrieb ausgeht, um den Schieber, z. B. bei Schiebersteuerungen, in eine geradlinige hin und her gehende Bewegung zu versetzen.

Auch findet sich nicht selten der Fall $c' > b + b'$ und zwar in der schon in §. 33 mit Bezug auf Fig. 37 erklärten Weise verwirklicht, indem das Glied b (die Koppel im Falle eines Schubkurbelmechanismus) als ein

Bogenschieber ausgeführt ist, der von zwei zur Axe C conaxialen Umdrehungsflächen, die dann zusammen die dem Gliede b angehörige Elementenfläche des Drehkörperpaares b, c bilden, begrenzt wird und in einem entsprechenden kreisbogenförmigen Schlitz des Gliedes c (des Schiebers im Falle des Schubkurbelmechanismus) gleitet. Rückt die Axe C ins Unendliche, so wird dieser Schlitz geradlinig und geht die Kette in die rechtwinklige Kreuzschieberkette (§. 42), der Schubkurbelmechanismus in die rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) über u. s. f.

Weitere Modificationen können durch die verschiedene Art und Weise herbeigeführt werden, wie die Elementenfläche eines Drehkörperpaares aus getrennten Theilen verschiedener conaxialer Umdrehungsflächen gebildet wird. So entspricht schon in jenem Falle des Schubkurbelmechanismus, bei dem die Koppel b zu einem Bogenschieber degenerirt ist, von den beiden conaxialen Umdrehungsflächen, die zusammen die Elementenfläche des Drehkörperpaares b, c ausmachen, nur die eine (äussere) der durch die Beziehung $c' > b + b'$ charakterisirten Zapfenerweiterung; was die andere betrifft, die bei dem als Bogenschieber ausgeführten Gliede b einen concaven Oberflächentheil desselben bildet, so kann sie auch als ein Theil der convexen Oberfläche eines gewöhnlichen Zapfens ausgeführt werden, wobei sie dann behufs Erhaltung der selbstständigen Geschlossenheit des Paares b, c auf die andere Seite der Axe C gelegt werden muss, wie es bei Durchstossmaschinen gemäss Fig. 58 vorkommt u. s. f.

Fig. 58.



§. 45. **Sphärische Drehkörperkette.**

Unter diesem Namen wird hier eine einfache geschlossene kinematische Kette verstanden, deren Glieder nur durch Drehkörperpaare verbunden sind, so aber, dass die Axen dieser Paare jetzt nicht parallel sind, sondern sich in einem Punkte O schneiden, dass somit die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied irgend eines aus der Kette gebildeten Mechanismus in concentrischen Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkte O liegen. Die Umstände, unter denen eine solche Kette zwangläufig beweglich, also zur Bildung von Mechanismen geeignet ist, ergeben sich durch eine der allgemeinen Discussion ebener

Drehkörperketten (§. 36) ganz analoge Betrachtung, wobei wieder in der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, mit a, b, c ... die Glieder derselben bezeichnet werden sollen, mit A, B, C ... die sie verbindenden Drehkörperpaare, event. auch ihre Axen oder die Schnittpunkte dieser Axen mit einer (an die Stelle der Ebene H in §. 36 tretenden) Kugelfläche K um O als Mittelpunkt. Bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben A, B, C ... seien $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ ... zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder, verstanden als Bogenlängen grösster Kugelkreise für den Halbmesser der Kugel als Längeneinheit oder, was dasselbe ist, als die Winkel AOB, BOC, COD ..., unter denen die Axen der die betreffenden Glieder mit den benachbarten Gliedern verbindenden Drehkörperpaare gegen einander geneigt sind. Da diese Axen A, B, C ... stets über O hinaus verlängert zu denken sind, so dass sie die Kugelfläche K in je 2 Punkten schneiden, so können diese Schnittpunkte immer so als die Punkte A, B, C ... gewählt werden, dass $(n - 1)$ Seiten des sphärischen n-Ecks ABC .. MN, z. B. AB, BC, ... MN, höchstens Quadranten, dass also alle Winkel a, b, c ... ausser einem, dem Winkel NOA, der dadurch bestimmt ist und auch stumpf ausfallen kann, höchstens rechte Winkel sind. Ist aber einer dieser Winkel ein rechter, so können unbeschadet der Allgemeinheit alle übrigen als höchstens rechte Winkel angenommen werden, indem die Axen A und N als die Schenkel jenes gegebenen rechten Winkels vorausgesetzt werden können und dann die das sphärische Polygon schliessende Bogenseite immer ein Quadrant wird, einerlei ob N der eine oder der andere Schnittpunkt der Axe N mit der Kugel K sein mag.

Wenn zunächst wieder die Kette als nur dreigliedrig angenommen wird, so kann die Polaxe irgend zweier ihrer Glieder a, b, c, z. B. der Glieder a und c in Folge ihrer Verbindung durch die Paare B, C nur jede durch O gehende Gerade in der Axenebene BC sein; weil aber andererseits diese Polaxe in der Axe A des die Glieder a und c unmittelbar verbindenden Paares gegeben ist, so müssen alle 3 Axen in derselben Ebene liegen, um relative Bewegung möglich zu machen, die freilich nur unendlich klein zu sein braucht, um die Erfüllung jener ihrer Möglichkeitsbedingung wieder aufzuheben. Zu relativer Beweglichkeit von endlicher Grösse ist eine wenigstens viergliedrige Kette nöthig.

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette sei d das festgestellte Glied. Irgend eines der beiden benachbarten Glieder, z. B. a ist dann zwangläufig, wenn die Polaxe A, die seiner Verbindung mit d durch das Paar A entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit d durch die Paare B, C, D haben kann, was aber



immer der Fall ist, ausser wenn die Axen B, C, D in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe A enthält. Das dem festgestellten gegenüber liegende Glied b ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene AB von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene CD geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen AB und CD zusammenfallen. Ebenso wie die ebene ist also auch die sphärische viergliedrige Drehkörperkette zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen.

Endlich ist ebenso wie bezüglich der ebenen (§. 36), so auch hier bezüglich der sphärischen Drehkörperkette zu erkennen, dass sie, um zwangläufig zu sein, höchstens viergliedrig sein darf. Nicht übertragbar sind indessen die Specialfälle, die dort aus dem Uebergange von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen konnten; denn ins Unendliche können die Axen A, B, C ... nur zugleich mit dem Punkte O rücken, wodurch dann eben die sphärische in die ebene Drehkörperkette übergeht. —

Die Mechanismen aus der viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette können ebenso wie die aus der ebenen Kette zu erhaltenden (§. 36) von dreierlei Art sein und analoger Weise als 1) sphärische Doppelschwinge, 2) sphärische Schwingkurbel oder Kurbelschwinge, 3) sphärische Doppelkurbel bezeichnet werden unter Beibehaltung der Benennungen der einzelnen Glieder, wie sie je nach ihrer Lage und Beweglichkeit im Mechanismus in §. 36 für die ebene viergliedrige Drehkörperkette erklärt wurden. In Betreff der Umstände, unter welchen ein solcher sphärischer Drehkörpermechanismus von der 1ten, 2ten oder 3ten Art ist, kann eine ähnliche Untersuchung angestellt werden, wie es in §. 36 für die ebene Kette geschah, indem die Gliedlängen a, c, d als spitze Winkel vorausgesetzt werden, $a < c$ und die Koppellänge $b < a + c + d$ resp. $< 2\pi - (a + c + d)$, jenachdem $a + c + d \lesseqgtr \pi$ ist. Die geraden Linien der Figuren 39—44 werden dann nur Bögen grösster Kreise, die um A und D als Mittelpunkten mit den Halbmessern a und c beschriebenen Kreise jener Figuren werden kleinere Kreise der Kugel K mit den Axen OA, OD und den Halbmessern $r \sin a$, $r \sin c$, unter r den Halbmesser der Kugel verstanden. Das Resultat der bis auf diese Aenderungen fast wörtlich zu wiederholenden Discussion aller möglichen Fälle ist dasselbe wie dort: auch die viergliedrige sphärische Drehkörperkette kann nur dann eine Doppelkurbel oder eine Schwingkurbel liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen



ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kleinsten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kleinsten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingen aus der Kette hervor. Als die kürzeste Gliedlänge ist hierbei der kleinste spitze Winkel (er sei $= a$) zu nehmen, den irgend zwei auf einander folgende Axen (A und B) mit einander bilden, die beiden darauf folgenden Gliedlängen (b und c, oder d und c) sind gleichfalls als spitze Winkel zu nehmen, während der vierte Winkel (d resp. b) dadurch bestimmt ist und spitz oder stumpf sein kann.

§. 46. Besondere Fälle der sphärischen Drehkörperkette.

Specialfälle analog denjenigen, wie sie bei der ebenen Drehkörperkette in §. 37 und §. 38 als Zwillingskurbelkette und als gleichschenklige Drehkörperkette betrachtet wurden, charakterisirt durch die Gleichheit von 2 mal 2 gegenüber liegenden oder 2 mal 2 benachbarten Gliedern, können zwar auch hier vorkommen, bieten aber zu näherer Untersuchung kaum Veranlassung dar, indem ihre Bewegungsgesetze weniger einfach und schon deshalb weniger bemerkenswerth sind. So kann insbesondere aus der Kette, deren gegenüber liegende Glieder gleich lang sind ($a = c$, $b = d$), hier nicht ein Mechanismus hervorgehen, in welchem z. B. gegen das Glied d als Steg die beiden benachbarten Glieder a und c als Kurbeln sich in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel drehen, wie es bei dem Parallelkurbelmechanismus (§. 37) der Fall ist. Denn zu dem Ende müsste, wenn die Winkel DAB, ABC, BCD, CDA des sphärischen Vierecks $ABCD$ beziehungsweise mit A, B, C, D bezeichnet werden, beständig $A = \pi - D$ sein können; weil aber mit den Gegenseiten dieses Vierecks auch die gegenüberliegenden Winkel gleich wären ($A = C$, $B = D$ als homologe Winkel von sphärischen Dreiecken DAB und BCD, resp. ABC und CDA, deren Seiten gleich sind), so würde aus

$$A = \pi - D \text{ auch } C = \pi - B, \text{ somit } A + B + C + D = 2\pi$$

folgen, was nur bei einem ebenen Viereck zutrifft. —

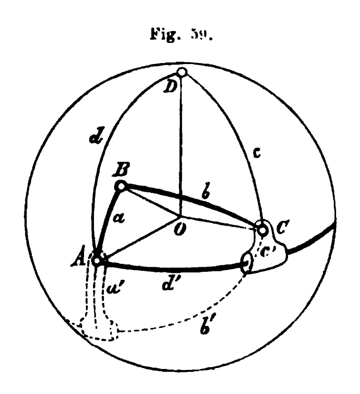
Ausser den der Gleichheit von Gliederpaaren entsprechenden sind solche Specialfälle der sphärischen Drehkörperkette zu erwähnen, die durch den besonderen Werth $\frac{\pi}{2}$ eines oder mehrerer Glieder charakterisirt werden; wie im vorigen §. bemerkt wurde, können dann



die übrigen Gliedlängen immer als spitzwinklig vorausgesetzt werden, ohne die Allgemeinheit dadurch weiter zu beschränken. Von solchen Fällen sind 4 zu unterscheiden, indem entweder nur ein Glied $= \frac{\pi}{2}$ ist, oder zwei benachbarte oder zwei gegenüber liegende, oder endlich drei Glieder $= \frac{\pi}{2}$ sind; wären alle vier $= \frac{\pi}{2}$, so fielen zwei der vier Axen *A*, *B*, *C*, *D* zusammen und ginge die Kette in ein einzelnes Drehkörperpaar über. Wesentliche Eigenthümlichkeiten kommen übrigens auch diesen Specialfällen im Allgemeinen nicht zu; wenn sie gewisse Analogien mit denjenigen darbieten, die aus der ebenen Drehkörperkette durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen, so beruhen dieselben doch mehr auf äusserlichen Ausführungsformen, entsprechend den bei der ebenen Kette gewohnten Formen, als auf analogen kinematischen Charakteren. Die ebene Kette kann betrachtet werden als eine sphärische, deren als Winkel verstandene Gliedlängen wegen des unendlich grossen Halbmessers der Kugel unendlich klein sind, wenn die absoluten Gliedlängen von endlicher Grösse sind; letztere werden unendlich, wenn die entsprechenden Winkel beliebige endliche Grössen erhalten, die insbesondere nicht $= \frac{\pi}{2}$ zu sein brauchen.

So lässt sich schon die allgemeine sphärische Schubkurbelkette in einer an die ebene allgemeine Schubkurbelkette erinnernden Weise ausführen. Denkt man sich etwa zunächst die Kettenglieder *a*, *b*, *c*, *d* als stangenförmige Körper, die nach grössten Kreisen *AB*, *BC*, *CD*, *DA* (Fig. 59) einer Kugel mit dem Mittelpunkte *O* gekrümmt und durch Charniere (Drehkörperpaare) verbunden sind, deren Axen *A*, *B*, *C*, *D* gegen *O* convergiren, so kann z. B. das Glied *d* auch als ein stangenförmiger Umdrehungskörper *d'* zur Axe *D*, das Glied *c* als entsprechender Hohlkörper *c'* (als Kreisschieber, auf *d'* verschiebbar) ausgeführt werden, wenn nur jetzt *d'* und *a* durch das Drehkörperpaar mit der Axe *A*, *c'* und *b* durch das Drehkörperpaar mit der Axe *C* verbunden werden. Die äusserliche Analogie dieser Kette, bei der die dem Elementenpaare *c'*, *d'* entsprechenden relativen Bewegungsgebiete der Axen *A* und *C* zwei conaxiale Kegelflächen

Fig. 59.



mit der Axe D sind, mit der ebenen allgemeinen Schubkurbelkette, Fig. 51, bei welcher die dem Prismenpaare c, d entsprechenden relativen Bewegungsgebiete jener Axen zwei parallele Ebenen sind, wird durch die (der Fig. 59 zu Grunde liegende) Voraussetzung $d = \frac{\pi}{2}$ nur insofern erhöht, als dadurch jene die Axe A enthaltende Kegelfläche in eine Ebene übergeht, die freilich zur Axe D senkrecht ist, während die entsprechende Ebene bei Fig. 51 mit der unendlich fernen Axe D parallel ist. Ist a die kleinste Gliedlänge, so geht mit $d = \frac{\pi}{2}$ die Bedingung dafür, dass die dreierlei im vorigen §. erwähnten Mechanismen aus der Kette erhalten werden können, über in:

$$a + \frac{\pi}{2} < b + c$$

$$\text{oder mit } c' = \frac{\pi}{2} - c \text{ in: } a + c' < b$$

analog Gl. (5) in §. 39 für die ebene allgemeine Schubkurbelkette, Fig. 51. Diese geht in die der Voraussetzung $d = \frac{\pi}{2}$ entsprechende sphärische Drehkörperkette über, wenn ihre geradlinigen Glieder so nach grössten Kugelkreisen gekrümmt werden, dass die vorher parallelen Axen A, B, C sich im Kugelmittelpunkte schneiden; das Prismenpaar c, d verwandelt sich dabei in ein Drehkörperpaar, das nur äusserlich als Kreisschieber mit entsprechender Führung (nach dem Princip der Zapfenerweiterung, §. 44) ausgeführt erscheint. Die so erhaltene Kette als allgemeine (oder nach Reuleaux als geschränkte) sphärische Schubkurbelkette zu bezeichnen, erscheint aber hier nicht passend, da vom Gesichtspunkte der Kinematik die Bezeichnungen nicht den äusserlichen Ausführungsformen, sondern den hiervon unabhängigen, allein durch die Arten relativer Beweglichkeit bedingten kinematischen Eigenschaften anzupassen sind.

Lässt man in Fig. 59 ausser $d = \frac{\pi}{2}$ auch $c = \frac{\pi}{2}$ werden, so werden die relativen Bewegungsgebiete der Axen A, C, welche dem Drehkörperpaare D oder dem in Fig. 59 dafür substituirten, kinematisch ihm gleichwerthigen Elementenpaare c', d' entsprechen, zwei zusammenfallende zur Axe D senkrechte Ebenen. Durch die in Fig. 59 vorausgesetzte Ausführung erscheint dann die Kette äusserlich der im engeren Sinne so genannten ebenen Schubkurbelkette analog, bei welcher indessen die Ebene, in der die dem Prismenpaare entsprechenden relativen Bewegungsgebiete

der Axen A, C zusammenfallen, mit der im Unendlichen liegenden Axe D parallel ist. Je nach der Wahl des festgestellten Gliedes kann diese sphärische Drehkörperkette mit zwei benachbarten rechtwinkligen Gliedern stets dreierlei Mechanismen liefern, denen dieselben Namen gebühren wie den aus der allgemeinen sphärischen Drehkörperkette hervorgehenden, und zwar wird die Kette eine sphärische Doppelkurbel bei Feststellung des kleinsten Gliedes a, eine sphärische Schwingkurbel bei Feststellung von b oder d', eine sphärische Doppelschwinge bei Feststellung von c'.

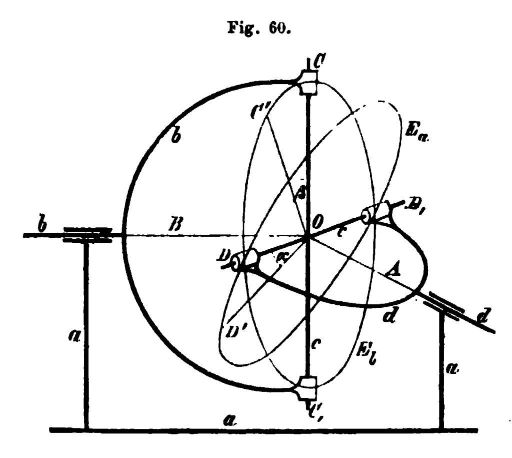
Sind zwei gegenüber liegende Glieder rechtwinklig, z. B. $b = d = \frac{\pi}{2}$, so kann die Kette der ebenen Schieberschleifenkette (Fig. 57, §. 43) dadurch ähnlich gemacht werden, dass nicht nur wieder die Glieder c und d der ursprünglich vorausgesetzten Kette durch die Glieder c' und d' in der oben erklärten Weise ersetzt werden, sondern auch, wie in Fig. 59 durch punktirte Linien angedeutet ist, das Glied b als ein mit dem Kreisschieber c' durch das Drehkörperpaar C verbundener stangenförmiger Umdrehungskörper b' zur Axe B, das Glied a als ein mit dem Gliede d' durch das Drehkörperpaar A verbundener entsprechender Kreisschieber a' ausgeführt wird. Dass aber diese Aehnlichkeit eine nur äusserliche ist, ergiebt sich schon daraus, dass die ebene Schieberschleifenkette nur einerlei Mechanismus (eine Schieberschleife mit schwingender Schleife), die $b = d = \frac{\pi}{2}$ entsprechende sphärische Drehkörperkette dagegen stets dreierlei Mechanismen liefern kann. Sie wird nämlich dem allgemein gültigen Kriterium zufolge, wenn $a < c$, also $a' \left(= \frac{\pi}{2} - a\right) > c' \left(= \frac{\pi}{2} - c\right)$ ist, durch Feststellung von a' eine sphärische Doppelkurbel, durch Feststellung von b' oder d' eine sphärische Schwingkurbel mit a' als Kurbel, durch Feststellung von c' endlich eine sphärische Doppelschwinge. —

Am häufigsten wird die sphärische Drehkörperkette in dem Specialfalle von 3 rechtwinkligen Gliedern, etwa $b = c = d = \frac{\pi}{2}$, und zwar als sphärische Doppelkurbel mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln angewendet, als der Mechanismus nämlich, der aus dieser Kette durch Feststellung des allein noch spitzwinkligen Gliedes a hervorgeht. (Durch Feststellung eines der ihm benachbarten rechtwinkligen Glieder b, d oder des ihm gegenüber liegenden rechtwinkligen Gliedes c wird die Kette ein sphärischer Schwingkurbel- resp. Doppelschwingmechanismus.) Als eine solche sphärische Doppelkurbel oder noch specieller, da



von einer der Kurbeln die Bewegung ausgeht, als sphärisches Doppelkurbelgetriebe mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln ist nämlich das sogenannte Universalgelenk zu bezeichnen, angewendet zur Kuppelung von zwei Wellen, deren Axen A, B sich unter einem spitzen Winkel a schneiden, der für dieselbe Kuppelung eine beliebige oder wenigstens nur insofern beschränkte Grösse haben kann, als, je grösser a, desto mehr dann auch das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten beider Wellen periodisch veränderlich ist. Fig. 60 stellt das Universalgelenk schematisch dar. $CDC_{,}D_{,}$ ist die kreuzförmig gestaltete Koppel c mit zwei Zapfenpaaren C, $C_{,}$ und D, $D_{,}$, deren Axen $CC_{,}$ und $DD_{,}$ sich im Schnittpunkte O der Axen A, B rechtwinklig schneiden und welche drehbar sind in Lagern der Bügel d, b, die sich an den Enden der beziehungsweise um die Axen A, B drehbaren Wellen d, b so angebracht befinden, dass AOD und BOC rechte Winkel sind. Wenn die Welle d um ihre Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_a rotirt, so rotirt die Welle b um ihre Axe B mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω_b, deren Verhältniss zu ω_a variabel, im Mittel aber $= 1$ ist, da einer ganzen Umdrehung von d auch eine solche von b entspricht. Die Axe $DD_{,}$ dreht sich dabei in einer zu A senkrechten Ebene E_a, die Axe $CC_{,}$ in einer zu B senkrechten Ebene E_b, und diese Ebenen schneiden sich in einer zur Ebene AB senkrechten Geraden unter dem Winkel a. In Fig. 60 ist eine solche Lage des Getriebes vorausgesetzt, bei welcher $DD_{,}$ in der Durchschnittslinie der Ebenen E_a und E_b, $CC_{,}$ folglich in der Ebene AB liegt; wenn von dieser Lage aus die Welle d und somit die Axe $DD_{,}$ sich um den Winkel $DOD' = \alpha$ dreht, so drehe sich b und somit $CC_{,}$ um den Winkel $COC' = \beta$. Die Beziehungen zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln α, β und den der beliebigen Lage $D'OC'$ des Koppelkreuzes entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_b der beiden Wellen sind für die Anwendungen von Interesse und ergeben sich folgendermassen.

Fig. 60.



Aus dem sphärischen Dreieck $DD'C'$ mit den Seiten $DD' = \alpha$,



$D'C' = \frac{\pi}{2}$, $C'D = \frac{\pi}{2} - \beta$ und dem Winkel $C'DD' = \pi - a$ ergiebt sich:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos(\pi - a)$$

$$0 = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\cos a;\quad tg\,\beta = \cos a\, tg\,\alpha \quad \ldots\ldots (1).$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = \cos a\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{d\beta}{d\alpha} = \cos a\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos a}{\cos^2\alpha\,(1 + \cos^2 a\, tg^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cos a}{\cos^2\alpha + \cos^2 a\sin^2\alpha} = \frac{\cos a}{1 - \sin^2 a\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist nach Gl. (1): $\beta = \alpha$, dazwischen aber beständig $\beta < \alpha$; es muss also ω_b anfangs $< \omega_a$, später $> \omega_a$ sein, während nach Gl. (2) beide Winkelgeschwindigkeiten gleich sind für

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a};\quad tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos a}{\sin^2 a - 1 + \cos a}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos a}};\quad tg\,\beta = \sqrt{\cos a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sind die Lagen der Axen CC_1 und DD_1 die umgekehrten wie bei $\alpha = 0$, d. h. DD_1 liegt in der Ebene AB, CC_1 in der dazu senkrechten Durchschnittslinie der Ebenen E_a und E_b; von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bis $\alpha = \pi$ ändert sich deshalb das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss gerade umgekehrt wie zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Mit $\alpha = \pi$ findet eine abermalige Umkehrung, also Rückkehr zum ursprünglichen Aenderungsgesetze jenes Verhältnisses für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ statt u. s. f.

Nach Gl. (2) ist $\frac{\omega_b}{\omega_a}\left|\begin{array}{l} = max = \frac{1}{\cos a} \text{ für } \sin\alpha = +1, \\ = min = \cos a \text{ für } \sin\alpha = 0, \end{array}\right.$

also
$$m = \frac{max\frac{\omega_b}{\omega_a}}{min\frac{\omega_b}{\omega_a}} = \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + tg^2 a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Rotirt die eine Welle, etwa d gleichförmig, so ist ihre constante Winkelgeschwindigkeit ω_a zugleich der Mittelwerth der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω_b der anderen Welle b, und der **Ungleichförmigkeitsgrad** δ der Rotationsbewegung dieser letzteren, d. i. das Verhältniss des Unterschiedes zwischen ihrer grössten und kleinsten zu ihrer mittleren Winkelgeschwindigkeit:

$$\delta = \frac{max\,\omega_b - min\,\omega_b}{\omega_a} = max\frac{\omega_b}{\omega_a} - min\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{sin^2 a}{cos\,a} \quad \ldots . (5).$$

Z. B. für	$a =$ 10°	20°	30°
findet man	$m =$ 1,031	1,132	1,333
	$\delta = \frac{1}{32,67}$	$\frac{1}{8,03}$	$\frac{1}{3,46}$.

Wäre $a = \frac{\pi}{2}$, so wäre nach Gl. (1) beständig $\beta = 0$; das Koppelkreuz würde sich vereinigt mit der Welle d in den Lagern des unbeweglich bleibenden Bügels b drehen: die Kette ginge, wie schon oben erwähnt, in ein einzelnes Drehkörperpaar über.

§. 47. Allgemeine Drehkörperkette.

Nachdem sich im Vorhergehenden ergeben hat, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, deren Paaraxen sich in einem Punkte im Endlichen (sphärische Drehkörperkette) oder im Unendlichen (ebene Drehkörperkette) schneiden, aus 4 Gliedern bestehen muss, um zwangläufig beweglich zu sein (mit endlich grossen relativen Bahnen von Punkten irgend eines Gliedes gegen ein anderes), bleibt nun noch die zu zwangläufiger Beweglichkeit erforderliche und ausreichende Gliederzahl einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette für solche Fälle zu ermitteln, in denen die relativen Lagen der auf einander folgenden Paaraxen A und B, B und C... auf irgend eine andere Weise gegeben sind; im Allgemeinen können diese Axen windschief (geschränkt) sein mit gegebenen kürzesten Abständen und gegebenen Neigungswinkeln. Zur Vermeidung von Wiederholungen bei später noch zu besprechenden anderen Ketten werde übrigens die in Rede stehende Frage zunächst noch allgemeiner gestellt, nämlich mit Bezug auf eine **einfache geschlossene kinematische Kette, deren Glieder durch zwangläufige Elementenpaare von übrigens beliebiger Art mit einander verbunden sind.**

Bei dem Uebergange der als n-gliedrig vorausgesetzten Kette aus irgend



einer in eine unendlich wenig davon verschiedene Configuration seien die Relativbewegungen der Elemente ihrer n Paare

$$A \quad B \quad C \; .\;.\;.\;. \; M \quad N$$

beziehungsweise: $\alpha \quad \beta \quad \gamma \; .\;.\;.\;. \; \mu \quad \nu.$

Dieselben sind im Allgemeinen unendlich kleine Schraubenbewegungen, deren Axen und Steigungsverhältnisse durch die kinematischen Charaktere der betreffenden zwangläufigen Elementenpaare und durch die augenblickliche Configuration der Kette bestimmt sind; was ihren Sinn betrifft, so seien sie verstanden als Relativbewegungen beziehungsweise des Gliedes AB gegen NA, BC gegen AB, CD gegen BC .... MN gegen LM und endlich NA gegen MN. Wird nun das beliebige Glied NA der Kette als festgestellt betrachtet, so dass die relative Bewegung irgend eines anderen Gliedes gegen NA kurzweg als Bewegung jenes Gliedes zu bezeichnen ist, so ist die Bewegung von BC bestimmt durch die relativen Elementarbewegungen α, β, die Bewegung von CD durch α, β, γ ...., die von MN durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ und endlich die Bewegung von NA durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$. Weil aber thatsächlich dieses Glied NA in Ruhe ist, so sind die n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ durch so viel Gleichungen verbunden, als erforderlich und genügend sind, um das Gesammtresultat der n Elementarbewegungen α, β, γ .. μ, ν desselben starren Körpers (hier des Gliedes NA) als Bewegungslosigkeit zu kennzeichnen, d. h. durch m Gleichungen, wenn m die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen ist, auf die sich beliebige, vermöge der Beschaffenheit und augenblicklichen Configuration der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Elementenpaare zusammen reduciren lassen, wenn sie als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers (des beliebigen Kettengliedes NA) betrachtet werden. Unter diesen (höchstens 6) einfachen Elementarbewegungen sind Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 Axen verstanden, die in bestimmter Lage gegen das festgestellte Glied so angenommen werden, dass sie sich in einem Punkte schneiden und nicht in einer Ebene liegen. Sofern nun aber die Zwangläufigkeit der Kette dadurch charakterisirt ist, dass irgend eine der n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \mu, \nu$ alle übrigen bestimmt, dass also diese n Grössen durch $n - 1$ Gleichungen verbunden sind, so ist die Kette augenblicklich zwangläufig, wenn $n - 1 = m$, d. h. wenn $n = m + 1$ ist, und sie ist schliesslich nicht nur augenblicklich, sondern bei einer stetigen Folge von unendlich vielen verschiedenen Configurationen beständig, d. h. schlechtweg zwangläufig, wenn dabei beständig $n = m + 1$ ist. Somit ergiebt sich, dass die Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig

beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), denen beliebige in Folge der Beschaffenheit der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Elementenpaare zusammen, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, beständig äquivalent sind. Höchstens ist $m = 6$, also $n = 7$, d. h. die Gliederzahl einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren höchstens $= 7$. Mit einer kleineren, als der die zwangläufige Beweglichkeit bedingenden Gliederzahl ist eine solche Kette nicht beweglich, mit einer grösseren nicht zwangläufig, abgesehen von besonderen Lagen, in denen auch eine übrigens zwangläufig bewegliche Kette vorübergehend ihre Zwangläufigkeit verlieren oder eine Kette von kleinerer Gliederzahl eine unendlich kleine Beweglichkeit haben kann, sowie abgesehen von solchen Elementenpaaren, welche Glieder verbinden, die durch ihre Verkettung mit den übrigen Kettengliedern relativ unbeweglich und deshalb thatsächlich als einzelne Glieder zu betrachten sind.

Dasselbe gilt nun auch von der Drehkörperkette, und man kann bemerken, dass es nur ganz besondere Fälle sind, in denen dieselbe mit weniger als 7 Gliedern zwangläufig beweglich ist. Sollte sie es schon mit 3 Gliedern sein, so müssten beliebige Drehungen um die Axen der betreffenden 3 Drehkörperpaare beständig entweder 1) zwei Drehungen, oder 2) einer Drehung und einer Schiebung, oder 3) zwei Schiebungen um resp. längs gewissen zwei sich schneidenden Axen äquivalent sein. Das Erste resp. Zweite wäre der Fall, wenn die Paaraxen sich in einer Ebene liegend in einem Punkte schnitten, der ad 1) im Endlichen, ad 2) im Unendlichen (dem Parallelismus der Paaraxen entsprechend) liegt; allein solche Lagen der Axen in einer Ebene würden nur als Uebergangslagen vorkommen können und schon durch unendlich kleine relative Drehungen von Paarelementen gestört werden. Der Fall sub 3) dagegen, entsprechend 3 im Unendlichen liegenden parallelen Paaraxen, d. h. dem Ersatze aller Drehkörperpaare durch Prismenpaare, deren Schubrichtungen einer Ebene parallel sind, findet sich in der ebenen Prismenkette verwirklicht.

Soll die Kette mit $n = 4$ Gliedern zwangläufig beweglich sein, so müssen, entsprechend $m = 3$, beliebige Drehungen um die 4 Paaraxen sich beständig entweder 1) durch drei Drehungen, oder 2) durch zwei Drehungen

und eine Schiebung, oder 3) durch eine Drehung und zwei Schiebungen, oder 4) durch drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Der erste Fall ist in der sphärischen, der dritte in der ebenen Drehkörperkette, der vierte in der allgemeinen Prismenkette verwirklicht. Der zweite Fall kann nur vorübergehend stattfinden, wenn nämlich zeitweise die Paaraxen in einer Ebene liegen ohne sich in einem Punkte zu schneiden; Beweglichkeit der Kette von endlicher Grösse kann nicht dadurch bedingt werden.

Mit 5 Gliedern würde eine Drehkörperkette nur dann zwangläufig beweglich sein können, wenn die Axen der 5 Drehkörperpaare beständig solche relative Lagen hätten, dass beliebige Drehungen um dieselben sich entweder 1) durch drei Drehungen und eine Schiebung, oder 2) durch zwei Drehungen und zwei Schiebungen, oder 3) durch eine Drehung und drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen liessen. Dazu müssten ad 1) die Paaraxen sich zum Theil beständig in einem Punkte O schneiden, während die übrigen stets in einer durch O gehenden Ebene liegen, zu der dann die Richtung der Schiebung senkrecht wäre. Eine solche Lage dieser letzteren Axen könnte indessen nur vorübergehend stattfinden, ausser wenn ihrer nur eine wäre, die übrigen 4 Paaraxen folglich beständig durch den Punkt O gingen. Indem aber dann die betreffenden 4 Drehkörperpaare schon für sich eine zwangläufig geschlossene Kette bestimmen würden, blieben die durch das fünfte Paar verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich, und wäre die Kette thatsächlich eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette. Ebenso kann auch der Fall unter 2) nur in Uebergangslagen stattfinden, wenn nämlich die Paaraxen mit einer Ebene H parallel sind und von einer Geraden G alle zugleich geschnitten werden; beliebige Drehungen um jene Axen sind dann zwei Drehungen um sich schneidende mit der Ebene H parallele Axen und zwei Schiebungen längs sich schneidenden und zur Geraden G senkrechten Axen äquivalent. Der Fall unter 3) dagegen kann dauernd stattfinden, wenn nämlich die Axen der Drehkörperpaare zum Theil parallel sind, zum Theil im Unendlichen liegen, entsprechend dem Ersatze dieser Paare durch Prismenpaare. Indem aber sowohl die eine wie die andere Gruppe höchstens 3 Elementenpaare umfassen kann, um nicht die Kette in eine viergliedrige Drehkörperkette oder in eine allgemeine viergliedrige Prismenkette übergehen zu lassen, auch von den Schubrichtungen der Prismenpaare weder drei derselben Ebene noch zwei unter sich parallel sein dürfen, um nicht die Kette auf eine ebene Prismenkette oder auf ein einzelnes Prismenpaar zu reduciren, so ist der fragliche Fall unter

3) nur so zu verwirklichen, dass die 5 Kettenglieder entweder durch 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 2 Prismenpaare verbunden werden, deren Schubrichtungen nicht parallel sind und von denen auch keine rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet ist, oder durch 2 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 3 Prismenpaare, deren Schubrichtungen nicht derselben Ebene parallel und von denen auch nicht zwei rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet sind.

Mit 6 Gliedern kann eine Drehkörperkette nur dann zwangläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige Drehungen um dieselben sich durch 3 Drehungen und 2 Schiebungen oder durch 2 Drehungen und 3 Schiebungen um resp. längs 3 in einem Punkte sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Ersteres erfordert, dass die Paaraxen in zwei Gruppen zerfallen so, dass beständig die der einen Gruppe durch einen Punkt O, die der anderen durch einen anderen Punkt O' gehen; beliebige Drehungen um letztere lassen sich dann durch solche um durch O gehende Axen und durch Schiebungen normal zur Geraden OO', also durch je zwei Schiebungen nach gewissen zu OO' senkrechten Richtungen ersetzen. Zudem kann man bemerken, dass es drei und zwar auf einander folgende Paaraxen sein müssen, die im einen oder anderen der Punkte O, O' sich beständig schneiden, weil bei 4 oder mehr durch denselben Punkt gehenden Paaraxen die Kette eine zwangläufige oder nicht mehr zwangläufige sphärische Drehkörperkette würde, und weil es natürlich nur benachbarte Paaraxen sein können, denen dadurch, dass sie demselben Gliede angehören, ein bestimmter Schnittpunkt O resp. O' dauernd anzuweisen ist. Der Fall, dass die Elementarbewegungen aller Paare zusammen 2 Drehungen und 3 Schiebungen äquivalent sind, tritt im Allgemeinen vorübergehend dann ein, wenn alle Paaraxen mit einer Ebene parallel werden, findet aber dauernd statt, wenn die so eben mit O und O' bezeichneten Schnittpunkte von 2 mal 3 auf einander folgenden Paaraxen im Unendlichen liegen, d. h. wenn 2 mal 3 benachbarte Paaraxen parallel sind.

Somit ergiebt sich, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, wenn ihre Paaraxen alle im Endlichen liegen, ihre Drehkörperpaare also nicht theilweise in Prismenpaare übergegangen sind, nur mit 4, 6 oder 7 Gliedern zwangläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann: mit 4 Gliedern, wenn alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden (wovon der Parallelismus nur ein specieller Fall ist), mit 6 Gliedern, wenn drei auf einander folgende Paaraxen sich in einem, die übrigen in

einem anderen Punkte schneiden, mit 7 Gliedern in jedem anderen Falle; dass aber bei theilweisem Ersatze von Drehkörperpaaren durch Prismenpaare auch fünfgliedrige Ketten zwangläufig sein können, wenn sie nämlich 2 oder 3 Prismenpaare mit gewissen Bedingungen entsprechenden Schubrichtungen enthalten, während die Axen der 3 resp. 2 Drehkörperpaare parallel sind. Da die viergliedrige Kette schon im Vorhergehenden eingehend besprochen wurde, jene fünfgliedrigen aber ebenso wie die allgemeinen siebengliedrigen in Ermangelung von vorliegenden oder in Aussicht zu nehmenden Anwendungen einstweilen zu weiterer Untersuchung bezüglich ihrer Eigenschaften und unterscheidbaren Arten keine Veranlassung bieten, so bleibt nur noch die sechsgliedrige Kette in nähere Betrachtung zu ziehen.

§. 48. **Sechsgliedrige Drehkörperkette.**

Eine sechsgliedrige Drehkörperkette kann aus zwei sphärischen, also viergliedrigen Drehkörperketten dadurch entstanden gedacht werden, dass jede der letzteren durch Aufhebung der unmittelbaren Verbindung von zwei benachbarten Gliedern, nämlich durch Beseitigung eines Drehkörperpaares in eine offene viergliedrige Kette mit nur 3 Drehkörperpaaren verwandelt, und dann von den beiden Endgliedern der ersten dieser Ketten das eine mit dem einen, das andere mit dem anderen der beiden Endglieder der zweiten Kette zu je einem einzigen Gliede verbunden wird. So entsteht z. B. aus der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte O sich schneidenden Paaraxen A, B, C, D und der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte O' sich schneidenden Paaraxen A', B', C', D' durch Beseitigung der Drehkörperpaare D, D' und durch Verbindung der Glieder AD und $A'D'$ zu einem Gliede AA', der Glieder CD und $C'D'$ zu einem Gliede CC' die sechsgliedrige Drehkörperkette mit den Gliedern AB, BC, CC', $C'B'$, $B'A'$, $A'A$, verbunden durch Drehkörperpaare A, B, C, C'. B', A', von deren Axen sich die 3 ersten in O, die 3 letzten in O' schneiden.

Indem der Zweck eines Mechanismus meistens darin besteht, dass von einem der beiden dem Stege benachbarten Glieder die Bewegung in gewisser Weise auf das andere vermittels der übrigen beweglichen Kettenglieder übertragen werden soll, haben von den verschiedenen Mechanismen, die aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette hervorgehen können, besonders diejenigen praktisches Interesse, die der Feststellung eines der beiden

Glieder AA', CC' entsprechen, also der Glieder, deren Axen A und A', resp. C und C' sich im Allgemeinen nicht schneiden; denn zwischen Gliedern, die um sich schneidende Axen drehbar sind, kann die Bewegungsübertragung meistens durch einfachere Mittel in beabsichtigter Weise erzielt werden. Wenn dann ein solcher Mechanismus wieder je nach der Beweglichkeitsart der beiden dem Stege (d. i. dem festgestellten Gliede) benachbarten Glieder als Doppelschwinge, Schwingkurbel oder Doppelkurbel bezeichnet, jedes dieser Glieder nämlich eine Kurbel oder eine Schwinge genannt wird, jenachdem es um seine dem Stege angehörige Axe ringsum rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, so ist die Beurtheilung der Art eines solchen sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus in fraglicher Hinsicht zum Theil auf die von sphärischen Drehkörpermechanismen zurückführbar. Indem nämlich jedes der Glieder AA' und CC' nur um solche Axen drehbar ist, die mit A resp. C durch den Punkt O und mit A' resp. C' durch den Punkt O' gehen, d. h. nur drehbar ist um die durch beide Punkte O, O' gehende Gerade G, bildet letztere mit den Axen A, A', C, C' unveränderliche Winkel, und können also A, B, C, G ebenso wie A', B', C', G stets als die 4 Paaraxen von sphärischen Drehkörperketten betrachtet werden, denen die Glieder AB, BC, $C'B'$, $B'A'$ der sechsgliedrigen Drehkörperkette auch als Glieder angehören. Wenn also etwa das Glied AA' der sechsgliedrigen Kette festgestellt wird, in welchem Falle auch die Punkte O und O', also die Gerade G und somit die Glieder AG und $A'G$ der sphärischen Drehkörperketten $ABCG$ und $A'B'C'G$ unbeweglich sind, so können sich die dem Stege AA' des sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus benachbarten Glieder AB und $A'B'$ nur dann als Kurbeln verhalten, wenn sie sich ebenso in den sphärischen Drehkörpermechanismen verhalten, die aus jenen sphärischen Ketten $ABCG$ und $A'B'C'G$ bei Feststellung des Gliedes AG resp. $A'G$ hervorgehen, ein Verhalten, das nach der in §. 45 angeführten Regel zu beurtheilen ist; aber man kann nicht umgekehrt behaupten, dass in diesem Falle sich die Glieder AB und $A'B'$ auch in dem sechsgliedrigen Mechanismus als Kurbeln verhalten müssen, weil die viergliedrigen Mechanismen durch ihre Verbindung in dem sechsgliedrigen zwischen verengerten Grenzen beweglich werden können, wenn die verbundenen Glieder CG und $C'G$ nicht beide Kurbeln, also beliebig um G beziehungsweise gegen AG und $A'G$ drehbar waren. Sind also in den viergliedrigen Mechanismen $ABCG$ und $A'B'C'G$ mit den Stegen AG und $A'G$ die Glieder CG und $C'G$ beide Kurbeln, so haben in dem sechsgliedrigen Mechanismus $ABCC'B'A'$ mit dem Stege AA' die Glieder AB und $A'B'$ dasselbe Verhalten be-

züglich ihrer Beweglichkeit als Kurbel oder als Schwinge wie in den viergliedrigen Mechanismen; in anderen Fällen sind sie Schwingen, wenn sie es in den viergliedrigen Mechanismen sind, können es aber auch sein, obgleich sie in den viergliedrigen Mechanismen sich als Kurbeln verhalten.

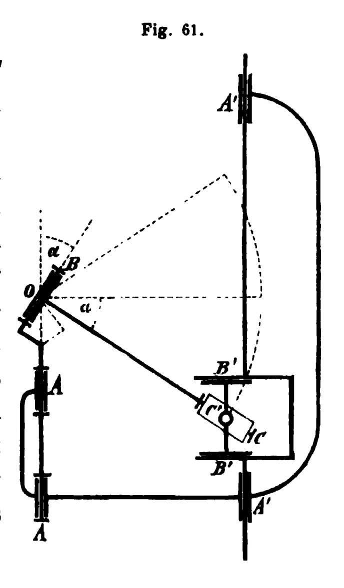
Anwendung findet der so eben besprochene Mechanismus namentlich als doppeltes Universalgelenk, das dazu dienen kann, zwei in festen Lagern drehbare Wellen so zu verketten, dass sie bei irgend einer gegenseitigen Lage ihrer Axen A, A' mit stets gleichen Winkelgeschwindigkeiten um dieselben rotiren; eine (übrigens frei schwebende) Zwischenwelle mit der Axe G ist zu dem Ende durch ein einfaches Universalgelenk (Fig. 60, §. 46) mit der um A, durch ein zweites mit der um A' drehbaren Welle verbunden. Der so entstehende Mechanismus kann zugleich mit Rücksicht auf seine vorliegende Verwendung als Getriebe bezeichnet werden als Doppelkurbelgetriebe mit dreifach gegliederter Koppel. Diese Koppel besteht nämlich aus der Zwischenwelle und den beiden Koppelkreuzen, die einerseits in Bügeln an den Enden der Zwischenwelle, andererseits in Bügeln an den Enden der um A und A' in festen Lagern rotirenden Wellen drehbar sind, und zwar sind hier die Winkel AB, BC, CG, GC', $C'B'$, $B'A'$ alle rechte, während A und A' mit G gleich grosse spitze Winkel bilden, der Winkel CC' aber = dem Neigungswinkel der Ebenen AG, $A'G$ ist. Mit Rücksicht auf die Forderung nämlich, dass die Winkelgeschwindigkeiten der um A, A' drehbaren Wellen stets gleich sein sollen, wodurch allein die Substitution des doppelten für ein einfaches Universalgelenk motivirt wird, müssen gemäss der Untersuchung in §. 46 die Bügel an den Enden der Zwischenwelle offenbar so angeordnet, den Axen C, C' also solche Lagen gegeben werden, dass gleichzeitig C normal zur Ebene AG, C' normal zur Ebene $A'G$ wird, während zugleich die Winkel AG und $A'G$ beständig einander gleich sind. Wenn, was aber nicht nöthig ist, die Axen A, A' in einer Ebene liegen, so werden C, C' parallel, die spitzen Winkel AG, $A'G$ = der Hälfte des Winkels AA', und wird der ganze Mechanismus beständig symmetrisch in Beziehung auf die Normalebene der Axe G im Mittelpunkte ihrer Strecke OO'.

Ausser durch gewisse Grössen der Winkel zwischen den auf einander folgenden Paaraxen können Specialfälle der sechsgliedrigen Drehkörperkette dadurch herbeigeführt werden, dass einer der Punkte O, O' oder dass jeder von ihnen im Unendlichen liegt, dass also die Axen A, B, C oder die Axen A', B', C' oder die einen und die anderen zugleich unter sich parallel sind; ferner dadurch, dass gewisse von solchen auf einander folgenden

3 Axen ins Unendliche rücken, d. h. die betreffenden Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen.

Ein Mechanismus, der dem Falle entspricht, dass 3 Paaraxen parallel sind und zugleich zwei derselben im Unendlichen liegen, ist z. B. bei Dampfmaschinen angewendet worden, um die hin und her gehende Bewegung des Kolbens in die rotirende Bewegung einer Welle um ihre mit der Schubrichtung des Kolbens parallele Axe zu verwandeln, nach dem Schema der Fig. 61. Hier sind A, B, C die 3 Paaraxen, die sich im Punkte O im Endlichen schneiden unter den Winkeln $AB = \alpha$ und $BC = 90^0$. Die Axen A', B', C' sind parallel und senkrecht zur Axe A; der Winkel AA' ist also $= 90^0$, $A'B' = B'C' = 0$. Von diesen letzteren Axen liegen A' und B' im Unendlichen, d. h. die Paare A' und B' sind Prismenpaare, deren Schubrichtungen hier beziehungsweise parallel der Axe A und senkrecht dazu angenommen sind. Endlich sind die Drehkörperpaare C, C' so durch das Kettenglied CC' verbunden, dass ihre Axen sich rechtwinklig schneiden; die Axe C' ist in Folge dessen, weil sie auch senkrecht zur Axe A ist, senkrecht zur Ebene AC, die als Ebene der Fig. 61 angenommen wurde. AA' ist das festgestellte Glied, die Lager der um A rotirenden Kurbelwelle mit dem Dampfcylinder und den Führungen der Kolbenstange fest verbindend; das Getriebe, als welches der Mechanismus hier verwendet wird, kann als **Schubkurbelgetriebe mit dreifach gegliederter Koppel** bezeichnet werden. Was nämlich den Charakter des Mechanismus als Schubkurbelmechanismus betrifft, so ist zu bemerken, dass die oben mit G bezeichnete Gerade hier im Punkte O zur Zeichnungsebene AC senkrecht, und dass die Kette $A'B'C'G$ bei Feststellung des Gliedes $A'G$ eine rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56, §. 42) mit GC' als Kurbel, die Kette $ABCG$ dagegen dieselbe ist, welche im Universalgelenk (Fig. 60, §. 46) als sphärische Doppelkurbel, hier aber bei Feststellung des Gliedes AG als Schwingkurbel mit AB als Kurbel auftritt; da die Ebene der Schwinge GC dieselbe ist wie die Ebene GC' der Kurbel jenes Kreuzschieberkurbelmechanismus, und somit die Bewegung von GC als Schwinge im einen Falle nur einen Theil der Bewegung von GC' als Kurbel im an-

Fig. 61.



deren Falle ausmacht, so bleibt das Glied AB auch in der sechsgliedrigen Kette eine Kurbel, und wird nur die Schublänge des Schiebers $A'B'$ im Vergleich mit ihrer Grösse bei jener Kreuzschieberkurbel verkleinert. Ist r die Entfernung der parallelen Axen G, C' (= der Entfernung des Punktes O vom Schnittpunkte der Axen C, C') und a der Winkel AB, so ist die Schublänge des Schiebers $A'B'$ (des Kolbens gegen den Cylinder) $= 2r \sin a$, die Schublänge des Prismenpaares $B' = r(1 - \cos a)$. Wenn ferner von der in Fig. 61 angedeuteten Lage aus die Winkelebene AB (als Kurbel) sich um den Winkel α um die Axe A dreht, so ist mit Rücksicht auf das sphärische Dreieck ABC, in welchem der rechtwinkligen Seite BC der Winkel $\pi - \alpha$ an A gegenüber liegt,

$$\cos BC = 0 = \cos a \cos AC - \sin a \sin AC \cos \alpha; \quad \cotg AC = tg\, a \cos \alpha$$

$$\cos AC = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2 a \cos^2 \alpha}}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}$$

und somit der entsprechende Weg des Kolbens:

$$s = r(\sin a - \cos AC) = r \sin a \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}\right).$$

Je kleiner a, desto weniger ist dieser Ausdruck von

$$s = r \sin a (1 - \cos \alpha),$$

d. h. von demjenigen verschieden, der nach §. 40, Gl. (3) dem Schieberwege eines ebenen Schubkurbelmechanismus zukommt, wenn α der Drehungswinkel der Kurbel, $r \sin a$ ihre Länge, die Koppel aber unendlich lang ($\lambda = 0$) ist.

Der Fall endlich, dass die Axen der Drehkörperpaare A, B, C sowohl wie die der Paare A', B', C' parallel sind (ohne zugleich den anderen parallel zu sein), ist benutzt worden in der Sarrut'schen Geradführung und in einem Ringschützen-Aufzug von Redtenbacher. Die Möglichkeit (abgesehen von vortheilhafter Brauchbarkeit) jener Verwendung als Geradführung ergiebt sich daraus, dass, wenn AA' das festgestellte Glied ist, die gemeinsame Normale der Axen C, C' beständig sowohl in der durch ihren Fusspunkt in C gehenden, zu den Axen A, B, C senkrechten Ebene, als auch in der durch ihren Fusspunkt in C' gehenden, zu den Axen A', B', C' senkrechten Ebene, folglich in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen bleiben muss. Sind e und e' die Entfernungen dieser gemeinsamen Normalen der Axen C, C' beziehungsweise von den Axen A und A', und sind

die (als kürzeste Entfernungen der betreffenden Axen verstandenen) Gliedlängen

$$AB = a,\ BC = b,\ A'B' = a',\ B'C' = b',\ CC' = c,\ AA' = d,$$

so wird der durch Feststellung des Gliedes AA' entstehende Mechanismus, der im Allgemeinen eine Doppelschwinge (mit dreifach gegliederter Koppel) ist,

1) eine Doppelkurbel, wenn mit Rücksicht auf die Bedingung (5) in §. 39

$$a + e < b,\quad a' + e' < b'$$

und zugleich
$$p + q' = q + p' = d - c$$

ist mit
$$p = \sqrt{(b + a)^2 - e^2},\quad q = \sqrt{(b - a)^2 - e^2}$$
$$p' = \sqrt{(b' + a')^2 - e'^2},\quad q' = \sqrt{(b' - a')^2 - e'^2}.$$

Dabei ist $p - q = p' - q'$ die Schublänge des Gliedes c. Der Mechanismus wird

2) eine Kurbelschwinge mit a als Kurbel, a' als Schwinge und der Schublänge $= p - q$ des Gliedes c, wenn

$$a + e < b$$

ist und im Falle $a' + e' < b'$:

$$q + p' > d - c > p + q',$$

dagegen im Falle $a' + e' > b'$:

$$q + p' > d - c > p - p'.$$

γ. Mechanismen aus Schraubenketten.

Indem die relative Bewegung des einen gegen das andere Element eines Schraubenpaares aus Schiebung längs der Axe und aus Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, kann für einen längs der Schraubenaxe im Sinne der Schiebung hin Blickenden die Drehung rechts oder links herum stattfinden, d. h. entweder in demselben Sinne, in welchem sich für den Anblick von Norden nach Süden die Sonne um die Erde zu drehen scheint, oder im umgekehrten Sinne. Im ersten Falle heisst das Schraubenpaar sowie auch jedes seiner Elemente (die Schraube und die Schraubenmutter) rechts gewunden oder rechtsläufig, im zweiten Falle links gewunden oder linksläufig. Um diesen beiden Fällen in metrischen Relationen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen verschiedener Schraubenpaare auf die einfachste Weise Rechnung zu tragen, soll die Steigung eines Schraubenpaares (resp. einer Schraube oder Schraubenmutter), d. h. die einer Um-

drehung (Drehung von 360°) entsprechende Schiebung algebraisch verstanden werden so, dass sie bei Rechtsläufigkeit positiv, bei Linksläufigkeit negativ ist.

§. 49. Conaxiale Schraubenkette.

Während mit Prismenpaaren, deren Schubrichtungen parallel sind, oder mit Drehkörperpaaren, deren Axen zusammenfallen, eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette nicht hergestellt werden konnte (abgesehen von zweigliedrigen Ketten, die aber von einzelnen Prismenpaaren resp. Drehkörperpaaren kinematisch nicht verschieden sind), können Schraubenpaare zu zwangläufiger kinematischer Verkettung schon in dem einfachsten Falle dienen, dass ihre Axen zusammenfallen. Sind nämlich a, b, c die Glieder einer solchen Kette, verbunden durch die Schraubenpaare A, B, C (c mit a durch das Paar A, a mit b durch B, b mit c durch C), deren Steigungen beziehungsweise $= x$, y, z seien, so ist diese Kette zwangläufig beweglich, wenn irgend ein Glied, z. B. b gegen ein anderes, z. B. c zwangläufig beweglich ist, und das ist der Fall, wenn sich eine Drehung $= \alpha$ von a gegen c und eine Drehung $= \beta$ von b gegen a eindeutig so bestimmen lassen, dass die durch die entsprechenden Relativbewegungen der Schraubenpaare A und B zusammen verursachte Bewegung von b gegen c entgegengesetzt gleich ist derjenigen Bewegung von c gegen b, die einer gegebenen Verdrehung $= \gamma$ von c gegen b gemäss der unmittelbaren Verbindung dieser Glieder durch das Schraubenpaar C entspricht. Indem dazu erforderlich und genügend ist, dass die betreffenden Drehungen und Schiebungen einzeln entgegengesetzt gleich sind, ergeben sich, wenn die Drehungen α, β, γ (verstanden als ganze oder gebrochene Vielfache von 360°) in demselben Sinne positiv, im umgekehrten dann negativ gesetzt werden, die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

wodurch α und β bei gegebenen Werthen von x, y, z und γ eindeutig bestimmt sind. Bei mehr als 3 conaxialen Schraubenpaaren erhielte man auch nur zwei solche Bedingungsgleichungen, aber mit mehr als zwei Unbekannten, die dadurch nicht bestimmt wären. Die conaxiale Schraubenkette ist also mit 3 Gliedern und nicht anders zwangläufig beweglich. Dasselbe folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze in §. 47, dass die Gliederzahl n einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl m der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen



(Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), die beliebigen möglichen relativen Elementarbewegungen sämmtlicher Paare der Kette zusammen beständig äquivalent sind; da nämlich beliebige conaxiale Schraubenbewegungen einer Drehung um die gemeinsame Axe und einer Schiebung längs derselben äquivalent sind, ist hier $m = 2$, $n = 3$.

Die aus dieser Kette dadurch zu bildenden Mechanismen, dass sie „auf a, b oder c gestellt", d. h. dass das Glied a, b oder c festgestellt wird, können sich insofern unterscheiden, als die Drehungen und die Schiebungen der beiden beweglichen Glieder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne stattfinden können. Wird die Kette auf $a = AB$ gestellt, so ergiebt sich aus den Gleichungen (1) das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der beweglichen Glieder b, c:

$$\frac{\beta}{-\alpha} = \frac{x - z}{y - z}; \quad \frac{\beta y}{-\alpha x} = \frac{y}{x}\,\frac{x - z}{y - z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

analog bei der Stellung auf $b = BC$ das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder c, a:

$$\frac{\gamma}{-\beta} = \frac{y - x}{z - x}; \quad \frac{\gamma z}{-\beta y} = \frac{z}{y}\,\frac{y - x}{z - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und bei der Stellung auf $c = CA$ das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder a, b:

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \frac{z - y}{x - y}; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x}{z}\,\frac{z - y}{x - y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Sowohl das Product der 3 Drehungsverhältnisse wie das der 3 Schiebungsverhältnisse ist $= -1$, und ist also, da den Gleichungen (1) gemäss nicht jedes dieser je 3 Verhältnisse negativ sein kann, nur je eines derselben negativ, und zwar, wie leicht ersichtlich, das der Feststellung desjenigen Gliedes entsprechende, welches durch die Schraubenpaare von (algebraisch verstanden) grösster und kleinster Steigung mit den beiden anderen Gliedern verbunden ist. Sind die Steigungen x, y, z gleichen Zeichens, insbesondere z. B. positiv, d. h. alle 3 Schraubenpaare rechtsläufig, so hat jedes Schiebungsverhältniss dasselbe Zeichen wie das zugehörige Drehungsverhältniss; es gehen dann nur zweierlei Mechanismen aus der Kette hervor: bei Feststellung des Gliedes, das durch die Schraubenpaare von grösster und kleinster Steigung mit den anderen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen der beweglichen Glieder in entgegengesetztem Sinne statt, bei Feststellung eines der beiden anderen Glieder in gleichem Sinne. Sind aber die Steigungen x, y, z ungleichen

Zeichens, ist z. B. bei positiven Werthen von x und y die Steigung z negativ (das Schraubenpaar C linksläufig), so sind das Drehungs- und das Schiebungsverhältniss bei der Stellung auf a beide positiv, bei der Stellung auf b oder c aber entgegengesetzten Zeichens, und zwar bei der Stellung auf b in umgekehrter Weise wie bei der Stellung auf c; die Kette liefert dann dreierlei Mechanismen: bei Feststellung des Gliedes a, das durch rechtsläufige Schraubenpaare mit den beweglichen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen dieser letzteren in gleichem Sinne statt, bei Feststellung des einen der Glieder b, c dagegen (und zwar desjenigen, welches mit den beweglichen Gliedern durch das linksläufige und durch das rechtsläufige Schraubenpaar grösster Steigung verbunden ist), sind die Drehungen der beweglichen Glieder entgegengesetzt, ihre Schiebungen gleich gerichtet, bei Feststellung des anderen die Drehungen gleich und die Schiebungen entgegengesetzt gerichtet. Anwendungen scheinen von diesen Mechanismen bisher nicht gemacht worden zu sein.

Nicht selten werden aber Mechanismen angewendet, deren Kette aus der hier betrachteten Schraubenkette dadurch hervorgeht, dass von den Steigungen ihrer 3 Schraubenpaare 1) eine $=\infty$, oder 2) eine $=0$, oder 3) eine $=\infty$, eine andere $=0$ ist, dass also von den Schraubenpaaren der Kette 1) eines durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung mit den Schraubenaxen parallel ist, oder 2) eines durch ein mit ihnen conaxiales Drehkörperpaar, oder 3) eines durch ein solches Prismenpaar, ein anderes durch ein solches Drehkörperpaar ersetzt wird. Andere als diese 3 Specialfälle können nicht vorkommen, weil, wenn zwei Paare in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen oder in conaxiale Drehkörperpaare übergingen, damit die ganze Kette zu einem Prismenpaare resp. Drehkörperpaare würde.

1) Die Kette, deren Glieder $a=AB$, $b=BC$, $c=CA$ durch zwei conaxiale Schraubenpaare A, B und durch ein Prismenpaar C verbunden sind, dessen Schubrichtung den Schraubenaxen parallel ist, wird namentlich als sogenannter Differentialschraubenmechanismus angewendet, entsprechend der Feststellung eines der beiden durch das Prismenpaar C verbundenen Glieder b, c, z. B. in der Weise, dass eine längs zwei Strecken mit verschiedenen Schraubengewinden versehene Spindel a einerseits mit dem Gewinde von der Steigung x in einem entsprechenden Muttergewinde des festgestellten Gliedes c, andererseits mit dem Gewinde von der Steigung y gegen das mit entsprechendem Muttergewinde versehene Glied b beweglich ist, welches als Schieber längs dem festgestellten Gliede c gleiten kann, indem es damit durch das Prismenpaar C gepaart ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Drehkörperpaar c, a



durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Mit $z = \infty$ gehen für diesen Fall die Gleichungen (4) über in:

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \infty; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x}{x-y},$$

d. h. einer Drehung $= \alpha$ der Spindel a entspricht eine blosse Schiebung $(\gamma = 0)$ des Gliedes b, deren Grösse

$$-\gamma z = \alpha(x-y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

ist, und welche insbesondere beliebig klein gemacht werden kann durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen x und y.

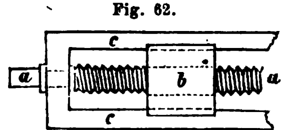
2) Die Kette, deren Glieder a, b, c durch ein Drehkörperpaar A und zwei Schraubenpaare B, C conaxial verbunden sind, hat in solchen Mechanismen Anwendung gefunden, die der Feststellung eines der beiden durch das Drehkörperpaar verbundenen Glieder entsprechen, indem z. B. eine mit dem festgestellten Gliede c durch das Drehkörperpaar A verbundene Spindel a zugleich durch ein Schraubengewinde (Steigung $= y$) mit einer entsprechenden Mutter b gepaart, und diese äusserlich selbst mit einem Schraubengewinde (Steigung $= z$) in einem Muttergewinde des festgestellten Gliedes c beweglich ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Prismenpaar b, c durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Nach Gl. (4) sind dann mit $x = 0$ die Drehung und die Schiebung des Gliedes b für eine gegebene Drehung $= \alpha$ der Spindel:

$$-\gamma = \frac{y}{y-z}\alpha; \quad -\gamma z = \frac{yz}{y-z}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

Beide können beliebig gross gemacht werden durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen y, z; ebendadurch ist die Drehung der Spindel a beliebig zu verkleinern, wenn die Bewegung vom Gliede b ausgeht.

3) Am häufigsten angewendet findet sich die Kette, deren Glieder a, b, c durch ein Drehkörperpaar $c, a = A$, ein Schraubenpaar $a, b = B$ und ein Prismenpaar $b, c = C$ conaxial verbunden sind (Fig. 62), entsprechend dem allgemeinen Falle mit $x = 0$, $z = \infty$; besonders gebräuchlich sind die daraus durch Feststellung eines der Glieder b, c hervorgehenden Mechanismen.

Fig. 62.



Einige der hier besprochenen Mechanismen kommen insbesondere auch so zur Verwendung, dass eines der Kettenglieder durch eine Flüssigkeit vertreten wird. So sind die Schraubenpumpe und der Schraubenventilator als Getriebe zu betrachten, die aus der Kette, Fig. 62, bei

Feststellung des Gliedes *c* erhalten werden, wenn das Glied *b* durch Wasser oder Luft ersetzt und die Schraube *a* durch eine äussere Kraft in Drehung gesetzt wird, sofern wenigstens dem Zwecke dieser Getriebe gemäss von den Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen nur diejenigen Componenten mit ihren mittleren Grössen in Betracht gezogen werden, die der Schraubenaxe parallel sind. Wenn wieder *b* durch Wasser ersetzt, dieses aber jetzt als unbeweglich betrachtet wird, während die Bewegung der anderen Glieder von der Schraube *a* ausgeht, so geht aus der Kette, Fig. 62, das Getriebe eines Schraubenschiffes hervor mit *c* als Schiff, sofern dessen hier allein in Betracht kommende Beweglichkeit gegen das Wasser im Sinne des Kiels einer Paarung durch ein Prismenpaar vergleichbar ist u. s. f.

§. 50. Uebersicht verschiedener Arten von Schraubenketten.

Nach den in §. 47 gemachten allgemeinen Bemerkungen über einfache geschlossene kinematische Ketten mit nur zwangläufigen Elementenpaaren ist eine Schraubenkette mit 7 Gliedern stets beweglich und im Allgemeinen auch zwangläufig; nur in besonderen Fällen ist sie schon mit weniger Gliedern zwangläufig beweglich, nämlich mit $n = m + 1$ Gliedern, wenn beliebige mögliche Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Paare zusammen stets m von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen) äquivalent sind. Bei Ausschluss solcher Specialfälle, in denen alle Schraubenpaare in Drehkörperpaare oder in Prismenpaare übergegangen sind, und in denen die Kette nicht mehr eine Schraubenkette, sondern eine Drehkörper- oder Prismenkette heisst, befinden sich unter jenen einfachen Elementarbewegungen wenigstens eine Drehung oder eine Schiebung im Sinne einer Drehungsaxe. Der Fall, dass sie die einzigen sind, ist in der conaxialen Schraubenkette verwirklicht als dem einzig möglichen Falle einer dreigliedrigen Schraubenkette. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, ob und in welchen Fällen eine einfache geschlossene Schraubenkette mit 4, 5 oder 6 Gliedern zwangläufig beweglich sein kann.

Mit 4 Gliedern würde es der Fall sein, wenn sich beliebige Elementarbewegungen der Elementenpaare stets entweder durch zwei Drehungen und eine Schiebung, oder durch eine Drehung und zwei Schiebungen um resp. längs sich schneidenden Axen ersetzen liessen. Ersteres wäre nur möglich, wenn die Schraubenpaare theils conaxial, theils durch Drehkörperpaare ersetzt wären, deren Axen mit der Schraubenaxe in einer Ebene liegen und

sie in demselben Punkte schneiden. Weil aber die Kette durch 3 conaxiale Schraubenpaare zu einer dreigliedrigen Kette, durch 2 conaxiale Drehkörperpaare zu einem blossen Elementenpaare würde, so müsste die Zahl der Drehkörperpaare wenigstens = 2 sein, und dürften ihre Axen weder unter sich noch mit der Schraubenaxe zusammenfallen; doch könnte es dann nur vorübergehend geschehen, dass alle Axen in einer Ebene liegend sich in einem Punkte schneiden, womit der in Rede stehende Fall überhaupt auf besondere Lagen der Kette beschränkt bleibt. Auf eine Drehung und zwei Schiebungen sind die Elementarbewegungen der Schraubenpaare vorübergehend reducirbar, wenn die Axen der letzteren parallel sind und bei gewissen Configurationen der Kette in einer Ebene liegen; indessen kann dieser Fall auch dauernd stattfinden, wenn nämlich die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare enthält (natürlich als benachbarte Elementenpaare, so dass die Beständigkeit des Zusammenfallens ihrer Axen durch deren unveränderliche Lagen in demselben Kettengliede vermittelt wird) und ausserdem entweder zwei Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind, oder noch zwei weitere conaxiale Schraubenpaare, deren Axe mit der anderen parallel ist.

Die zwangläufige Beweglichkeit einer fünfgliedrigen Schraubenkette erfordert beständige Reducirbarkeit unendlich kleiner Bewegungen ihrer Elementenpaare auf 4 einfache Elementarbewegungen, also entweder 1) auf 3 Drehungen und eine Schiebung, oder 2) auf 2 Drehungen und 2 Schiebungen, oder 3) auf eine Drehung und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen. Der erste Fall kann bei Ketten vorkommen, die zwei conaxiale Schraubenpaare oder ein Schraubenpaar und ausserdem nur Drehkörperpaare enthalten, in solchen Lagen nämlich, in denen alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden; dass aber solche Lagen nicht dauernd stattfinden können, sofern nicht alle Schraubenpaare zu Drehkörperpaaren werden, ist einleuchtend. Der Fall unter 2), vorübergehend dann eintretend, wenn alle Schraubenaxen von einer Geraden rechtwinklig geschnitten werden, findet dauernd statt, wenn die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare) und ausserdem entweder 3 Drehkörperpaare enthält, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder noch zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare), deren Axe mit der anderen nicht parallel ist, nebst einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist ohne mit einer von ihnen parallel zu sein (widrigenfalls das Prismenpaar

mit den betreffenden conaxialen Schraubenpaaren eine dreigliedrige conaxiale Schraubenkette bilden würde). Der Fall unter 3) endlich wird verwirklicht durch eine fünfgliedrige Kette mit parallelen Axen ihrer Schraubenpaare, von denen auch zwei mal zwei conaxial sein können.

Mit 6 Gliedern kann die Schraubenkette nur dann zwangläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige relative Bewegungen derselben entweder zu 3 Drehungen und 2 Schiebungen, oder zu 2 Drehungen und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen zusammengesetzt werden können. Das Erste kann vorübergehend vorkommen, wenn eine Kette mit Schraubenpaaren und Drehkörperpaaren (2 Schraubenpaaren, oder 3 Schraubenpaaren, von denen 2 conaxial sind, oder 4 Schraubenpaaren, von denen 2 mal 2 conaxial sind) sich in solcher Lage befindet, dass alle Paaraxen sich in einem Punkte O schneiden, oder dass sich die einen in einem Punkte O, die anderen in einem anderen Punkte O' schneiden, während zugleich die Gerade OO' rechtwinklig gegen die Schraubenaxen, nicht aber gegen alle übrigen Axen gerichtet ist. Der zweite Fall dagegen (Reducirbarkeit auf 2 Drehungen und 3 Schiebungen), immer dann stattfindend, wenn die Axen aller Schraubenpaare mit einer Ebene parallel sind, ist dauernd vorhanden, wenn 3 oder 4 auf einander folgende ebenso wie die 3 resp. 2 übrigen Schraubenaxen unter sich parallel sind, ohne dass zugleich die eine mit der anderen Gruppe parallel ist.

Somit hat sich ergeben, dass eine einfache geschlossene Schraubenkette in folgenden Fällen mit weniger, als 7 Gliedern zwangläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann:

a) als reine Schraubenkette, d. h. wenn alle Elementenpaare wirkliche Schraubenpaare sind,

1) mit 3 Gliedern als conaxiale Schraubenkette,

2) mit 4 Gliedern, wenn 2 mal 2 benachbarte Schraubenpaare conaxial und beide Axen parallel sind,

3) mit 5 Gliedern, wenn alle Paaraxen parallel sind,

4) mit 6 Gliedern, wenn die Axen von 3 oder 4 benachbarten Schraubenpaaren ebenso wie die der 3 resp. 2 übrigen je unter sich, nicht aber die einen mit den anderen parallel sind;

b) bei theilweisem Ersatze von Schraubenpaaren durch Drehkörper- oder Prismenpaare (abgesehen von solchen Specialfällen, die aus den eben unter 1)—4) genannten auf solche Weise erhalten werden)



1) mit 4 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 2 Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind,
2) mit 5 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 3 Drehkörperpaare, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder auch verbunden durch 2 mal 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist, ohne mit einer von ihnen parallel zu sein.

Aus allen diesen Fällen können noch weitere Specialfälle dadurch abgeleitet werden, dass man Schraubenpaare mit parallelen Axen in conaxiale, Schraubenpaare in Drehkörper- oder Prismenpaare, Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen lässt.

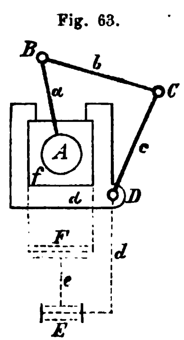
§. 51. Singuläre Schraubenketten.

Der nach vorigem §. sehr grosse Reichthum an zwangläufig geschlossenen einfachen Schraubenketten, einem noch viel grösseren Reichthum an Mechanismen entsprechend, wird im Maschinenbau nur zu kleinem Theil verwerthet. Die Anwendungen beschränken sich hauptsächlich auf solche Ketten, die ausser Drehkörper- und Prismenpaaren nur ein Schraubenpaar enthalten und als singuläre Schraubenketten bezeichnet werden mögen.

Aus der conaxialen Schraubenkette geht als singuläre die schon in §. 49 besprochene Kette, Fig. 62, hervor. — Aus der viergliedrigen Schraubenkette unter a, 2) im vorigen §. ist eine neue singuläre nicht zu erhalten, weil, wie auch 3 der 4 Schraubenpaare durch Drehkörper- oder Prismenpaare mit unveränderten Axen resp. Schubrichtungen ersetzt werden mögen, die Kette stets entweder zu einer drei- oder zu einer zweigliedrigen, nämlich zu einer conaxialen Kette oder zu einem blossen Drehkörper- resp. Prismenpaare wird. — Die unter a, 3) im vorigen §. aufgeführte fünfgliedrige liefert aber eine singuläre Schraubenkette, indem 4 Schraubenpaare durch 3 Drehkörperpaare und ein Prismenpaar ersetzt werden, übrigens nur diese einzige, da 4 Drehkörperpaare mit parallelen Axen oder 2 Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen die Kette in eine zwangläufige viergliedrige, beziehungsweise in ein Prismenpaar verwandeln würden. Die so zu erhaltende fünfgliedrige singuläre Schraubenkette (Fig. 63) kann aus einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette *a*, *b*, *c*, *d*

dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass von ihren 4 Drehkörperpaaren *A*, *B*, *C*, *D* das eine *A* durch ein Schraubenpaar ersetzt und gleichzeitig zwischen den Gliedern *a* und *d* ein fünftes Glied *f* eingeschaltet wird, das mit *a* durch jenes Schraubenpaar *A*, mit *d* durch ein Prismenpaar (Schubrichtung parallel mit den Axen *A*, *B*, *C*, *D*) verbunden ist. — Denkt man sich dieses Glied *f* mit dem Gliede *d* statt jenes Prismenpaares durch zwei Drehkörperpaare *E* und *F* verbunden, deren Axen parallel sind, indem zwischen *d* und *f* ein sechstes Glied *e* eingefügt wird, das mit *d* durch das Drehkörperpaar *E*, mit *f* durch das Drehkörperpaar *F* zusammenhängt, so erhält man eine sechsgliedrige singuläre Schraubenkette, die als Specialfall der unter a, 4) im vorigen §. angeführten Kette zu bezeichnen ist, sofern diese im allgemeinen Falle 6 Schraubenpaare enthielt, von denen beziehungsweise 4 und 2 benachbarte parallele Axen hatten. In Fig. 63 ist diese Abänderung der Kette durch Punktirung angedeutet, wobei zu bemerken ist, dass thatsächlich die Ebene *EF* im Allgemeinen nicht mit der Zeichnungsebene zusammenfällt, und wobei man sich ferner den Körper *d*, insoweit er zuvor die entsprechende Hohlform des prismatischen Körpers *f* bildete, jetzt beseitigt zu denken hat. Das Glied *f*, welches vorher nur nach Richtung der Axen *A*, *B*, *C*, *D* gegen das Glied *d* verschiebbar war, ist jetzt nach jeder Richtung gegen *d* verschiebbar geworden oder wenigstens nach jeder gegen die Axen *E*, *F* rechtwinkligen Richtung, wenn diese Axen selbst (wie in Fig. 63 angenommen) gegen die Axen *A*, *B*, *C*, *D* rechtwinklig gerichtet sind.

Fig. 63.

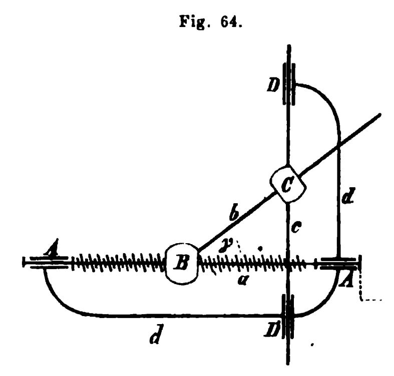


Von grösserem Interesse sind solche singuläre Schraubenketten, die aus den unter b) im vorigen §. genannten Ketten hervorgehen. Eine solche, übrigens auch nur eine, liefert zunächst die daselbst unter b, 1) erwähnte Kette, indem von ihren zwei conaxialen Schraubenpaaren das eine durch ein Drehkörperpaar ersetzt wird; durch ein Prismenpaar gleicher Schubrichtung würde es nicht ersetzbar sein, ohne die Kette in eine dreigliedrige ebene Prismenkette zu verwandeln. Die so erhaltene viergliedrige singuläre Schraubenkette *a*, *b*, *c*, *d* (Fig. 64) hat als Mechanismus insbesondere bei Feststellung des Gliedes *d*, das einerseits durch das Drehkörperpaar *A* mit der Schraubenspindel *a*, andererseits durch das Prismenpaar *D* mit dem Schieber *c* verbunden ist, Anwendung gefunden, dieser Mechanismus aber ferner so als Getriebe, dass die Bewegung vom Gliede *a* ausgeht, d. h. als Kurbelschubgetriebe. Wenn in dem durch Fig. 64 dar-



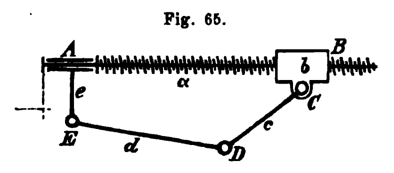
gestellten Specialfalle, dass die Schubrichtung des Prismenpaares D einen rechten Winkel mit der gemeinsamen Axe AB des Drehkörper- und des Schraubenpaares bildet, die Schubrichtung des Prismenpaares C unter dem Winkel γ gegen AB geneigt und s die Steigung des Schraubenpaares B ist, so entspricht einer Umdrehung der Schraubenspindel a die Schiebung $s\,tg\,\gamma$ des Gliedes c, die beliebig verändert werden kann durch Aenderung des Winkels γ, vermittelbar durch stellbare feste Verbindungen der prismatischen Stange b mit der Hohlschraube B und der prismatischen Stange c mit dem Hohlprisma C. Diese Eigenschaften des in Rede stehenden Getriebes sind u. A. bei einer Theilmaschine von Nasmyth verwerthet worden, abgesehen immer von der (hier nur schematisch und beispielsweise angedeuteten) besonderen Form der constructiven Ausführung.

Fig. 64.



Aus der fünfgliedrigen Kette — b, 2), §. 50 — mit 2 benachbarten conaxialen Schraubenpaaren und 3 Drehkörperpaaren, deren parallele Axen rechtwinklig gegen die Schraubenaxe gerichtet sind, ist eine fünfgliedrige singuläre Schraubenkette durch den Uebergang eines der beiden Schraubenpaare in ein damit conaxiales Drehkörperpaar zu erhalten. Diese Kette ($ABCDE$, Fig. 65) findet mehrfach Verwendung, z. B. bei Steuerrudergetrieben, Kniehebelpressen u. s. w. unter Feststellung des Gliedes e, das mit den benachbarten Gliedern durch die Drehkörperpaare A und E mit rechtwinklig gekreuzten Axen verbunden ist. Die Axen C und E können die dem Drehkörperpaare A und Schraubenpaare B gemeinsame Axe AB schneiden ohne den Charakter des Mechanismus zu ändern. Auch kann eine der Axen C, D, E ins Unendliche rücken, d. h. das betreffende Drehkörperpaar durch ein Prismenpaar ersetzt werden, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die beiden anderen dieser Axen gerichtet ist; würden aber zwei dieser Drehkörperpaare C, D, E durch solche Prismenpaare ersetzt, so erhielte man die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, wieder. Wenn man endlich in der ursprünglichen fünfgliedrigen Kette das eine der beiden conaxialen Schraubenpaare in ein längs der Schraubenaxe verschiebliches

Fig. 65.



Prismenpaar übergehen liesse, so erhielte man keine singuläre Schraubenkette, weil dieses Prismenpaar zusammen mit den 3 Drehkörperpaaren *C*, *D*, *E* schon für sich eine zwangläufig geschlossene Kette (die allgemeine Schubkurbelkette, §. 39) bedingen, das Schraubenpaar also relativ unbeweglich würde.

Aus der anderen unter b, 2) im vorigen §. angeführten fünfgliedrigen Schraubenkette ist eine neue singuläre solche Kette nicht zu erhalten. Denn sind *A*, *B* die einen, *C*, *D* die anderen conaxialen Schraubenpaare, während *E* das Prismenpaar ist mit einer gegen die gemeinsame Normale der Schraubenaxen *AB* und *CD* rechtwinkligen Schubrichtung, und sollte *A* als Schraubenpaar erhalten bleiben, so könnte *B* durch ein Prismenpaar oder durch ein Drehkörperpaar, und von den Schraubenpaaren *C*, *D* eines, etwa *C*, durch ein Prismenpaar, das andere durch ein Drehkörperpaar (nicht jedes zugleich durch ein Prismen- oder Drehkörperpaar) ersetzt werden. Mit *B* als Prismenpaar wäre dann aber die Kette eine dreigliedrige ebene Prismenkette *BCE*, mit *B* als Drehkörperpaar eine viergliedrige singuläre Schraubenkette *ABCE* nach Art von Fig. 64.

δ. Mechanismen aus Ketten mit theilweise nicht zwangläufigen niederen Elementenpaaren.

§. 52. Allgemeine Uebersicht.

Bei den bisherigen Untersuchungen einfacher kinematischer Ketten mit nur niederen Elementenpaaren wurden letztere als zwangläufig vorausgesetzt, wie es auch thatsächlich bei den meisten Anwendungen zutrifft. Dass aber geschlossene Ketten, um zwangläufig zu sein, nicht nothwendig nur zwangläufige Elementenpaare enthalten müssen, wurde schon bei den einleitenden Erklärungen in §. 1 hervorgehoben, und giebt es auch in der That manche praktisch benutzte Mechanismen, deren Ketten zum Theil Elementenpaare von mehrfacher Beweglichkeit enthalten. Nach §. 4 können solche Elementenpaare, wenn sie zugleich niedere, also umkehrbare, unbeschadet der Allgemeinheit folglich wieder als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende sein sollen, nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein, nämlich (§. 6) Cylinderpaare, Kugelpaare oder Plattenpaare. Das Cylinderpaar, mit 2 Freiheitsgraden verbunden, vereinigt in sich die Beweglichkeiten eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares, dessen Schubrichtung der Axe des ersteren parallel ist. Das Kugelpaar, 3 Freiheitsgraden entsprechend,



enthält die Beweglichkeiten von 3 Drehkörperpaaren, deren beliebig gerichtete Axen sich in einem Punkte schneiden. Das Plattenpaar, gleichfalls 3 Freiheitsgraden entsprechend, begreift in sich die Beweglichkeiten entweder von zwei Prismenpaaren mit gekreuzten Schubrichtungen und einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder von zwei Drehkörperpaaren mit parallelen Axen und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu diesen zwei Axen senkrechten Ebene liegt. Mit Rittershaus* sind diese Elementenpaare auch passend als flächenläufige zu bezeichnen, um damit anzudeuten, dass die Punkte jedes Elementes sich gegen das andere in gewissen Flächen (hier in conaxialen Cylinderflächen, concentrischen Kugelflächen resp. parallelen Ebenen) bewegen können, während bei zwangläufigen Elementenpaaren, deshalb auch als curvenläufig zu bezeichnen, jene relativen Bewegungsgebiete der Elementenpunkte Linien sind.

Wenn zwei benachbarte Glieder einer kinematischen Kette, falls sie, obschon durch ein Elementenpaar verbunden, doch thatsächlich in der Kette gegen einander unbeweglich sind, stets nur als ein Glied gerechnet werden, da jenes Paar dann unbeschadet des kinematischen Charakters der Kette entbehrlich, nämlich durch starre Verbindung der fraglichen Glieder zu einem einzigen ersetzbar ist, so kann aus einer zwangläufigen Kette, die einem gewissen Bewegungszwecke entsprechend zunächst mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet wurde, eine ebenfalls zwangläufige Kette mit theilweise flächenläufigen Paaren entweder ohne oder mit gleichzeitiger Verminderung der Gliederzahl hervorgehen. Der erste Fall findet statt, so oft ein zwangläufiges Paar in der ursprünglichen Kette durch ein flächenläufiges ersetzt werden kann, das sich gar nicht anders wie jenes in der Kette verhält, weil die mit der Beweglichkeit des letzteren darin vereinigten Beweglichkeiten durch die im Uebrigen obwaltende Paarungsweise der Kettenglieder aufgehoben, d. h. die betreffenden Relativbewegungen verhindert werden. So könnte z. B. bei einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit eines ihrer Drehkörperpaare durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, vorausgesetzt dass die übrigen vollkommen (ohne Spielräume) ausgeführt und die Kettenglieder ganz unbiegsam sind, weil dann Axialverschiebung unmöglich wäre; wegen des stets nur unvollkommenen Zutreffens jener Voraussetzungen würde aber hier ebenso wie in analogen Fällen die Anwendung des flächenläufigen Elementen-

* Die kinematische Kette; ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit. „Civilingenieur“, Bd. XXII.



paares nicht nur nutzlos, weil eine Vereinfachung der Kette nicht herbeiführend, sondern insofern selbst nachtheilig sein, als dadurch die Zwangläufigkeit beeinträchtigt und die Anstrengung der Kettenglieder durch äussere Kräfte, die in gewissem Sinne (hier im Sinne der Paaraxen) zufällig einwirken, vergrössert würde.

Eine nähere Prüfung verdient also die Einführung flächenläufiger Elementenpaare nur unter der Voraussetzung, dass dadurch eine Verminderung der Gliederzahl einer Kette ermöglicht wird. Das ist der Fall, wenn die mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildete Kette solche 2 oder 3 auf einander folgende Paare enthält, deren Beweglichkeiten einem gewissen flächenläufigen Elementenpaare zusammen eigen sind. Enthält die Kette zwei solche benachbarte Paare *A*, *B*, deren Beweglichkeiten in einem Cylinderpaare vereinigt vorkommen, oder drei auf einander folgende Paare *A*, *B*, *C*, deren Beweglichkeiten in einem Kugel- oder Plattenpaare vereinigt sind, so kann das betreffende flächenläufige Paar unbeschadet der Zwangläufigkeit der Kette an die Stelle jener zwangläufigen Elementenpaare gesetzt werden mit Beseitigung des dazwischen liegenden Gliedes *AB* resp. der beiden Glieder *AB* und *CD*; wenn aber im Falle von nur zwei solchen auf einander folgenden zwangläufigen Paaren *A*, *B* die Beweglichkeiten derselben zwei Freiheitsgraden eines Kugelpaares *K* oder Plattenpaares *P* entsprechen, so bleibt bei der Substitution von *K* resp. *P* für die beiden mit dem Gliede *AB* wegfallenden Paare *A* und *B* die Kette nur dann zwangläufig, wenn es die ursprüngliche Kette bei Einschaltung eines weiteren, dem Paare *A* oder *B* benachbarten zwangläufigen Paares *C* bliebe, dessen Beweglichkeit dem dritten Freiheitsgrade von *K* resp. *P* entspricht, wenn also hierbei das Paar *C* thatsächlich gar nicht als solches zur Geltung kommen, d. h. wenn es die dadurch verbundenen Glieder unbeweglich gegen einander lassen würde.

So geht z. B. die fünfgliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 63, §. 51, in eine viergliedrige nach wie vor zwangläufige Kette über, wenn das Drehkörperpaar *D* und das Prismenpaar *d*, *f* unter Beseitigung des Gliedes *d* zusammen durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, indem ein am Gliede *c* als Hohlcylinder mit der Axe *D* befindlicher Ring einen damit conaxialen Vollcylinder umschliesst, zu dem sich das excentrisch mit dem Muttergewinde des Schraubenpaares *A* versehene Glied *f* erweitert. Ebenso bleibt z. B. eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette zwangläufig, wenn 3 ihrer Drehkörperpaare zusammen durch ein Kugelpaar ersetzt werden; freilich ist die dann nur noch zweigliedrige Kette ein blosses Drehkörperpaar



geworden, dem es als solchem ganz unwesentlich ist, dass seine Elementenfläche theilweise die Form einer Kugel hat. Würden aber von den 4 Drehkörperpaaren der sphärischen Kette nur zwei benachbarte durch ein Kugelpaar ersetzt, so verlöre die Kette ihre Zwangläufigkeit, weil die ursprüngliche Kette sie durch Einschaltung eines fünften Drehkörperpaares verlieren würde, dessen Axe durch den Schnittpunkt der übrigen geht. Indessen kann die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, §. 51, als Beispiel des Falles dienen, dass der Ersatz von zwei zwangläufigen benachbarten Elementenpaaren durch ein flächenläufiges Paar mit 3 Freiheitsgraden trotz der damit verbundenen Einführung eines weiteren Freiheitsgrades doch die Zwangläufigkeit der Kette nicht aufhebt. Weil nämlich die Unveränderlichkeit der Winkel, unter denen hier die Schubrichtung des Prismenpaares C gegen die Schraubenaxe AA und die Schubrichtung DD des Prismenpaares D geneigt ist, schon durch einen dieser Winkel sicher gestellt wird, da AA und DD unter sich einen unveränderlichen Neigungswinkel haben, so verliert diese Kette ihre Zwangläufigkeit dadurch nicht, dass die prismatische Stange b mit der Hohlschraube B, oder dass die prismatische Stange c mit dem Hohlprisma C statt fester Verbindung durch ein Drehkörperpaar verbunden wird, dessen Axe normal zu den Schubrichtungen der Prismenpaare C und D ist; also können unbeschadet der Zwangläufigkeit diese zwei Prismenpaare zusammen durch ein Plattenpaar ersetzt werden, in welchem ihre Beweglichkeiten und die jenes eingeschalteten Drehkörperpaares vereinigt sind. Die Kette geht dadurch in eine dreigliedrige Kette a, b, d über, welche, da in ihr das die Glieder b und d verbindende Plattenpaar thatsächlich nur als Prismenpaar zur Geltung kommt, identisch ist mit der conaxialen singulären Schraubenkette a, b, c, Fig. 62, §. 49.

Uebrigens ist natürlich eine solche, wenn auch mit Rücksicht auf die Zwangläufigkeit zulässige Vereinfachung der Kette doch mit Rücksicht auf den jeweiligen Bewegungszweck derselben nur dann zulässig, wenn die Bewegungen der in Wegfall kommenden Glieder bei diesem Zwecke nicht in Betracht kommen. So würde z. B. die eben angeführte Reduction der viergliedrigen Kette, Fig. 64, auf nur 3 Glieder unzulässig sein, sofern diese Kette, z. B. bei der Anwendung als Mechanismus einer Theilmaschine, gerade die Verschiebung des Gliedes c gegen das Glied d vermitteln sollte, die mit dem Wegfalle des Gliedes c verloren geht.

Während aus solchen Gründen die Anwendung des in Rede stehenden Princips, die Gliederzahl einer zwangläufigen Kette durch Einführung flächenläufiger Elementenpaare zu vermindern, sehr oft unthunlich ist, giebt es jedoch auch Fälle, in denen die Anwendbarkeit des Verfahrens insofern



eine Ausdehnung erfährt, als es selbst auf Kosten der Zwangläufigkeit in Anwendung gebracht werden darf, wenn nämlich die mehrfache Beweglichkeit nur solche Glieder betrifft und von solcher Art ist, dass dadurch der durch den betreffenden Mechanismus zu erfüllende Bewegungszweck nicht beeinträchtigt wird. So kann es z. B. der Fall sein, dass ein gerader stangenförmiger Körper, wenn er als Glied einer kinematischen Kette an beiden Enden durch Kugelpaare mit den benachbarten Gliedern verbunden und somit unabhängig von letzteren beliebig um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar, also nicht zwangläufig ist, dadurch doch die Zwangläufigkeit der übrigen Kettenglieder nicht stört und somit auch nicht die Brauchbarkeit des betreffenden Mechanismus, insoweit es dabei nur auf die Zwangläufigkeit jener übrigen Kettenglieder ankommt; in §. 54 wird ein Beispiel dieses Falles näher besprochen.

Ueberhaupt enthalten die zwei folgenden Paragraphen eine Uebersicht der einfacheren, aus Drehkörperketten ableitbaren Mechanismen mit Cylinder- oder Kugelpaaren nebst Beispielen praktischer Anwendung; Plattenpaare sind seltener benutzt worden.

§. 53. Mechanismen mit Cylinderpaaren.

Ein hier zunächst als Beispiel anzuführender Mechanismus ist auch deshalb bemerkenswerth, weil bei ihm das im vorigen §. besprochene Princip auf eigenthümliche Weise in Anwendung gebracht ist. Sind nämlich in einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette

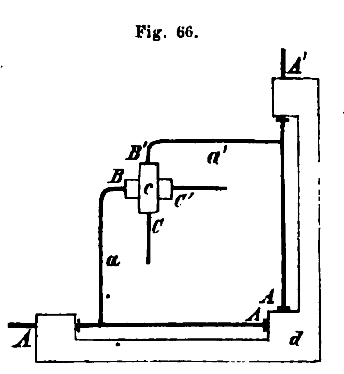
die auf einander folgenden Glieder $a \quad b \quad c \quad b' \quad a'$
durch die zwangläufigen Elementenpaare $B \quad C \quad C' \quad B'$

in der durch die Uebereinanderstellung angedeuteten Weise verbunden, und sind E, E' zwei flächenläufige Elementenpaare von solcher Art, dass die Beweglichkeiten der Paare B und C in E, die von B' und C' in E' vereinigt sind, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass unter Beseitigung der Glieder b und b' das Glied c unmittelbar mit a durch das Paar E, mit a' durch das Paar E' verbunden werden kann ohne die Zwangläufigkeit der Kette aufzuheben, falls etwa weitere den Elementenpaaren E, E' eigenthümliche Freiheitsgrade in Folge der besonderen Art der Kette nicht zur Geltung kommen können. Indem aber durch den Wegfall der Glieder b, b' auch die Folge der Elementenpaare C, C', durch welche c mit diesen Gliedern zusammenhing, gleichgültig geworden ist, so kann schliesslich auch c mit a durch das Paar E, mit a' durch das Paar E' dann verbunden werden,

wenn E die Beweglichkeiten von B und C', E' die von B' und C in sich vereinigt.

Dieses Princip ist in dem Mechanismus, Fig. 66, zur Anwendung gekommen. Die viergliedrige Kette desselben besteht aus zwei Gliedern a, a', die einerseits mit dem festgestellten Gliede d durch Drehkörperpaare A, A' mit rechtwinklig geschränkten (d. h. im Allgemeinen windschiefen) Axen und andererseits mit dem Gliede c durch Cylinderpaare BC' und $B'C$ mit rechtwinklig geschränkten Axen verbunden sind; die Glieder a und a' sind zu dem Ende mit Ansätzen versehen, welche in cylindrische Stangen BC' und $B'C$ auslaufen, deren Axen beziehungsweise parallel den Axen A und A' sind, während das als Doppelhülse gestaltete Glied c mit seinen rechtwinklig geschränkten entsprechenden cylindrischen Bohrungen BC' und $B'C$ auf jene Stangen aufgeschoben ist. Einer Drehung des Gliedes a um seine Axe A entspricht eine gewisse Drehung von a' um A', wobei die Bewegung von c eine blosse Schiebung ist, indem zwei feste Gerade in diesem Gliede c (die Axen seiner cylindrischen Bohrungen) beständig den Axen A und A' parallel bleiben. Die Kette dieses zur Drehung von Weichensignalen angewendeten Mechanismus kann vorgestellt werden als abgeleitet aus einer sechsgliedrigen Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ (§. 48) von solcher Art, dass die parallelen Axen A, B, C rechtwinklig gegen die gleichfalls parallelen Axen A', B', C' gerichtet, zugleich aber die Drehkörperpaare C und C' in Prismenpaare übergegangen sind, so dass die Schubrichtung von C parallel den Axen A' und B', die von C' parallel den Axen A und B ist; indem dann nämlich die Beweglichkeiten der Paare B und C' zusammen die eines Cylinderpaares E, die der Paare B' und C zusammen die eines Cylinderpaares E' sind, konnte unter Beseitigung der Glieder $BC = b$ und $B'C' = b'$ das Glied CC' als das Glied c der Fig. 66 unmittelbar mit a durch das Paar $E = BC'$, mit a' durch $E' = B'C$ verbunden werden.

Fig. 66.

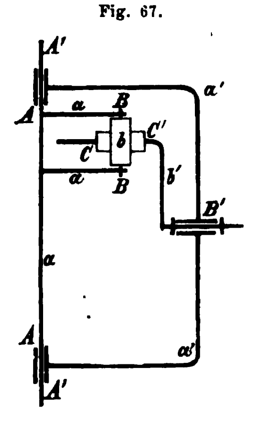


Wenn man bei der Kette, Fig. 66, die Axe A im Sinne der gemeinsamen Normale von A und A' ins Unendliche rücken, d. h. das Drehkörperpaar A in ein Prismenpaar mit der Schubrichtung $A'A$ übergehen liesse, und dann dasselbe nebst dem Drehkörperpaare A' unter Beseitigung des Gliedes d durch ein Cylinderpaar mit der Axe A' ersetzte, so ginge die Kette in eine dreigliedrige Cylinderkette über, die aber thatsächlich nur

ein Prismenpaar mit der Schubrichtung $A'A'$ wäre. Ebenso erhielte man durch Vertauschung von A mit A' ein Prismenpaar mit der Schubrichtung AA. Ueberhaupt kann eine dreigliedrige Kette mit 3 Cylinderpaaren nur dann beweglich sein, wenn sie mit einem Prismenpaare oder einer ebenen Prismenkette identisch ist; denn anderenfalls dürften die Axen der 3 Cylinderpaare nicht einer Ebene parallel sein, so dass die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen, die beliebigen möglichen relativen Bewegungen sämmtlicher Paare zusammen beständig äquivalent wären, = 6 sein würde (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen entsprechend), die Kette folglich, wenn mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet, nicht mit 6, sondern erst mit 7 Gliedern beweglich sein könnte.

Eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren kann aber noch auf andere Weise aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden, wie der durch Fig. 67 schematisch dargestellte Mechanismus zeigt. Auch ihm liegt eine solche sechsgliedrige Drehkörperkette zu Grunde, bei der nach dem Schema

Fig. 67.



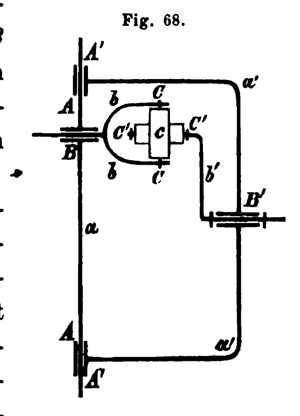
$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{a}{\text{------}} & B & \overset{b}{} & C \\ d\,| & & & & \vdots\, c \\ A' & \underset{a'}{\text{------}} & B' & \underset{b'}{} & C' \end{array}$$

die parallelen Axen A, B, C rechtwinklig gegen die parallelen Axen A', B' C' gerichtet, zugleich aber jetzt das Drehkörperpaar C in ein Prismenpaar übergegangen ist, dessen Schubrichtung parallel der Axe C', das Drehkörperpaar A' in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung parallel der Axe A ist, so dass unter Beseitigung der Glieder c und d die Glieder b und b' durch ein Cylinderpaar mit der Axe C', a und a' durch ein Cylinderpaar mit der Axe A ersetzt werden konnten. Bei dem Mechanismus, Fig. 67, ist a' das festgestellte Glied; das ihm einerseits benachbarte Glied b' kann als Kurbel um die Axe B' rotiren, während die Bewegung des ihm andererseits benachbarten Gliedes a aus hin und her gehender Schiebung längs der Axe A und schwingender Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, dieses Glied deshalb als schwingender Schieber bezeichnet werden kann. Der somit als Schwingschieberkurbel zu bezeichnende Mechanismus ist von Robertson, und zwar als Schwingschieberkurbelgetriebe, d. h. mit dem

schwingenden Schieber als treibendem Gliede, für Dampfmaschinen erdacht worden, indem dabei das festgestellte Glied a' auf einer Seite als Dampfcylinder, der schwingende Schieber a als Kolbenstange mit entsprechendem Kolben ausgebildet, und die zusammengesetzte Bewegung des letzteren zugleich zur Vermittelung der Dampfvertheilung benutzt ist.

Bei einer anderen Form der Ausführung seines Dampfmaschinengetriebes (Fig. 68) hat Robertson nur das Glied d der zu Grunde liegenden sechsgliedrigen Kette wie im vorigen Falle beseitigt in Folge unmittelbarer Verbindung der Glieder a und a' durch das Cylinderpaar AA', die Drehkörperpaare C und C' aber als solche mit dem dazwischen liegenden Gliede c bestehen lassen, und nur noch die Abänderung getroffen, dass das Drehkörperpaar B durch ein Prismenpaar ersetzt wurde, dessen gegen die Axen A und C rechtwinklige Schubrichtung dann nur vorübergehend mit den Axen B' und C' parallel wird. —

Fig. 68.



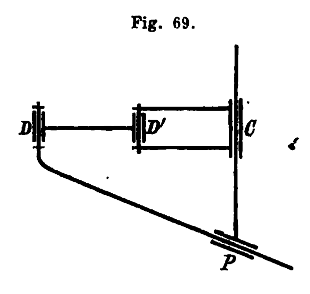
Indem die drei hier besprochenen Mechanismen, Fig. 66—68, zunächst nur als zufällige Ableitungen aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette erscheinen, mag noch die Frage geprüft werden, welche verschiedene Arten zwangläufiger Ketten mit Cylinderpaaren überhaupt aus zwangläufigen Drehkörperketten mit höchstens 6 Gliedern erhalten werden können? Dass eine solche Cylinderkette höchstens zwei Cylinderpaare enthalten kann, wurde schon oben hervorgehoben; dass andererseits siebengliedrige Drehkörperketten zu sehr mannigfachen Arten von Cylinderketten (u. A. auch mit 3 Cylinderpaaren) führen können, ist ausser Zweifel, hier aber nicht näher zu untersuchen, da es an übersichtlicher Classifizirung der reichhaltigen Gruppe von siebengliedrigen Drehkörperketten einstweilen fehlt, ein nahe liegendes Bedürfniss auch nicht dazu vorhanden ist, indem die Praxis stets mit den einfachsten Mitteln ihre Zwecke zu erreichen bestrebt sein muss.

Da ein Cylinderpaar als Verschmelzung eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares bei vorhandenem Parallelismus der Schubrichtung des letzteren mit der Axe des ersteren zu betrachten ist, so ist zunächst klar, dass bei einer viergliedrigen Drehkörperkette niemals zwei Paare zu einem Cylinderpaare vereinigt werden können. Denn während bei der sphärischen Kette die Axen der Paare wesentlich im Endlichen liegen, diese also über-

haupt nicht in Prismenpaare übergehen können, sind sie bei der ebenen Kette zwar durch Prismenpaare ersetzbar, aber nur durch solche, deren Schubrichtungen rechtwinklig gegen die Paaraxen gerichtet sind.

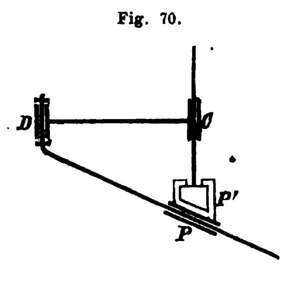
Aus jeder der zweierlei fünfgliedrigen Drehkörperketten (§. 47) kann eine viergliedrige Kette mit einem Cylinderpaare erhalten werden. Aus einer solchen, welche 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen nebst 2 Prismenpaaren enthält, ist es dann möglich, wenn einem dieser Drehkörperpaare ein parallel mit seiner Axe verschiebliches Prismenpaar benachbart ist. Es ergiebt sich so eine Kette mit einem Cylinderpaare, zwei ihm parallelaxigen Drehkörperpaaren und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung mit jenen Axen von 0 und 90° verschiedene Winkel bildet; sie zerfällt in verschiedene Unterarten je nach der Folge ihrer dreierlei Elementenpaare. Fig. 69 zeigt eine solche Kette; mit C ist das Cylinderpaar, mit D das eine, mit D' das andere Drehkörperpaar, mit P das Prismenpaar bezeichnet, und ist die Axe D' ausserhalb der Ebene CD liegend zu denken.

Fig. 69.



Aus einer fünfgliedrigen Drehkörperkette mit 2 parallelaxigen Drehkörperpaaren und 3 Prismenpaaren ist, falls die Schubrichtung eines dieser letzteren der Axe eines benachbarten Drehkörperpaares parallel ist, eine viergliedrige Kette zu erhalten mit einem Cylinderpaare C, einem damit parallelaxigen Drehkörperpaare D und zwei Prismenpaaren P, P', deren Schubrichtungen nicht zusammen mit den Axen C, D einer Ebene parallel, und welche auch nicht beide zugleich rechtwinklig gegen diese Axen gerichtet sind. Je nach der Folge ihrer dreierlei Paare sind wieder verschiedene Unterarten der Kette zu unterscheiden. Durch Fig. 70, einer näheren Erklärung wohl nicht bedürftig, ist eine solche Kette angedeutet. — Ketten mit zwei Cylinderpaaren sind aus der einen oder anderen fünfgliedrigen Drehkörperkette offenbar nicht zu erhalten, weil sie, wie sie auch gebildet werden möchten, von einem blossen Prismenpaar nicht verschieden wären.

Fig. 70.



Wenn eine sechsgliedrige Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ mit zwei Gruppen von je 3 in einem Punkte sich schneidenden benachbarten Axen A, B, C und C', B', A' vermittels der Einführung eines Cylinderpaares auf eine fünfgliedrige Kette reducirbar sein soll, so muss von jenen zwei

Gruppen wenigstens eine, z. B. die zweite C', B', A' parallele Axen enthalten, die rechtwinklig gegen eine der äusseren Axen A oder C der ersten Gruppe gerichtet sind, um eines der beiden äusseren Drehkörperpaare A' oder C' der zweiten Gruppe durch ein Prismenpaar ersetzen zu können, dessen Schubrichtung mit der Axe A resp. C des benachbarten Paares der anderen Gruppe parallel ist. So könnten z. B. bei der Kette, Fig. 61, §. 48 (abgesehen von der dort angeführten speciellen Verwendung dieser Kette als Mechanismus einer Dampfmaschine) das Drehkörperpaar A und das Prismenpaar A' unter Beseitigung des Gliedes AA' (des festgestellten Gliedes bei jenem a. a. O. besprochenen Mechanismus) zu einem Cylinderpaare vereinigt werden. Zwei Specialfälle können bei der so zu erhaltenden fünfgliedrigen Kette mit einem Cylinderpaare dadurch herbeigeführt werden, dass von den beiden Drehkörperpaaren B', C', deren parallele Axen rechtwinklig gegen die des Cylinderpaares AA' gerichtet sind, noch eines (nicht beide, weil sonst das Resultat eine ebene Prismenkette wäre) in ein Prismenpaar übergeht, wie es bei der Kette, Fig. 61, bezüglich des Paares B' der Fall ist. Auch können die Axen A, B, C gleichfalls parallel, somit rechtwinklig gegen die Axen B', C' werden, wie es bei der fünfgliedrigen Kette, Fig. 68, der Fall ist; dabei kann dann nur noch eines der Drehkörperpaare B, C oder eines der Paare B', C' durch ein Prismenpaar ersetzt werden ohne die Kette in eine der schon anderweitig classifizirten viergliedrigen Ketten übergehen zu lassen. Liesse man z. B. bei der Kette, Fig. 68, ausser B auch B' oder C' zu einem Prismenpaar werden, so würde, wenn auch die Schubrichtung desselben mit den Axen A und C einen von 0 und 90° verschiedenen Winkel bildete (widrigenfalls das Resultat ein blosses Prismenpaar oder eine Schieberschleifenkette, §. 43, wäre), doch nur eine Kette von der durch Fig. 70 dargestellten Art erhalten, indem die durch das Paar C' resp. B' verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich würden.

Wenn endlich in der sechsgliedrigen Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ sowohl die Paare A und A', als auch die Paare C und C' durch je ein Cylinderpaar unter Ausfall der Glieder AA' und CC' ersetzbar sein sollen, so müssen die Paaraxen wenigstens einer der beiden mehrgenannten Gruppen, etwa A', B', C' parallel und rechtwinklig gegen die beiden benachbarten Axen A, C der anderen Gruppe A, B, C gerichtet sein. Schnitten sich dabei diese letzteren in dem im Endlichen liegenden Punkte O, so dürfte der Winkel AOC nicht veränderlich sein, weil eine Aenderung desselben nur durch gegenseitige Verdrehung der Axen A, C um die Normale der Winkelebene AOC im Punkte O vermittelt werden dürfte, um letztere be-



ständig normal zu den Axen A', B', C' zu erhalten; es müsste also die diese Drehung thatsächlich vermittelnde Axe B parallel mit den Axen A', B', C' sein, wodurch die Kette zu einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette würde. Ist aber somit der Winkel AOC constant, so ist er nothwendig beständig = Null, dem Parallelismus der Axen A, B, C entsprechend, weil sonst die 3 constanten Winkel AOC, COB, BOA die Glieder einer unbeweglichen dreigliedrigen ebenen Drehkörperkette wären. Eine viergliedrige Kette mit 2 gegenüber liegenden Cylinderpaaren kann also aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette nur dann erhalten werden, wenn dieselbe solche zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden Drehkörperpaaren enthält, dass die parallelen Axen der einen rechtwinklig gegen die parallelen Axen der anderen gerichtet sind. Offenbar kann auch nur aus diesem Falle die Vereinigung von B mit C' und von C mit B', oder von B mit A' und von A mit B' zu je 2 benachbarten Cylinderpaaren hervorgehen. Somit ist ersichtlich, dass eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren und 2 Drehkörperpaaren nur aus einer solchen sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden kann, deren zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden parallelen Paaraxen unter rechten Winkeln gegen einander gerichtet sind; und da ferner die zwei Cylinderpaare einer solchen Kette nur entweder benachbarte oder gegenüber liegende sein können, so sind überhaupt keine anderen Fälle derselben möglich, als die durch Fig. 66 und Fig. 67 dargestellten. Auch können nicht neue Specialfälle daraus durch den Uebergang eines der beiden übrig gebliebenen Drehkörperpaare in ein Prismenpaar erhalten werden, weil dadurch die Kette wieder zu der durch Fig. 70 dargestellten würde unter Beschränkung der Function eines der beiden Cylinderpaare auf die eines Prismenpaares.

§. 54. **Mechanismen mit Kugelpaaren.**

Die Mannigfaltigkeit kinematischer Ketten mit Kugelpaaren ist vor Allem durch den Umstand beschränkt, dass sie, um zwangläufig zu sein, nur ein Kugelpaar enthalten dürfen; schon bei nur zwei dergleichen wären die durch sie verbundenen Theile der Kette beliebig und unabhängig von gleichzeitigen relativen Bewegungen der einzelnen Glieder dieser Kettentheile um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar. Mit einem Kugelpaare kann aber eine zwangläufige Kette aus einer solchen mit zwangläufigen niederen Paaren nur dann erhalten werden, wenn letztere benachbarte Drehkörperpaare mit sich schneidenden Axen

enthält, und da die aus einer viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette durch Vereinigung von drei ihrer Paare in einem Kugelpaare hervorgehende zweigliedrige Kette nichts anderes, als ein Drehkörperpaar ist, so können es nur sechs- oder siebengliedrige Drehkörperketten sein, die hier als event. durch Einführung eines Kugelpaares auf eine kleinere Gliederzahl reducirbar in Betracht kommen.

Was die sechsgliedrige Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ betrifft, deren zwei Gruppen A, B, C und A', B', C' auf einander folgender Paaraxen sich je in einem Punkte O resp. O' schneiden, so würde der Ersatz einer dieser Gruppen von Drehkörperpaaren, z. B. der zweiten durch ein Kugelpaar K mit Beseitigung der Glieder $C'B'$ und $B'A'$ nichts anderes als eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette $ABCK$ zur Folge haben, indem das Kugelpaar K die gegenseitige Drehbarkeit der Glieder CK und KA um jede durch O' gehende Axe, insbesondere also auch die Drehung um OO' vermittelt, die dann zugleich die einzig mögliche, nämlich die einzige ist, die in Drehungen um die Axen A, B, C als Componenten zerlegt werden kann. In Frage kommt also nur die Einführbarkeit eines Kugelpaares für solche zwei benachbarte Drehkörperpaare A, A' oder C, C' der sechsgliedrigen Drehkörperkette, von denen das eine der einen, das andere der anderen der beiden Gruppen A, B, C und A', B', C' angehört, deren Axen sich in je einem Punkte O resp. O' schneiden. Specialfälle können dabei nur insofern stattfinden, als sie der zu Grunde liegenden Kette an und für sich zukommen mit Rücksicht darauf, dass die Punkte O, O' im Unendlichen liegen, dass dann Drehkörper- durch Prismenpaare ersetzt, und event. Cylinderpaare eingeführt werden können.

Sollen nun etwa die Paare C und C' der sechsgliedrigen Drehkörperkette unbeschadet der Zwangläufigkeit durch ein Kugelpaar ersetzbar sein, so müssen die Axen C, C' sich in einem gewissen Punkte P schneiden, und darf ferner die Zwangläufigkeit der sechsgliedrigen Kette dadurch nicht gestört werden, dass das Glied CC' in zwei Glieder zerlegt wird, verbunden durch ein 7tes Drehkörperpaar D, dessen Axe, durch den Punkt P gehend, nicht in der Ebene CC' liegt. Dass aber Letzteres in der That nicht der Fall ist, ergiebt sich durch folgende Erwägung. Beliebige unendlich kleine Drehungen um die Axen der sechsgliedrigen Drehkörperkette sind, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, 5 von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen äquivalent: Drehungen um 3 im Punkte O sich schneidende nicht in einer Ebene liegende Axen und Schiebungen nach 2 sich schneidenden zur Geraden OO' senk-



rechten Richtungen. Indem nun eine Drehung um die Axe D in eine gleiche Drehung um eine durch O gehende Parallelaxe und eine Schiebung normal zur Ebene CD zerlegt werden kann, d. i. eine Schiebung, die nicht normal zu OO', weil OO' nicht in der Ebene CD enthalten ist, so kommt durch die Einführung des 7ten Drehkörperpaares D jedenfalls eine 6te unabhängige einfache Elementarbewegung hinzu (Verschiebbarkeit auch nach der Richtung OO'), so dass die Kette nach §. 47 jetzt erst mit 7 Gliedern zwangläufig beweglich sein, die sechsgliedrige Kette folglich ihre Zwangläufigkeit nicht durch die Einführung des Drehkörperpaares D und somit auch nicht durch die Einführung eines Kugelpaares an Stelle der Drehkörperpaare C, C' verlieren kann. Hiernach ist die zwangläufige sechsgliedrige Drehkörperkette immer dann auf eine fünfgliedrige, und ebenso jede aus jener sechsgliedrigen Kette abgeleitete auf eine ein Glied weniger enthaltende zwangläufige Kette mit einem Kugelpaare zu reduciren, wenn die Axen der Drehkörperpaare A und A' oder C und C' sich schneiden.

So kann z. B. der sechsgliedrige Mechanismus Fig. 61, §. 48, auf einen fünfgliedrigen reducirt werden durch Anwendung eines Kugelpaares statt der beiden Drehkörperpaare C, C', wie es bei der constructiven Ausführung des Mechanismus für Dampfmaschinen in der That geschehen ist; das stangenförmige Glied OC endigt dabei in einem kugeligen Kopf, dessen entsprechende Hohlkugel, äusserlich prismatisch gestaltet, in dem Rahmen $B'B'$ gleitet. — Der viergliedrige Mechanismus Fig. 67 lässt die Einführung eines Kugelpaares nicht zu, da die Drehkörperpaare A, A' und C, C' schon in Cylinderpaaren AA' und CC' vereinigt sind. Der fünfgliedrige Mechanismus Fig. 68 liefert aber einen viergliedrigen, indem die Glieder b und b' mit Beseitigung des Gliedes c durch ein Kugelpaar verbunden werden, und zwar enthält der Mechanismus dann ein Prismenpaar B, ein Drehkörperpaar B', ein Cylinderpaar AA' und ein Kugelpaar CC'. — Aus dem viergliedrigen Mechanismus Fig. 66 ist gar ein nur dreigliedriger mit zwei Cylinderpaaren und einem Kugelpaare zu erhalten, indem durch letzteres die Glieder a, a' unmittelbar verbunden werden. Bei Feststellung des Gliedes a und Bewegung von c ist dann jede elementare Bewegung von a' die Resultante von zwei Drehungen um Axen, welche, durch den Mittelpunkt des Kugelpaares gehend, mit den Axen der beiden Cylinderpaare parallel sind. —

Von siebengliedrigen Drehkörperketten, die durch Einführung von Kugelpaaren auf kleinere Gliederzahlen beschränkt werden können, sei schliesslich nur ein Beispiel erwähnt, zugleich als Beispiel solcher Umstände,



unter denen ein Mechanismus ausnahmsweise trotz nur unvollständiger Zwangläufigkeit doch seinem Zwecke vollkommen entsprechend sein kann. Die 7 Drehkörperpaare der Kette seien auf einander folgend A, B, C, D, C', B', A'; die Axen B, C, D sollen sich in einem Punkte O, die Axen C', B' in einem Punkte O' schneiden, die Axen A und A' aber weder durch O noch durch O' gehen und gegenseitig im Allgemeinen windschief sein. Die Kette fällt dann unter keinen der Specialfälle, in denen sie nach §. 47 schon in Folge eines Theils ihrer Elementenpaare beweglich wäre, und ist sie also jedenfalls zwangläufig. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun die Paare B, C, D unter Beseitigung der Glieder BC und CD durch ein Kugelpaar K mit dem Mittelpunkte O ersetzt werden. Wollte man auch B' und C' durch ein Kugelpaar K' mit dem Mittelpunkte O' ersetzen, so würde zwar die Zwangläufigkeit der Kette insofern aufgehoben, als nun das Glied KK' unabhängig von den übrigen Gliedern beliebig um die Gerade OO' drehbar würde, allein dieser auf ein einzelnes Glied sich beschränkende Mangel an Zwangläufigkeit beeinträchtigt nicht nothwendiger Weise die Brauchbarkeit eines durch Feststellung eines anderen Gliedes aus der Kette hervorgehenden Mechanismus. Insbesondere z. B. bei Feststellung des Gliedes AA' erhält man so einen viergliedrigen Mechanismus, bestehend aus zwei um im Allgemeinen geschränkte Axen A, A' drehbaren Gliedern AK und $A'K'$, die durch eine Koppel KK' mit Kugelgelenken K, K' so verbunden sind, dass die Mittelpunkte O, O' der letzteren ausserhalb der Axen A, A' liegen. Eine gewisse Drehung von AK um A veranlasst hier offenbar eine zwangläufige, d. h. ganz bestimmte entsprechende Drehung von $A'K'$ um A', einerlei wie dabei die Koppel etwa gleichzeitig um OO' sich drehen mag. Dieser Mechanismus kann als geschränkte oder allgemeine Doppelschwinge, Schwingkurbel resp. Doppelkurbel bezeichnet werden, jenachdem von den beiden dem festgestellten benachbarten Gliedern AK und $A'K'$ jedes nur zwischen Grenzlagen schwingen, oder eines stetig in einerlei Sinn rotiren, oder jedes rotiren kann. Wenn man die Bedingungen aufsuchte, unter denen der Mechanismus den ersten, zweiten oder dritten dieser Charaktere hat, so müssten darin die einfacheren, in §. 36 für die ebene Drehkörperkette entwickelten betreffenden Regeln als Specialfall enthalten sein.

2. Einfache Mechanismen mit höheren Elementenpaaren.

§. 55. Vorbemerkungen.

Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare lassen sich die damit herstellbaren kinematischen Ketten und Mechanismen nicht in ebenso vollständiger Uebersicht systematisch entwickeln, wie es bei der beschränkten Zahl niederer Elementenpaare hinsichtlich der nur aus solchen gebildeten Ketten geschehen konnte. Indessen sind doch die im Maschinenbau bisher benutzten, wenigstens die einfachen Ketten (§. 1) mit höheren Elementenpaaren, von denen hier zunächst nur die Rede ist, in wenigen Gruppen zusammenzufassen. Zum Theil können sie aus Ketten mit nur niederen Elementenpaaren nach dem Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) erhalten werden, indem unter Beseitigung eines Kettengliedes die Elementenpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbanden, durch ein einzelnes, die Freiheitsgrade jener in sich vereinigendes Elementenpaar ersetzt werden, das dann ein höheres sein wird, wenn die in ihm vereinigten Freiheitsgrade nicht, wie bei den in §. 53 und §. 54 besprochenen Ketten, einem niederen flächenläufigen Elementenpaare entsprechen. Insbesondere ist das der Fall, wenn die zwei ausgefallenen Elementenpaare Drehkörperpaare mit parallelen Axen waren, oder das eine ein Drehkörperpaar, das andere ein Prismenpaar mit einer zur Axe des Drehkörperpaares senkrechten Schubrichtung; die relative Beweglichkeit der durch das neue Elementenpaar verbundenen Glieder besteht dann in Drehbarkeit um alle Axen, die in einer gewissen Ebene einer gewissen Geraden parallel sind, ist also unter den in §. 3 zusammengestellten möglichen relativen Beweglichkeiten der Elemente eines niederen (umkehrbaren) Paares nicht enthalten.

Auf solche Weise können Ketten selbst mit nur zwei Gliedern (zu betrachten als blosse Elementenpaare) entstehen, wie z. B. die durch Fig. 36 (Seite 105) dargestellte Kette zeigt, die aus einer Kreuzschieberkette (Fig. 55, §. 42) dadurch entstanden zu denken ist, dass sowohl das Drehkörperpaar *a*, *b* mit dem Prismenpaare *b*, *c* unter Ausfall des Gliedes *b*, als auch das Drehkörperpaar *a*, *d* mit dem Prismenpaare *d*, *c* bei Ausfall des Gliedes *d* je durch ein flächenläufiges höheres Elementenpaar ersetzt wird, bestehend aus einem Drehkörper mit einer entsprechenden, nämlich solchen prismatischen Rinne als Hohlkörper, dass der Querschnitt der Rinnenfläche und der Meridianschnitt der Drehkörperfläche congruent sind. Ebenso

könnte aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette, Fig. 39 in §. 36, eine drei- oder zweigliedrige Kette mit einem resp. zwei solchen höheren Elementenpaaren erhalten werden, indem der Zapfen *B* oder *C* der Koppel *b* oder jeder von beiden in einer kreisförmigen entsprechenden Rinne des Steges *d* geführt würde.

Die auf solche Weise zu erhaltenden Ketten mit höheren Elementenpaaren, die natürlich voraussetzen, dass die ausgefallenen Glieder der ursprünglichen Kette mit nur niederen Paaren für den Zweck des Mechanismus in der betreffenden Maschine nicht wesentlich sind, haben indessen nur untergeordnetes Interesse, weil der Vortheil der Vereinfachung durch Verminderung der Gliederzahl in der Regel mehr als aufgewogen wird durch den Nachtheil vermehrter Abnutzung der höchstens in Linien sich berührenden Elemente des höheren Paares bei Uebertragung grösserer Kräfte, wozu in gewissen Fällen (bei Kapselwerken) der Uebelstand vermehrter Durchlässigkeit für Flüssigkeiten hinzukommen kann. Im Folgenden ist deshalb nur noch von solchen Ketten die Rede, deren Glieder eine theilweise andere gegenseitige Beweglichkeit haben, als die Glieder von Ketten mit nur niederen Elementenpaaren, aus denen sie somit nicht durch blosse Reduction der Glieder, also durch Specialisirung, sondern nur durch Verallgemeinerung, event. mit Verminderung der Gliederzahl verbunden, erhalten werden können. Sie mögen als *n*-fach höhere Prismenketten, *n*-fach höhere Drehkörperketten oder *n*-fach höhere Schraubenketten bezeichnet werden, wenn sie ausser *n* höheren Paaren nur Prismenpaare, oder nur Drehkörperpaare event. mit Prismenpaaren, oder Schraubenpaare event. mit Drehkörper- oder Prismenpaaren enthalten. Praktische Verwendung haben besonders höhere Drehkörperketten gefunden.

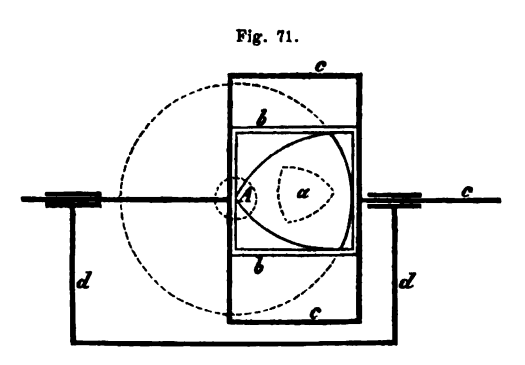
§. 56. Drehkörperketten mit zwangläufigen höheren Elementenpaaren.

Wenn in einer zwangläufigen einfachen Drehkörperkette zwangläufige höhere Elementenpaare an die Stelle von Drehkörperpaaren gesetzt werden, so wird dadurch gemäss der (für alle Arten zwangläufiger Paare gültigen) Regel in §. 47 die Zwangläufigkeit der Kette nicht beeinträchtigt, falls auch diesen höheren Paaren eine nur drehende Relativbewegung ihrer Elemente zukommt um so gelegene Polaxen, dass, wenn sie Axen von Drehkörperpaaren wären, die Kette nach §. 47 zwangläufig beweglich sein würde. Insbesondere kann also ein Drehkörperpaar, dessen Axe in der ursprünglichen Drehkörperkette mit denen der beiden benachbarten Paare parallel

ist, durch ein höheres Paar mit cylindrischen Axoiden ersetzt werden, deren Berührungslinie als Polaxe beständig mit denselben Axen parallel bleibt; ein Drehkörperpaar, dessen Axe die der benachbarten in einem gewissen Punkte *O* schneidet, durch ein höheres Paar mit conischen Axoiden, deren Mittelpunkte (Spitzen) in diesem Punkte *O* liegen. Solche höhere Drehkörperketten können analog den früher für niedere oder schlechtweg sogenannte Drehkörperketten festgesetzten Bezeichnungen als eben oder sphärisch bezeichnet werden, wenn die Polaxen aller ihrer Elementenpaare (die der Drehkörperpaare sind bekanntlich ihre geometrischen Axen) parallel sind resp. in einem Punkte sich schneiden; der obigen Bemerkung zufolge sind sie mit derselben Gliederzahl, wie niedere ebene oder sphärische Drehkörperketten (§. 36 und §. 45), also mit 4 Gliedern zwangläufig beweglich.

Ein zwangläufiges höheres Paar mit cylindrischen Axoiden seiner Elemente kann aus einer Scheibe mit entsprechendem Rahmen gebildet werden, so dass das Profil der ersteren eine Figur von constanter Breite (§. 14), das des Rahmens ein jene Figur berührend umschliessendes Quadrat (allgemeiner ein Rhombus) ist. So ist z. B. in dem ebenen Schubkurbelmechanismus (Fig. 47, §. 39) bei seiner Benutzung als Kurbelschubgetriebe zur Bewegung des Steuerungsschiebers von Dampfmaschinen das die Kurbel *a* mit der Koppel *b* verbindende Drehkörperpaar *B* durch eine Curvenscheibe mit Rahmen ersetzt worden (jene der Kurbel, dieser der Koppel angehörig), um das Bewegungsgesetz des Schiebers in zweckdienlicher Weise abzuändern. Dabei kann ebenso, wie in solchem Falle die gewöhnliche Kurbel nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als excentrische Scheibe gestaltet zu werden pflegt, auch hier die allgemeinere Curvenscheibe in solchen Dimensionen ausgeführt werden, dass von ihrer Elementenfläche die des Drehkörperpaares *A*, das die Kurbel *a* mit dem Stege *d* verbindet, eingeschlossen wird. Fig. 71 stellt einen Specialfall dieses Mechanismus dar, entsprechend dem Uebergange des die rahmenförmige Koppel *b* mit dem Schieber *c* verbindenden Drehkörperpaares *C* in ein Prismenpaar; der Schieber ist dadurch zu einem Kreuzschieber geworden, der

Fig. 71.



sowohl mit dem Stege *d*, als mit dem Rahmen *b* prismatisch gepaart ist. Unmittelbar geht der Mechanismus aus der Kreuzschieberkurbel (Fig. 56, §. 42) hervor, indem das Drehkörperpaar *B* derselben durch das höhere Curvenscheibenpaar ersetzt wird. Als Profil der Curvenscheibe ist in Fig. 71 ein gleichseitiges Bogendreieck (§. 14) angenommen worden, von dem eine Ecke in *A* liegt. Der Mechanismus kann als Kreuzschieberkurbel aufgefasst werden, deren Kurbellänge nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, nämlich bei jeder Viertelumdrehung einmal den Verbindungslinien des Punktes *A* mit allen Punkten der Polbahn des Bogendreiecks (in Fig. 71 als kleineres Bogendreieck punktirt eingetragen) nach und nach gleich wird.

Noch häufiger, als die Benutzung von dergleichen selbständig geschlossenen höheren Elementenpaaren, ist die von unselbständigen, die durch äusseren Druck geschlossen und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemacht werden. Die Elementenflächen solcher Paare (Reibungsräderpaare, Rollenpaare, Walzenpaare) sind zugleich ihre Axoide, und besteht ihre Zwangläufigkeit in relativ rollender Bewegung. So bilden z. B. zwei cylindrische Walzen mit einem Gestelle, in dem die untere Walze mit horizontaler Axe fest gelagert (durch ein Drehkörperpaar damit verbunden) ist, während die Zapfenlager der oberen in entsprechenden Schlitzen des Gestelles geführt (durch ein Prismenpaar damit verbunden) sind, eine einfach höhere ebene Drehkörperkette, deren höheres Paar von der so eben erklärten Art und von deren Drehkörperpaaren das eine durch ein Prismenpaar ersetzt ist. Ein vierrädriger Wagen ist als eine zweifach höhere ebene Drehkörperkette zu betrachten; die Vorder- und die Hinterräder als gegenüber liegende Glieder sind mit dem Wagengestelle als drittem Gliede durch Drehkörperpaare, mit der Fahrbahn als viertem Gliede durch Reibungsräderpaare verbunden. Ein Körper, der mit seiner ebenen Unterfläche auf zwei cylindrischen Walzen liegend fortgerollt wird, bildet mit diesen Walzen und der festen Rollbahn einen sogar vierfach höheren ebenen Drehkörpermechanismus, indem hier alle 4 Elementenpaare der Kette kraftschlüssige, durch Reibung zwangläufig gemachte höhere Paare sind.

§. 57. Verminderte höhere Drehkörperketten.

Dass das Princip der Verminderung der Gliederzahl einer kinematischen Kette, d. h. die Ersetzung benachbarter zwangläufiger Paare durch ein nicht zwangläufiges unter Wegfall der zwischenliegenden Glieder, auch

bei höheren Ketten Anwendung finden kann, und zwar in Beziehung sowohl auf die darin vorkommenden niederen als höheren Elementenpaare, ist selbstverständlich. Als Beispiel kann die im vorigen §. erwähnte und durch Fig. 71 dargestellte Kette dienen. Bei ihrer Benutzung als Curvenkurbelschubgetriebe (Kurbelschubgetriebe, in dem die Kurbel durch eine rotirende Curvenscheibe ersetzt ist) oder, wie es kürzer genannt werde, als **Curvenschubgetriebe** kommt es nur darauf an, durch Drehung der Curvenscheibe *a* den Schieber *c* zu gesetzmässig entsprechender Schiebung zu nöthigen, die dadurch keine Aenderung erfährt, dass der Rahmen *b* weggelassen wird, so dass nun die Curvenscheibe und der Schieber ein flächenläufiges höheres Elementenpaar bilden, die Kette auf eine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette reducirt wird, als welche sie, von **Hornblower** angegeben, mehrfach benutzt wird. Auch ist hier die in Rede stehende Verminderung der Kette nicht nur zulässig, sondern unbedingt gerechtfertigt, da die ursprüngliche höhere Paarung von *a* mit *b* nur durch eine andere höhere Paarung von *a* mit *c* ersetzt wird, somit dem Vortheil der Vereinfachung nicht ebenso ein Nachtheil gegenüber steht, wie es bei dem Ersatze von niederen Paaren mit Flächenberührung durch ein höheres Paar mit Linienberührung seiner Elemente eben durch diese Aenderung der Berührungsart der Fall ist.

Das dreigliedrige Curvenschubgetriebe kann übrigens auf mehrfach verschiedene Weise ausgeführt werden nicht nur, was die Form der Curvenscheibe betrifft, sondern auch hinsichtlich der Art ihrer Paarung mit dem Schieber. Ist ihr Profil F eine Figur von constantem Durchmesser und der innerhalb liegende Drehungspunkt A ihr Mittelpunkt, d. h. sind alle ihre durch diesen Punkt A gehenden Durchmesser von gleicher Länge d, so kann der Schieber c mit zwei geradlinigen, der Axe A parallelen Kanten versehen werden, deren Ebene durch diese Axe geht und deren Entfernung $= d$ ist, um in denselben von der dazwischen liegenden Curvenscheibe berührt zu werden. Bei beliebiger Beziehung zwischen gleichzeitiger Drehung und Schiebung der Glieder a und c, welcher entsprechend das Profil F eine Figur von im Allgemeinen weder constanter Breite noch constantem Durchmesser sein würde, kann der Schieber mit einem cylinderförmigen Zapfen in eine Rinne der Curvenscheibe eingreifen, deren Begrenzungsflächen die zwei äquidistanten Umhüllungsflächen aller relativen Lagen der Zapfenumfläche gegen die Scheibe sind. Oder es kann der Schieber kraftschlüssig mit der Curvenscheibe gepaart werden, indem er dieselbe nur an einer Stelle in einer geraden Linie berührt, z. B. in verticaler Richtung periodisch durch die rotirende Scheibe gehoben wird und

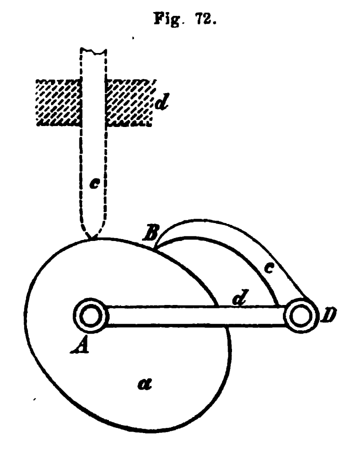


durch seine eigene Schwere niedersinkt, die Scheibe beständig von oben her berührend. Würde in diesem Falle zur Vermeidung relativ gleitender Bewegung an der Scheibenfläche und des entsprechenden Arbeitsverlustes durch Reibung der Schieber mit einer Rolle versehen, um mittels derselben die Scheibe zu berühren, so würde damit die auf 3 verminderte Gliederzahl der Kette wieder auf 4 vermehrt, und wäre das höhere Elementenpaar derselben wieder zwangläufig: ein durch äusseren Druck geschlossenes und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemachtes Rollenpaar (§. 56).

Wenn in der vorliegenden dreigliedrigen Kette das Drehkörperpaar *A* durch ein Prismenpaar ersetzt würde, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe *A*, mit der des Prismenpaares *c*, *d* aber nicht parallel ist, so ginge sie in eine einfach höhere ebene Prismenkette über, die sich von der niederen oder kurzweg so genannten ebenen Prismenkette (§. 34) durch die Veränderlichkeit des Verhältnisses der den Elementen ihrer zwei Prismenpaare zukommenden relativen Schiebungsgeschwindigkeiten unterscheidet.

Die allgemeine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette geht aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette (Fig. 39, §. 36) dadurch hervor, dass benachbarte Drehkörperpaare, etwa *B* und *C* mit Beseitigung des Gliedes $BC = b$ durch ein flächenläufiges höheres Paar ersetzt werden, entstanden zu denken dadurch, dass zunächst eines dieser Drehkörperpaare durch ein zwangläufiges höheres Paar ersetzt und dieses dann mit dem anderen zu einem flächenläufigen combinirt wird unter Wegminderung des Gliedes *b*. Eine so entstandene Kette, die als Curvenschwingkette bezeichnet werden kann, zeigt Fig. 72 bei kraftschlüssiger Ausführung des höheren Paares, gebildet aus der beliebig profilirten Curvenscheibe *a* und der damit durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) längs einer geraden Linie *B* in Berührung erhaltenen Schwinge *c*. Diese Curvenschwingkette geht wieder in eine Curvenschubkette über, wenn das Drehkörperpaar *D*, indem seine Axe ins Unendliche rückt, zu einem Prismenpaar wird, wie in Fig. 72 punktirt angedeutet wurde vorbehaltlich hinzuzudenkender starrer Verbindung der Prismenführung des Schiebers *c* mit dem einen Elemente des Drehkörperpaares *A* durch das Glied *d*.

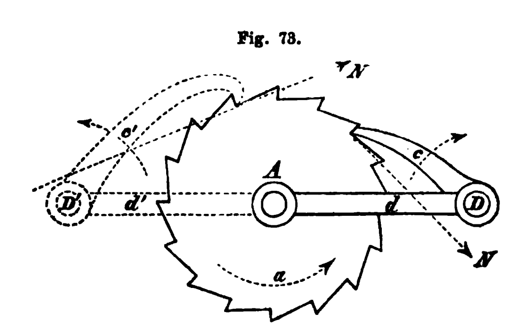
Fig. 72.



§. 58. Gesperre.

Die ebene Curvenschwingkette kommt u. A. in einer Form zur Verwendung, die besonders hervorgehoben zu werden verdient. Wenn nämlich bei derselben (Fig. 72) von einer gewissen Lage aus das Glied *a* gegen *d* in einem gewissen Sinne gedreht wird, so ist der entsprechende Drehungssinn von *c* gegen *d* bestimmt durch die Bedingung beständiger Berührung von *a* und *c* längs einer stetigen Folge gerader Linien *B* der Scheibenfläche *F*. Indem aber diese Drehung von *c* gegen *d*, wenn in solchem Sinne stattfindend, dass dabei die Entfernung der Geraden *B* von der Axe *A* zunimmt, durch den Normaldruck *N* der Curvenscheibe auf die Schwinge entgegen der die letztere angreifenden Schliessungskraft des Elementenpaares *a*, *c* bewirkt werden muss, wird sie unmöglich und damit die Kette zu einem Gesperre, wenn der Druck *N* eine solche Richtung hat, dass er die Schwinge im umgekehrten, d. h. im Sinne einer Annäherung der Berührungslinie *B* an die Axe *A* zu drehen strebt. Insbesondere kann das in gewissen Configurationen der Kette bei unstetiger, zackiger Form der Scheibenfläche *F* der Fall sein (Fig. 73), wobei dann die Schwinge als Klinke, die gezahnte Curvenscheibe als Klinkrad bezeichnet werde. Indem erstere, durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) gegen das Klinkrad angedrückt, eine durch eine andere Kraft angestrebte relative Drehung des Rades gegen das Glied *d* entgegengesetzt dem Sinne des Pfeils *a* in Fig. 73 hindert, wird sie durch den Normaldruck *N* entweder, wie die in Fig. 73 ausgezogene Klinke *c*, auf Druck oder, wie die daselbst punktirte Klinke *c'*, auf Zug in Anspruch genommen. Kinematisch unterscheiden sich beide Fälle dadurch, dass bei der unbeschränkt möglichen Drehung des Rades im Sinne des Pfeils *a* die Zugklinke sich in demselben Sinne, die Druckklinke dagegen im umgekehrten Sinne dreht, indem ihre Angriffskante längs der schrägen Fläche eines Zahns gleitet, nämlich in dem durch den betreffenden Pfeil *c'* resp. *c*, Fig. 73, angedeuteten Sinne.

Fig. 73.



Von anderem Charakter wird dieses Gesperre, wenn seine Klinke *c*, angedrückt durch die das Paar *a*, *c* schliessende äussere Kraft, mit einem Haken in eine so gestaltete Zahnlücke des Klinkrades *a* eingreift, dass dadurch dieses in beiderlei Sinne undrehbar wird, so lange nicht durch eine andere äussere Kraft die Klinke ausgehoben, das Gesperre „ausgelöst" wird. Diese Klinke vereinigt dann in sich die Eigenschaften einer Druck- und einer Zugklinke; das Gesperre kann mit Reuleaux als ruhendes im Gegensatze zu jenem durch Fig. 73 dargestellten als laufendem Gesperre bezeichnet werden.

Während das laufende Gesperre in der durch Fig. 73 dargestellten Lage bezüglich auf eine angestrebte relative Drehung von *a* gegen *d* entgegen dem Sinne des Pfeils *a* als Sperrung, das Klinkrad als Sperrrad wirkt, kommt es als sogenannte Schaltung zur Verwendung, nämlich zur Vermittelung einer periodisch absetzenden Drehung des Rades *a* als Schaltrad um seine Axe *A*, wenn das Glied *d* um diese Axe hin und her gedreht und jedesmal bei seiner Drehung entgegen dem Pfeile *a* das Schaltrad an dieser Drehung verhindert (festgestellt) wird; letzteres geschieht in der Regel durch ein zweites laufendes Klinkengesperre, dessen Sperrrad mit dem Schaltrade *a* identisch sein kann. So kann z. B. das in Fig. 73 bezüglich seiner Glieder c' und d' punktirt angedeutete Gesperre *a*, c', d' bei beständiger Feststellung seines Gliedes d' als Sperrung, das andere *a*, *c*, *d* als Schaltung dienen. Der aus beiden zusammen bestehende Mechanismus ist ein vollständiges Schaltwerk oder Schaltgetriebe. Obgleich hier das Rad *a* mit 4 anderen Gliedern (*c*, *d* und c', d') gepaart ist, handelt es sich dabei doch nicht um einen zusammengesetzten Mechanismus im Sinne der Definition eines solchen (§. 1), weil jenes Rad abwechselungsweise gegen die Glieder *c*, *d* oder c', d' unbeweglich, d. i. zu einem Gliede mit ihnen verbunden ist.

Als Sperrung kann bei einem solchen Schaltwerke auch ein ruhendes Gesperre dienen, und kann die Drehung des Rades *a* auch durch ein Zahnrad vermittelt werden, das nicht am ganzen Umfange verzahnt ist, so dass bei seiner Drehung seine vereinzelt stehenden Zähne nur zeitweise in Zahnlücken des Rades *a* behufs dessen Schaltung eingreifen, nachdem die Klinke des ruhenden Gesperres (z. B. durch einen anderen vereinzelten Zahn jenes unvollständig verzahnten Rades) ausgehoben wurde. Ueberhaupt kommen solche Schaltwerke in sehr verschiedenen Formen vor, die zum Theil übrigens wirklich zusammengesetzte Mechanismen (nicht nur einfache Mechanismen von wechselnder Zusammensetzung) sind. Dass insbesondere auch zur Vermittelung einer periodisch absetzenden geradlinigen Bewegung das Klink-

rad durch eine in ähnlicher Weise gezahnte Stange ersetzt werden kann, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares A in ein Prismenpaar, bedarf hier keiner weiteren Ausführung.

§. 59. Einfache Zahnräderketten.

Die allgemeinste dreigliedrige einfach höhere Drehkörperkette, von der die einfache Zahnräderkette eine besondere Ausführungsform ist, ergiebt sich aus der Erwägung, dass, wenn a und a' zwei Körper sind, von denen a durch ein Drehkörperpaar A, a' durch ein anderes Drehkörperpaar A' mit einem dritten Körper b verbunden ist, dieselben stets unter sich durch ein höheres Elementenpaar a, a' so gepaart werden können, dass sie mit dem Körper b eine zwangläufig geschlossene Kette bilden und dass, unter ω die relative Winkelgeschwindigkeit von a gegen b um die Axe A, unter ω' die relative Winkelgeschwindigkeit von a' gegen b um die Axe A' verstanden, das Verhältniss $\omega : \omega'$ nach einem beliebig gegebenen Gesetze veränderlich ist. Dass das Paar a, a' an und für sich nicht zwangläufig sein kann, folgt aus der allgemeinen Regel in §. 47 bezüglich der Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, übrigens auch unmittelbar aus der Erwägung, dass Zwangläufigkeit dieses Paares a, a', um die in dem Element a feste Gerade A in unveränderlicher Lage gegen die im Element a' feste Gerade A' zu erhalten, nur in relativer Drehbarkeit von a' gegen a um die Axe A oder von a gegen a' um die Axe A' bestehen könnte, so dass dann das Paar a, a' ein mit A oder A' coaxiales Drehkörperpaar wäre, auf das sich die ganze Kette reducirte.

Die Axen A, A' der gleich bezeichneten Drehkörperpaare können im Allgemeinen windschief gegen einander gerichtet sein, und sind dann die den Elementen des Paares a, a' angehörigen Elementenflächen F, F' nach §. 25 auf unendlich mannigfache Weise bestimmbar, nachdem ihre betreffenden Axoide gemäss §. 24 bestimmt worden sind. Letztere sind Flächen, die von der Polaxe P bei ihrer relativen Bewegung beziehungsweise gegen a und a' beschrieben werden; diese Polaxe ist eine Gerade, welche die gemeinsame Normale OO' der Axe A, A' in einem solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Punkte Q rechtwinklig schneidet und unter solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Winkeln α, α' gegen A und A' geneigt ist, dass, unter $r = QO$, $r' = QO'$ die Abstände des Punktes Q von den Fuss-



punkten O, O' jener gemeinsamen Normale der Axen A, A' verstanden, nach Gl. (1) und (3) in §. 24:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'; \quad \frac{r}{r'} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'}$$

ist. Die gleitend-rollende Relativbewegung der in der Polaxe P sich berührenden Axoide entspricht einer Winkelgeschwindigkeit Ω um dieselbe und einer Schiebungsgeschwindigkeit v längs derselben, die nach Gl. (7) und (8) in §. 24 bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos \alpha}{r'} = \frac{\omega' \cos \alpha'}{r}; \quad \frac{v}{e} = \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha',$$

unter e die kürzeste Entfernung OO' der Axen A, A' verstanden. Liegen diese in einer Ebene, so ist $e = 0$ und werden damit auch r, r' und v = Null; die Polaxe geht in der Ebene der Axen A, A' durch ihren Schnittpunkt, und die dann conischen Axoide haben eine rein rollende Relativbewegung. Sind insbesondere die Axen A, A' parallel, so sind sie es auch mit der in ihrer Ebene liegenden Polaxe und werden die Axoide cylindrische Flächen. In diesen besonderen Fällen conischer oder cylindrischer Axoide ergeben sich die Elementenflächen F, F' des Paares a, a' nach §. 23 resp. nach §. 15 bis §. 20.

Während sich die Glieder a, a' um ihre Polaxe mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gegenseitig drehen und event. längs derselben mit der Geschwindigkeit v gleiten (wenn die Axen A, A' nicht in einer Ebene liegen), haben die Elementenflächen F, F' in einem Berührungspunkte, dessen Entfernung von der Polaxe $= p$ ist, eine relativ gleitende Bewegung mit der Geschwindigkeit $p\Omega$ resp. $\sqrt{v^2 + p^2\Omega^2}$. Dieselbe ist um so grösser, und entspricht ihr eine um so grössere Reibungsarbeit in Folge des gegenseitigen Drucks der Glieder a, a', je grösser p ist. Durch diese Erwägung wird, wenn die Glieder a, a' gegen das Glied b um grössere oder gar um beliebig grosse Winkel drehbar sein sollen, die Ausführung des Elementenpaares a, a' als Zahnräderpaar, der Kette als Zahnräderkette begründet, d. h. eine Trennung der Elementenflächen F, F' in Theile, die nur in der Nähe der Polaxen sich berühren, dabei aber so angeordnet sind, dass wenigstens ein Paar solcher Flächentheile (Zahnflächen) sich stets in Berührung befindet. Sofern diese Berührung und entsprechende Stützung nur einseitig stattfindet in Folge des Spielraums der Zähne des einen in den Zahnlücken des anderen Rades, muss der Schluss des Paares a, a' und somit der Kette durch die äussere Kraft vermittelt werden, von der bei Benutzung der Kette als Getriebe die Bewegung verursacht wird.



Aus dieser einfachen Zahnräderkette gehen zweierlei Mechanismen hervor, jenachdem das Glied b oder eines der Räder a, a' festgestellt wird. Der erstere dieser Mechanismen kann als Zahnrädermechanismus, der andere als Kurbelradmechanismus bezeichnet werden, indem dabei das Glied b zur Kurbel, d. h. zu einem Gliede wird, das sowohl mit dem festgestellten, als mit dem andererseits benachbarten Gliede durch ein Drehkörperpaar verbunden und gegen ersteres unbegrenzt drehbar ist. Während sich im ersten Falle die Räder a, a' mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um ihre Axen A, A' drehen, entspricht im zweiten Falle einer Drehung der Kurbel um ihre feste Axe eine Bewegung des beweglichen Rades, die mit der durch Ω, v und die Lage der gegenseitigen Polaxe der Glieder a, a' bestimmten Relativbewegung als jetzt absolute Bewegung identisch ist.

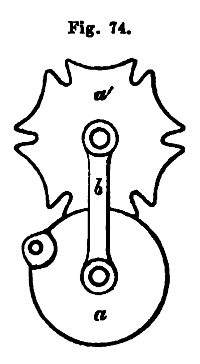
Von den Drehkörperpaaren A, A' kann eines, etwa A' in ein Prismenpaar übergehen, entsprechend dem Uebergange des betreffenden Zahnrades a' in eine Zahnstange. Jenachdem b, das Zahnrad a oder die Zahnstange a' das festgestellte Glied ist, sind dann dreierlei Mechanismen zu unterscheiden. Würden beide Drehkörperpaare A, A' durch Prismenpaare ersetzt, so wäre die Relativbewegung der Glieder a, a' eine blosse Schiebung, deren Richtung mit den Schubrichtungen der Prismenpaare derselben Ebene E parallel ist. Jenachdem diese Glieder durch ein Prismenpaar (dessen Schubrichtung auch jener Ebene E parallel sein muss) oder durch ein höheres Paar verbunden werden, wäre die Kette eine gewöhnliche (niedere) oder eine einfach höhere Prismenkette; übrigens ist dieser Specialfall der einzige, in welchem unbeschadet der Beweglichkeit der Kette die Glieder a, a' auch durch ein niederes Paar verbunden werden können. —

Auch die einfache Zahnräderkette kann als Gesperre (§. 58) gebildet werden. Insbesondere wird die ebene Zahnräderkette, entsprechend dem Falle, dass die Axen der Drehkörperpaare A, A' in einer gewissen Entfernung e parallel sind, dadurch zu einem Gesperre, dass das eine Rad, etwa a, nur an einem zusammenhängenden Theile des Umfangs verzahnt, im Uebrigen durch eine Umdrehungsfläche zur Axe A begrenzt, das andere Rad a' aber an mehreren Umfangstheilen von gleicher Länge mit dem verzahnten Umfangstheile von a entsprechend verzahnt und in den unter sich gleichen Zwischenräumen durch Umdrehungsflächen begrenzt wird, die der das Rad begrenzenden Umdrehungsfläche congruent sind und deren Axen von der Axe A' des Rades a' die Entfernungen e haben; es kann z. B. a als sogenanntes Einzahnrad mit nur einem Zahne, das mit Rücksicht auf seine Gestalt als Sternrad zu bezeichnende Rad a' mit entsprechenden



einzelnen Zahnlücken versehen werden: Fig. 74. So lange dann, wie es in der Figur der Fall ist, die Umdrehungsfläche des Einzahnrades *a* von einer der entsprechenden Begrenzungsflächen des Sternrades *a'* berührt wird, ist letzteres bezüglich seiner relativen Beweglichkeit gegen das Glied *b* gehemmt (gesperrt), die Kette somit auf ein Drehkörperpaar mit der Axe *A* reducirt, für dessen kinematischen Charakter die Zusammengesetztheit seiner Elementenfläche aus zwei coaxialen Umdrehungsflächen gleichgültig ist; durch den bei jeder vollen Umdrehung von *a* gegen *b* einmal erfolgenden Eingriff des Zahnes von *a* in eine der *n* Zahnlücken des Sternrades wird aber letzteres gedreht bis es nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung auf's Neue gehemmt wird.

Fig. 74.



Dieses Sternradgesperre ist im Sinne der in §. 58 getroffenen Unterscheidung als laufendes zu bezeichnen, unterscheidet sich aber von dem dort betrachteten laufenden Klinkengesperre dadurch, dass, während bei diesem die Kette durch Sperrung zu einem starren Körper wird und deshalb die Drehung des Klinkrades nur in einem Sinne unbegrenzt stattfinden kann, hier die Drehung des Rades *a* in beiderlei Sinn möglich ist, indem durch die Sperrung nur das Sternrad *a'* und das Glied *b* gegenseitig unbeweglich werden.

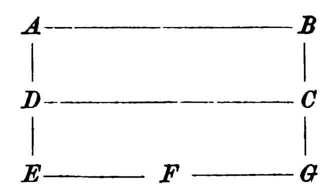
Den dreierlei Mechanismen, die aus dieser Kette durch Feststellung eines der Glieder *b*, *a*, *a'* erhalten werden können, entsprechen auch nur ebenso viel Getriebe, da die Bewegung immer nur eingeleitet werden kann durch die relative Bewegung der Glieder *a*, *b*, so dass sie vom Gliede *a* ausgehen muss bei Feststellung von *b* oder *a'*, vom Gliede *b* bei Feststellung von *a*. Mit Rücksicht auf die periodisch absetzende Relativbewegung der Glieder *b*, *a'* wirkt auch ein solches Getriebe als Schaltung ausser als Sperrung mit Rücksicht auf die zeitweilige relative Unbeweglichkeit dieser Glieder.

b. Zusammengesetzte Mechanismen.

§. 60. Vorbemerkungen.

Eine zusammengesetzte geschlossene kinematische Kette ist aus einfachen geschlossenen Ketten dadurch entstanden zu denken, dass gewisse

Glieder von verschiedenen dieser einfachen Ketten zu ternären, quaternären etc., d. h. zu Gliedern verbunden werden, die Elemente von mehr als zwei Paaren enthalten. Umgekehrt kann durch Zerlegung ihrer ternären, quaternären etc. Glieder in binäre, die zusammengesetzte in einfache geschlossene Ketten aufgelöst werden. Wären die letzteren ebenso wie jene alle zwangläufig, so wären die durch Feststellung eines Gliedes aus der zusammengesetzten Kette hervorgehenden Mechanismen keine elementare Mechanismen, die vielmehr gemäss ihrer Definition in §. 1 dadurch charakterisirt sind, dass ihre zwangläufige kinematische Kette entweder einfach oder, wenn zusammengesetzt, einer Zerlegung in lediglich zwangläufige einfache oder weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist.



Es sei z. B. nach vorstehendem Schema *ABCD* eine viergliedrige, also zwangläufige, und *CDEFG* eine fünfgliedrige, also nicht zwangläufige ebene Drehkörperkette. Würden diese zwei einfachen Ketten so mit einander verbunden, dass *CD* als ein nunmehr quaternäres Glied (durch zwei coaxiale Drehkörperpaare *CD*, *DA* und *CD*, *DE* und die zwei coaxialen Drehkörperpaare *BC*, *CD* und *GC*, *CD* mit folgenden Gliedern gepaart) ihnen gemeinsam ist, so wäre die entstandene zusammengesetzte Kette noch ebenso wenig zwangläufig wie es die eine der beiden einfachen Ketten war. Auch durch Verbindung der Glieder *DA* und *DE* zu dem ternären Gliede *ADE*, wodurch das vorher quaternäre Glied *CD* zu einem gleichfalls ternären (bei *D* nur noch mit e i n e m anderen Gliede gepaarten) wird, würde die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette noch nicht erzielt werden, weil gleichzeitige elementare relative Drehungen der auf einander folgenden Glieder *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GC* nach wie vor durch eine derselben nicht bestimmt sein würden. Wenn aber auch noch *BC* und *GC* zu dem ternären Gliede *BCG* verbunden werden, wobei dann *CD* ein binäres Glied wird, so sind dadurch gleichzeitige relative Drehungen der Glieder *GC*, *CD* und *CD*, *DE* von einander abhängig, nämlich den relativen Drehungen der Glieder *BC*, *CD* und *CD*, *DA* der zwangläufigen einfachen Kette *ABCD* gleich geworden, und die somit zwangläufig gewordene zusammengesetzte Kette ist von solcher Art, dass sie nicht in zwangläufige Ketten



zerlegt werden kann, dass es also elementare Mechanismen sind, die daraus durch Feststellung eines Gliedes erhalten werden können.

Würde aber die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette dadurch herbeigeführt, dass, nachdem *DA* und *DE* zu dem ternären Gliede *ADE* verbunden waren, ausserdem noch *GC* mit *CD* zu dem (ebenso wie *CD* ternären) Gliede *GCD* verbunden werden, so hätte man damit zwei benachbarte Glieder der ursprünglichen fünfgliedrigen Drehkörperkette *CDEFG* zu einem einzigen Gliede fest verbunden, d. h. diese Kette zu einer viergliedrigen, somit zwangläufigen Kette gemacht, deren Verbindung mit der auch schon für sich zwangläufigen Kette *ABCD* natürlich eine, wenn überhaupt bewegliche, dann jedenfalls zwangläufige zusammengesetzte Kette liefert, aus der aber, da sie umgekehrt in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden könnte, nicht elementare Mechanismen durch Feststellung je eines Gliedes hervorgehen.

Zur Bildung der zwangläufigen Kette eines elementaren Mechanismus durch Zusammensetzung einfacher geschlossener Ketten ist es also wesentlich, dass letztere nicht alle schon für sich zwangläufig sind und dass ihre Zusammensetzung nur durch Verbindung von Gliedern verschiedener der einfachen Ketten herbeigeführt wird. Die dadurch eingeführte Beschränkung lässt es möglich erscheinen, alle Arten solcher Bildungen von Ketten zusammengesetzter elementarer Mechanismen aus gegebenen Arten von einfachen Ketten in systematischer Uebersicht zu entwickeln, wogegen die Kettenbildung nicht elementarer Mechanismen aus einfachen Ketten von gegebener Art einer unendlich grossen Mannigfaltigkeit fähig und nur durch den Zweck beschränkt ist, gewissen Gliedern bestimmte Bewegungen oder solche Bewegungen zu ertheilen, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen. Indem die Auswahl der dazu dienlichen Arten zusammengesetzter Mechanismen eine dem Combinationsvermögen des Constructeurs und der Berücksichtigung praktischer Anforderungen anheimfallende Aufgabe ist, werden die nicht elementaren Mechanismen überhaupt als in das Gebiet des Maschinenbaues oder der Technologie fallend hier betrachtet und die Aufgabe der theoretischen (einen Theil der theoretischen Maschinenlehre ausmachenden) Kinematik nur dahin verstanden, dass sie durch eine möglichst systematische und vollständige Uebersicht der elementaren Mechanismen und ihrer kinematischen Eigenschaften den wissenschaftlichen Grund zur Behandlung jener weiteren Aufgabe zu legen hat. Selbst bei dieser beschränkten Auffassung der theoretischen Kinematik fehlt freilich noch viel an der vollständigen Lösung ihrer Aufgabe, und sind besonders die hier in Rede



stehenden zusammengesetzten elementaren Mechanismen einer systematischen Ordnung bisher nicht unterworfen worden.

Jene angeführte Ableitung zusammengesetzter Ketten von elementaren Mechanismen aus einfachen, wegen zu grosser Gliederzahl nicht zwangläufigen Ketten durch feste Verbindung gewisser ihrer Glieder mit solchen von anderen einfachen Ketten setzte voraus, dass alle Kettenglieder starre Körper sind. Zusammengesetzt sind aber ferner geschlossene Ketten mit Zug- oder Druckkraftorganen (§. 28), und wie auch daraus elementare Mechanismen hervorgehen können, zeigen die in §. 30 erwähnten Beispiele des Riemengetriebes (Fig. 31) und des Wassergestänges (Fig. 32).

Wenn endlich die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes durch Kettenschluss (§. 32) herbeigeführt wird, wie z. B. bei dem Parallelkurbelgetriebe durch feste Verbindung seiner Kurbeln mit denen eines anderen Parallelkurbelgetriebes, das mit jenem den Steg gemein hat, oder wie bei dem gleichschenkligen Schleifkurbelgetriebe durch Verdoppelung seiner Kurbel und Schleife (Fig. 54, §. 41), so geht daraus ein zusammengesetzter Mechanismus hervor, der bedingungsweise auch elementar ist, indem er nicht in einfache Ketten zerlegt werden kann, die für die betreffende Verwendung als Getriebe unbedingt zwangläufig geschlossen sind. Wird aber die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines einfachen Getriebes durch Elementenpaare herbeigeführt, wie z. B. bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe (Fig. 35, §. 32), so wird der betreffende elementare Mechanismus dadurch nur bedingungsweise, nämlich nur bei Ueberschreitung der Todlagen ein zusammengesetzter.

§. 61. Zusammengesetzte ebene Drehkörperketten.

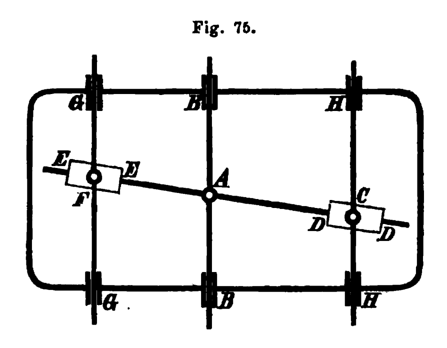
Eine einfache geschlossene kinematische Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, die aus x Gliedern mehr besteht, als sie haben dürfte, um nach dem in §. 47 nachgewiesenen Kriterium zwangläufig zu sein, kann im Allgemeinen zwangläufig gemacht werden durch eine solche Verbindung mit anderen einfachen Ketten, dass dadurch x weitere Beziehungen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen ihrer Elementenpaare herbeigeführt werden. Bei ebenen Drehkörperketten insbesondere betreffen diese Beziehungen die Winkel der Axenebenen, d. h. die Winkel, unter denen sich irgend zwei solche Ebenen schneiden, deren jede durch zwei Axen von Drehkörperpaaren hindurch geht.



So wird z. B. nach dem Schema auf S. 206 durch die Verbindung der fünfgliedrigen ebenen Drehkörperkette *CDEFG* mit der viergliedrigen, also zwangläufigen *ABCD* der Art, dass *GC* mit *BC*, *CD* mit *CD*, *DE* mit *DA* zu je einem einzigen Gliede verbunden wird, die Summe der Winkel *GCD* und *BCD* constant (unter den Buchstaben die betreffenden Paaraxen verstanden, so dass z. B. *GCD* der Winkel zwischen den Ebenen *GC* und *CD* ist), desgleichen die Summe der Winkel *CDE* und *CDA*. Indem aber die Winkel *BCD* und *CDA* in der viergliedrigen Kette sich gegenseitig bedingen, gilt dasselbe nun auch von den Winkeln *GCD* und *CDE* der fünfgliedrigen Kette, und ist diese somit zwangläufig geworden, da sie ein Glied zu viel dazu hatte.

Aus einer solchen zusammengesetzten ebenen Drehkörperkette mit 6 Gliedern (4 binären, 2 ternären) und 7 Drehkörperpaaren kann bei theilweisem Ersatze der letzteren durch Prismenpaare u. A. ein Mechanismus gebildet werden, vermittels dessen die nach einem gewissen Gesetze stattfindende geradlinig schwingende Bewegung eines Körpers nach constantem Verhältnisse verkleinert oder vergrössert auf einen anderen Körper übertragbar ist. Zu dem Ende seien (Fig. 75, worin die bei *H* und *H* angedeuteten prismatischen Führungen einstweilen durch starre Verbindungen ersetzt zu denken sind) *BB* und *DE* zwei durch das Drehkörperpaar *A* verbundene gerade Stangen, von denen die erste (bei *B* und *B*) mit einem festen Gestelle, die andere mit zwei Hülsen *DD* und *EE* (als Hohlprismen) prismatisch gepaart ist; die Hülse *DD* sei um den festen Bolzen *C*, die Hülse *EE* um den Bolzen *F* einer Stange *GG* drehbar, die parallel der Stange *BB* im Gestelle prismatisch geführt ist. Hiernach ist *CDEFG* eine fünfgliedrige Kette, die zwangläufig gemacht ist durch ihre Verbindung mit der viergliedrigen *ABCD*; *BCG* ist das festgestellte, *ADE* das andere ternäre Glied. Jenachdem die Bewegung von der Stange *GG* oder *BB* ausgeht, wird sie verkleinert oder vergrössert auf die andere übertragen, und zwar in dem constanten Verhältnisse *CA* : *CF*.

Fig. 75.



Wenn die Hülse *DD* durch das Drehkörperpaar *C* nicht mit dem festen Gestelle, sondern, wie Fig. 75 darstellt, mit einer Stange *HH* gepaart wird, die parallel den Stangen *BB* und *GG* prismatisch im Gestelle

geführt ist, so würde die nun siebengliedrige und 8 Elementenpaare enthaltende zusammengesetzte Kette nicht mehr zwangläufig sein, falls nach wie vor die Bewegung nur von einer der Stangen *BB*, *GG*, *HH* ausginge, sofern nicht zwei derselben durch eine weitere Kette mit einander verbunden werden, um ihre gleichzeitigen Schiebungen von einander abhängig zu machen. Ist das aber der Fall oder geht die Bewegung von zwei der drei Stangen zugleich aus, z. B. von *GG* und *HH*, indem sie nach gewissen Gesetzen hin und her bewegt werden, so setzt sich aus ihren gleichzeitigen Schiebungen g, h die Schiebung b der dritten Stange *BB* nach einem bestimmten Verhältnisse zusammen:

$$b = \frac{fg + ch}{f + c},$$

wenn das constante Verhältniss der veränderlichen Axenentfernungen:

$$AC : AF = f : c$$

gesetzt wird. Der Mechanismus ist immer noch elementar und als Interferenzmechanismus zu bezeichnen.

Sollte er z. B. benutzt werden, um das Resultat der Interferenz von zwei parallelen sogenannten einfach harmonischen geradlinigen Bewegungen darzustellen (d. h. von Bewegungen, die demselben Gesetze folgen wie die Bewegung der Projection eines gleichförmig im Kreise umlaufenden Punktes auf einen Durchmesser des Kreises), so können die Stangen *GG* und *HH* von gleichförmig rotirenden Kurbeln aus vermittels rechtwinkliger Kreuzschieberkurbelmechanismen (Fig. 56, §. 42) bewegt und diese Bewegungen dadurch von einander abhängig gemacht werden, dass die erste Kurbel, deren Länge $= r$ sei, mit einem Cylinderrade von z Zähnen, die andere, deren Länge $= r'$ sei, mit einem solchen von z' Zähnen fest verbunden wird so, dass diese Räder in äusserem Eingriffe sind der Art im Allgemeinen, dass, wenn die erste Kurbel sich in einer ihrer zwei Mittelstellungen befindet (gegen die Schubrichtung der betreffenden Stange im einen oder anderen Sinne rechtwinklig gerichtet ist), die zweite um einen gewissen Winkel δ über ihre entgegengesetzt gerichtete Mittelstellung hinaus ist. Dem Drehungswinkel α der ersten Kurbel, der von jener Mittelstellung aus gerechnet werde, entspricht dann der Drehungswinkel $\frac{z}{z'}\alpha$ der zweiten, und ist im Falle $f = c$, d. h. bei gleichen Entfernungen der äusseren Stangen *GG* und *HH* von der mittleren *BB*, der entsprechende Weg dieser letzteren von derjenigen Lage aus gerechnet, die sie hätte, wenn beide Kurbeln sich zugleich in ihren Mittelstellungen befänden:

$$b = \frac{1}{2}\left[r\,\sin\alpha + r'\sin\left(\delta + \frac{s}{s'}\alpha\right)\right].$$

Die interferirenden Schwingungen hätten gleiche Amplitude für $r = r'$, gleiche Schwingungsdauer für $s = s'$, gleiche Phase für $\delta = 0$. Der Mechanismus, der so dazu dient, die Stangen GG und HH in bestimmter Weise zu bewegen, ist zusammengesetzt ohne elementar zu sein, da seine Kette in drei zwangläufige Ketten (zwei Kreuzschieberketten und eine einfache Zahnräderkette) zerlegbar ist.

Um endlich nicht sowohl das arithmetische Mittel, als vielmehr die Summe der beiden gegebenen Schwingungen als das Resultat ihrer Interferenz zu erhalten, müsste noch die Bewegung der Stange BB verdoppelt werden, was u. A. wieder mit Hülfe eines Mechanismus von der in Fig. 75 dargestellten Art (bei Feststellung einer der beiden äusseren Stangen und mit $f = c$) geschehen könnte.

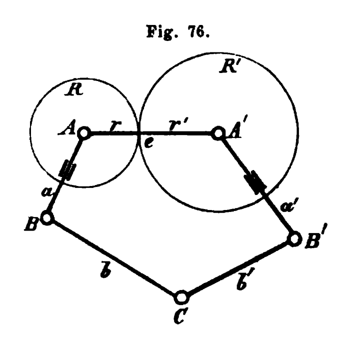
§. 62. Zusammengesetzte ebene Zahnräderketten.

Sind a, b, c drei auf einander folgende Glieder einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette, die aus mehr als vier Gliedern besteht und somit nicht zwangläufig ist, so kann eine weitere Beziehung zwischen den Winkeln der Axenebenen dieser Kette u. A. auch dadurch herbeigeführt werden, dass a mit einem gezahnten Cylinderrade fest verbunden wird, das mit dem Drehkörperpaare a, b coaxial ist, und c mit einem solchen, das mit jenem in Eingriff und mit dem Drehkörperpaare b, c coaxial ist. Gleichzeitige relative Drehungen der Glieder a und c gegen das Glied b haben dann immer dasselbe Verhältniss zu einander, indem sie den Theilkreisradien der mit ihnen verbundenen Räder umgekehrt proportional sind. Die ursprüngliche Drehkörperkette findet sich auf solche Weise mit der einfachen Zahnräderkette a, b, c zu einer elementar zusammengesetzten Kette mit den ternären Gliedern a und c verbunden, und wenn sie aus $x + 4$ Gliedern besteht, kann sie dadurch zwangläufig gemacht werden, dass x mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder auf solche Weise mit einfachen Zahnräderketten verbunden werden. Durch Feststellung eines Gliedes sind daraus verschiedene e l e m e n t a r z u s a m m e n g e s e t z t e e b e n e Z a h n r ä d e r m e c h a n i s m e n zu erhalten.

Von grösserem Interesse ist der einfachste hierher gehörige Fall einer f ü n f g l i e d r i g e n e l e m e n t a r z u s a m m e n g e s e t z t e n e b e n e n Z a h n r ä d e r k e t t e $abb'a'e$, schematisch dargestellt durch Fig. 76, worin die Glieder

durch gerade Linien, die sie verbindenden Drehkörperpaare A, B, C, B', A' durch kleine Kreise, die mit den Gliedern a und a' fest verbundenen Zahnräder R und R' durch ihre Theilkreise, deren Radien $= r$ und r' seien, angedeutet sind; die Einschliessung der geraden Linien a und a' zwischen kurzen Parallellinien innerhalb der Theilkreise soll die feste Verbindung der betreffenden Glieder und Zahnräder andeuten. Mehrere der aus dieser Kette unter speciellen Voraussetzungen hervorgehenden Mechanismen haben praktische Anwendung gefunden oder sind dazu vorgeschlagen worden, wenigstens als mehr oder weniger zufällig und unabhängig von einander, unbewusst ihres principiellen Zusammenhanges concipirte Mechanismen. Dergleichen besondere Fälle können namentlich in der Gleichheit gewisser Dimensionen oder darin bestehen, dass einzelne Gliedlängen $=$ Null (benachbarte Drehkörperpaare coaxial) oder unendlich (Drehkörperpaare durch Prismenpaare ersetzt) sind.

Fig. 76.



1) Ist $a = a'$, $b = b'$, $r = r'$ und sind die Räder in Eingriff gebracht, während die Kette (verstanden als Durchschnittsfigur mit einer zu den Axen ihrer Drehkörperpaare senkrechten Ebene) in Bezug auf die Gerade symmetrisch ist, von der die Strecke $AA' = e$ in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig geschnitten wird, so bleibt sie beständig in dieser Weise symmetrisch, wird also bei Feststellung des Gliedes e der Punkt C in der Symmetrieaxe geführt: Cartwright'sche Geradführung.

2) Verschwinden kann offenbar nur eine der Gliedlängen a, a'; denn mit $e = 0$ würden auch die Räder R, R' verschwinden und ginge die Kette in eine einfache viergliedrige Drehkörperkette über, während mit $b = 0$ oder $b' = 0$ die Kette gar unbeweglich, nämlich zu einer viergliedrigen Drehkörperkette würde, die durch ihre Verbindung mit der Räderkette einem weiteren, also übermässigen Zwange unterläge. Die Voraussetzung $a = 0$ aber (principiell nicht verschieden von dem Falle $a' = 0$, da a und a' gleichwerthige Glieder der Kette sind) liefert eine zwangläufig bewegliche Kette, da mit dem Wegfalle des Gliedes a, mit dem das Rad R fest verbunden war, auch jeder Zwang der Drehkörperkette durch das Räderpaar beseitigt ist; bei Feststellung des Gliedes $AC = b$ geht daraus ein Mechanismus hervor, der, falls e die kleinste der vier Gliedlängen b, b', a', e und die Summe aus ihr und der grössten Gliedlänge kleiner als die



Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, von Watt in seinem sogenannten Planetenräderwerke benutzt wurde. Nach §. 36 verhält er sich als Schwingkurbel mit b' als Schwinge (Arm eines um C schwingenden Balanciers) und mit e als Kurbel, zusammenhängend mit jener durch die Koppel a'. Benutzt wird aber bei diesem Watt'schen Mechanismus nicht die Drehung der Kurbel e (in Bezug auf welche in der That die Räder R, R' eine unnütze Beigabe wären), sondern die des Rades R in ihrer Abhängigkeit von den Schwingungen des Gliedes b'. So oft letzteres eine Hin- und Herschwingung macht und somit die Kette $ACB'A'$ in die Anfangslage zurückkehrt, macht die Kurbel eine Umdrehung und im entgegengesetzten Sinne das Rad R' eine relative Umdrehung gegen die Kurbel; im Sinne der absoluten Kurbeldrehung macht dann also das mit R' in äusserem Eingriffe befindliche Rad R relativ gegen die Kurbel $\frac{r'}{r}$ Umdrehungen, absolut oder in Bezug auf das festgestellte Glied folglich

$$\frac{r'}{r} + 1 = \frac{e}{r} \text{ Umdrehungen,}$$

insbesondere zwei Umdrehungen im Falle $r = r'$.

3) Mannigfaltig sind die Specialfälle, die aus der vorliegenden Kette dadurch erhalten werden können, dass eins ihrer fünf Drehkörperpaare durch ein Prismenpaar ersetzt wird, in welcher Hinsicht (Fig. 76) vor Allem die drei Fälle zu unterscheiden sind, dass solcher Uebergang in ein Prismenpaar (verbunden mit unendlich grosser Länge der zwei dadurch gepaarten Glieder) entweder das Paar C oder eins der Paare B, B' oder eins der Paare A, A' betrifft.

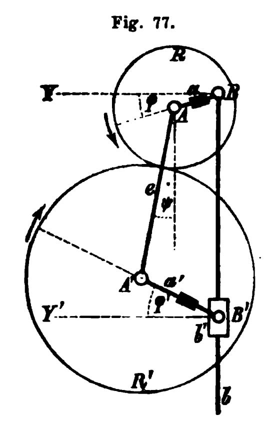
Zunächst werde das Drehkörperpaar C durch ein Prismenpaar ersetzt angenommen. Ist dessen Schubrichtung parallel der Axenebene BB' (entsprechend dem Falle, dass die Axe C nach einer zu dieser Ebene senkrechten Richtung ins Unendliche rückte), so geht daraus bei Feststellung eines der beiden benachbarten Glieder ein Mechanismus hervor, der 1858 von Reuleaux unter dem Namen des Zahnexcentriks als ein neuer Bewegungsmechanismus bekannt gemacht wurde.* Fig. 77 stellt ihn schematisch dar ohne nach obigen Bemerkungen zu Fig. 76 einer näheren Erklärung zu bedürfen; b ist darin als festgestelltes Glied vorausgesetzt,

* Seine kinematischen Eigenschaften wurden vom Verf. demnächst eingehender entwickelt im Jahrgange 1858, S. 236 u. ff. der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.



prismatisch gepaart mit dem Schieber b'. Sofern das mit dem Rade R fest verbundene Glied um die Axe B ringsum drehbar ist (wozu nöthig, dass $a < e + a'$), kann der Mechanismus betrachtet werden als eine Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel unter Herstellung der durch solche Gliederung gestörten Zwangläufigkeit durch die Verbindung der Kette mit der Zahnräderkette R, e, R'.

Fig. 77.



Um die Beziehung zwischen der Bewegung des Schiebers b' und der Drehung der Kurbel a auszudrücken, seien

φ und φ' gleichzeitige Drehungswinkel der Glieder a, a' um die Axen B, B', gerechnet von den zu BB' senkrechten Richtungen BY und $B'Y'$ aus im Sinne der Pfeile,

ψ der von den Richtungen AA' und BB' gebildete und positiv oder negativ gesetzte Winkel, jenachdem er von der durch A nach der Richtung BB' gezogenen Geraden im Sinne BY (wie in Fig. 77) oder auf der anderen Seite gelegen ist.

Dann ist:

$$BB' = x = e \cos\psi + a \sin\varphi + a' \sin\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

worin, um x als Function von φ allein zu erhalten, noch φ' und ψ durch φ auszudrücken sind. Zu dem Ende hat man zuvörderst:

$$\sin\psi = \frac{a' \cos\varphi' - a \cos\varphi}{e} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist ferner in der Anfangslage ($\varphi = 0$): $\varphi' = \alpha$ und $\psi = \beta$, welche Winkel α und β nach Gl. (2) in der Beziehung stehen:

$$\sin\beta = \frac{a' \cos\alpha - a}{e},$$

so entsprechen dem Drehungswinkel φ des Gliedes a um B die folgenden Aenderungen der Winkel $A'AB$ und $AA'B'$:

$$\Delta(A'AB) = \varphi + \psi - \beta; \quad \Delta(AA'B') = \varphi' - \alpha - \psi + \beta$$

und da wegen des Eingriffes der Räder auch

$$r \,.\, \Delta(A'AB) = r' \,.\, \Delta(AA'B')$$

ist, so folgt:

$$(r + r')(\psi - \beta) = r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi$$

$$\psi = \beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch die Gleichungen (2) und (3) sind φ' und ψ als Functionen von φ bestimmt, freilich in solcher Weise, dass die durch Elimination von ψ sich ergebende Gleichung für φ':

$$\sin\left(\beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e}\right) = \frac{a'\cos\varphi' - a\cos\varphi}{e}$$

eine allgemeine Auflösung nicht gestattet. Man erhält indessen eine Vorstellung von der Bewegungsart des Schiebers, indem man sich in einer Ebene die drei wellenförmigen Linien verzeichnet denkt, deren gemeinsame Abscissen $= \varphi$ und deren Ordinaten den drei Gliedern des Ausdruckes (1) von x gleich sind; die durch Interferenz dieser drei Wellensysteme entstehende Linie bildet Wellen von periodisch wechselnder Gestalt und Lage gegen die Abscissenaxe, indem, falls x' ein Maximum, x'' das vorhergehende oder folgende Minimum von x bedeutet, sowohl die Amplitude $= \frac{x' - x''}{2}$, als die Entfernung der Hubmitte vom Punkte $B = \frac{x' + x''}{2}$ für die auf einander folgenden Schwingungen des Punktes B' einem periodischen Wechsel unterliegt. Eine Periode, nach der dieselbe Gruppe von Schwingungen wiederkehrt, ist dann vollendet, wenn die Kette in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, wenn also

$$\varphi = n \,.\, 2\pi, \quad \varphi' = \alpha + n' \,.\, 2\pi, \quad \psi = \beta$$

geworden ist, unter n und n' die kleinsten ganzen Zahlen verstanden, die der fraglichen Bedingung Genüge leisten können. Die Substitution dieser Werthe von φ, φ' und ψ in Gl. (3) giebt aber:

$$0 = r'n' - rn, \quad \text{also } \frac{n}{n'} = \frac{r'}{r} = \frac{z'}{z},$$

unter z und z' die Zähnezahlen der Räder R und R' verstanden. Wäre z. B. $z = 18$, $z' = 26$, so würde die Periode $n = 13$ Umdrehungen von R und $n' = 9$ Umdrehungen von R' umfassen.

Näherungsweise liesse sich x durch φ ausdrücken, wenn a und a' sehr klein im Vergleich mit e wären. Es wäre dann ψ ein stets sehr kleiner Winkel und nach Gl. (3) bei Vernachlässigung von ψ und β:

$$\varphi' = \alpha + \frac{r}{r'}\varphi$$

sowie nach Gl. (1) mit $\cos\psi = 1$:

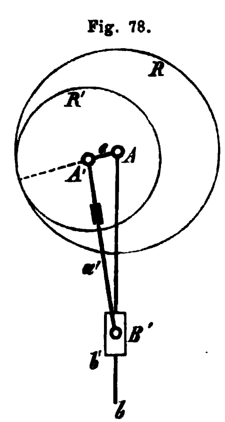
$$x = e + a\sin\varphi + a'\sin\left(\alpha + \frac{r}{r'}\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Von besonderen Fällen des Zahnexcentriks sind folgende hervorzuheben.

a) Mit $a' = 0$ wäre die gegenseitige Abhängigkeit der Bewegungen des Schiebers b' und der Kurbel a dieselbe wie bei der einfachen Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), so dass in dieser Hinsicht die Zahnräderkette R, e, R' eine unnütze Beigabe wäre und deshalb die Annahme $a' = 0$ weiter kein Interesse hat, als dass sie zeigt, wie die gewöhnliche Schubkurbel als Specialfall des allgemeineren Zahnexcentriks angesehen werden kann. Ebenso würde es sich im Falle $a = 0$ verhalten, wenn nicht b (wie mit Bezug auf Fig. 77 hier vorausgesetzt ist), sondern b' das festgestellte Glied wäre.

b) Um so bemerkenswerther ist (mit b als festgestelltem Gliede) der Specialfall $a = 0$. Ist dabei $e < a'$, so ist der Mechanismus ein besonderer Fall des oben unter 2) erwähnten Watt'schen Planetenräderwerkes. Auch ist er so zur Anwendung gekommen, dass R als Hohlrad ausgeführt wurde (Fig. 78), z. B. in dem Mechanismus zum Steuerruderbetriebe von Caird und Robertson, wobei die Steuerruderaxe coaxial mit dem Rade R verbunden ist, während der Antrieb durch Drehung des Gliedes e erfolgt. Da jeder Umdrehung dieses Gliedes, wie oben unter 2) nachgewiesen wurde, $\frac{e}{r}$ Umdrehungen des Rades R in demselben Sinne entsprechen, so kann dadurch, dass $r' = r - e$ nur wenig $< r$ gemacht wird, eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame erzielt werden. Dass jene Umdrehungszahl $= \frac{e}{r}$ des Rades R bei einer Umdrehung von e auch hier für inneren Eingriff gilt, ist leicht zu erkennen; denn einer Umdrehung von e entsprechen im umgekehrten Sinne eine relative Umdrehung von R' gegen e, also $\frac{r'}{r}$ relative Umdrehungen von R gegen e, somit

Fig. 78.



$$1 - \frac{r'}{r} = \frac{e}{r}$$

absolute Umdrehungen von R in einerlei Sinne mit e.

Während in diesem Falle $e < a'$ das Glied e um A rotirt, a' um B' schwingt und die Schublänge von $b' = 2e$ ist, hat im umgekehrten Falle $e > a'$ das Glied e eine schwingende Bewegung um A, a' eine rotirende um B' und ist die Schublänge von $b' = 2a'$. Der diesem letzteren Falle entsprechende Mechanismus ist es namentlich, der bei äusserem Eingriffe der

Räder und mit R als treibendem Gliede von Reuleaux als ein zu Pressen, Nietmaschinen, Lochmaschinen und dergl. u. A. geeignetes Getriebe empfohlen wurde. Im Vergleich mit einem gewöhnlichen Kurbelschubgetriebe gewährt es den Vortheil, dass das Rad R an einer beliebigen Stelle der treibenden Welle ohne Kröpfung derselben angebracht werden kann und dass es eine starke Koppelstange AA' unnöthig macht, wenn man die Räder R, R' mit längs ihren Axoiden abgedrehten Rändern sich berühren lässt, so dass der in solchen Fällen beträchtliche Druck ohne Vermittelung der Koppel von R gegen R' übertragen wird; da ferner die Schwingungszahl des Schiebers b' sich zur gleichzeitigen Umdrehungszahl des Rades R wie $r:r'$ verhält, so kann zugleich diesem Verhältnisse ohne anderweitige Uebersetzung, nur durch passende Wahl der Räder, ein gewünschter Werth gegeben werden.

c) Während die Annahme $a = a'$ für sich allein die Bewegung des Schiebers b' nicht wesentlich vereinfacht, weil ihre Periode nach wie vor mehrere (n resp. n') Umdrehungen der Räder R, R' um die excentrischen Axen B, B' umfasst, wird dagegen eine solche Vereinfachung herbeigeführt durch die Annahme gleich grosser (und dann natürlich in äusserem Eingriffe befindlicher) Räder: $r = r' = \frac{e}{2}$. Die Periode enthält dann nur eine Umdrehung jedes Rades ($n = n' = 1$), und es haben alle Schwingungen des Schiebers gleiche Amplitude $= \frac{x' - x''}{2}$ und gleiche Entfernung $= \frac{x' + x''}{2}$ des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte B, ebenso wie es für $a' = 0$ ($n = 1$) und für $a = 0$ ($n' = 1$) der Fall ist. Vor diesen unter a) und b) besprochenen Fällen ist aber der vorliegende dadurch ausgezeichnet, dass er durch blosse Aenderung des Winkels α (dadurch zu bewirken, dass die Räder an einer anderen Stelle in Eingriff gebracht werden) eine wesentliche Aenderung der Amplitude gestattet.

Im Allgemeinen lässt sich zwar auch mit $r = r'$ die veränderliche Entfernung $BB' = x$ noch nicht als eine entwickelte Function von φ (Fig. 77) ausdrücken. Werden aber ausserdem a und a' als klein im Vergleich mit r, somit

$$\frac{a}{r} = \varepsilon \text{ und } \frac{a'}{r} = \varepsilon'$$

als kleine Brüche angenommen, so findet man aus den Gleichungen (1) bis (3) bei Vernachlässigung kleiner Grössen von höherer als der zweiten Ordnung*:

* Siehe die oben citirte Abhandlung des Verfassers im Jahrgange 1858 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.



$$x = 2r\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2}\sin\varphi + \frac{\varepsilon'}{2}\left[\sin\omega + \left(\varepsilon'\cos\omega - \varepsilon\cos\varphi\right)\cos\omega\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\left(\varepsilon'\cos\omega - \varepsilon\cos\varphi\right)^2\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{mit } \omega = \varphi + \alpha - 2\beta,$$

und insbesondere bei vorläufiger Berücksichtigung nur kleiner Grössen erster Ordnung:

$$x = 2r\left(1 + \frac{\varepsilon\sin\varphi + \varepsilon'\sin\omega}{2}\right) \text{ mit } \omega = \varphi + \alpha.$$

Durch die Bestimmung des Maximum x' und Minimum x'' dieses Ausdruckes von x ergiebt sich die Amplitude der Schieberschwingungen:

$$\frac{x' - x''}{2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + 2\varepsilon\varepsilon'\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos\alpha}$$

am grössten $= a + a'$ für $\alpha = 0$,

am kleinsten $= \pm(a - a')$ für $\alpha = 180^0$,

am meisten veränderlich also im Falle $a = a'$, der deshalb als der zugleich einfachste sich zur Ausführung empfiehlt, wenn die in Rede stehende Abhängigkeit der Schwingungsweite des Schiebers vom Winkel α praktisch benutzt werden soll.

d) In diesem Falle $r = r'$, $a = a' = \varepsilon r$ ergiebt sich aus Gl. (5):

$$x = 2r\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2}\left[\sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2}{8}\left[3\cos^2(\varphi + \alpha) + 2\cos(\varphi + \alpha)\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\varphi\right) - \cos^2\varphi\right]\right\}$$

und daraus:

$$\frac{x' - x''}{2} = \pm 2a\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Der mit dem Winkel α hiernach sehr verschiedenen Schwingungsweite des Schiebers entsprechen auch etwas verschiedene Entfernungen

$$\frac{x' + x''}{2} = 2r\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte B. In dem Ausdrucke (6) für die Amplitude gilt das Zeichen $+$ oder $-$, jenachdem α kleiner oder grösser als der Werth ist, für welchen (mit der hier zu Grunde liegenden Annäherung) die Amplitude $=$ Null wird und für den man findet:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon^2}}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{27\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{27\varepsilon^2}}}\right) (8).$$

Von dieser Eigenschaft der in Rede stehenden Specialform des Zahnexcentriks, dass bei einem gewissen Werthe des Winkels α die excentrische Axe B' des Rades R' mit dem Schieber b' fast unbeweglich ist, kann eine nützliche Anwendung gemacht werden. Denkt man sich nämlich, während α den durch Gl. (8) bestimmten Werth hat, den Schieber mit der Axe B' festgestellt in der durch den Ausdruck (7) bestimmten Entfernung von B, während das Glied e beseitigt wird, so können die nun fest gelagerten Räder R, R' sich gegenseitig ihre Rotationsbewegung mittheilen, sofern nur ε hinlänglich klein ist und die Zähne hinlänglich lang, die Zahnlücken hinlänglich tief gemacht werden, um eine kleine Aenderung der Entfernung AA' ohne Störung des Eingriffes zu gestatten; und wenn das treibende Rad mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirt, so wird das andere in periodisch ungleichförmige Rotation versetzt ähnlich wie durch Ellipsenräder, nämlich durch Zahnräder mit elliptischen Polbahnen, deren feste Brennpunkte B, B' und deren Mittelpunkte A, A' sind.

Ist m das Verhältniss der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades, n das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen desselben, so stehen m, n und das Verhältniss $\varepsilon = \frac{a}{r}$ in den durch die Gleichungen (10) und (11), §. 22, dargestellten Beziehungen und erscheint es thunlich, etwa bis

$$n = 2, \text{ entsprechend } m = 3 \text{ und } \varepsilon = 0,2679$$

die Ellipsenräder durch excentrisch gelagerte kreisrunde Räder zu ersetzen, falls dieselben so in Eingriff gebracht werden, dass nach Gl. (7) und (8):

$$\alpha = 151^0\ 42' \text{ und } BB' = 1,0337 \,.\, 2\,r$$

ist. Jener Winkel α wird dabei freilich nur angenähert realisirt werden können, da er nicht stetig, sondern nur sprungweise geändert werden kann in um so kleineren Intervallen, je grösser die Zahnzahlen der Räder sind. —

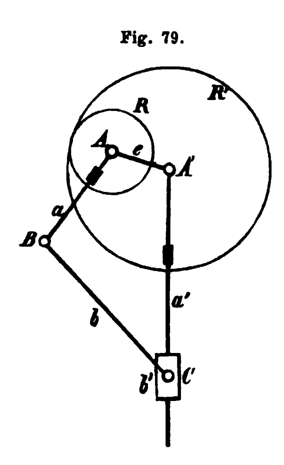
Wenn im Falle $r = r'$, $a = a'$ die Räder R, R' so in Eingriff gebracht werden, dass $\alpha = 0$ ist, dass also φ und φ' (Fig. 77) gleichzeitig $= 0$ sind, so bleibt offenbar AA' beständig parallel BB' und der Mechanismus, der deshalb mit Reuleaux das symmetrische Zahnexcentrik genannt werde, beständig symmetrisch in Bezug auf die Gerade, welche die Strecke AA' in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig schneidet. Der Punkt M des Gliedes b, in dem sich der Punkt B' in der Anfangslage ($\varphi = \varphi' = 0$) befindet, ist sein Schwingungsmittelpunkt; seine veränderliche Entfernung von demselben aber:

$$\xi = 2\,a\,sin\,\varphi.$$

Beschreibt man um A' mit dem Radius $A'B' = a$ einen Kreis K, so geht derselbe durch M, weil BM parallel und $= AA'$, also $A'M = AB = a$ ist, und wenn D' den zweiten Durchschnittspunkt dieses Kreises K mit der Geraden $A'B'$ bezeichnet, so ist $B'MD'$ ein rechter Winkel. Die Bewegung des Gliedes a' gegen b ist also einerlei mit der Bewegung der Strecke $B'D'$ im rechten Winkel $B'MD'$; der Kreis K mit dem Durchmesser $2a$ und ein Kreis um M als Mittelpunkt mit dem Radius $2a$ sind als sogenannte Cardanische Kreise (§. 12) die relativen Polbahnen beziehungsweise der Glieder a' und b, und alle Punkte des Kreises K bewegen sich in geraden Linien, nämlich in den verschiedenen Durchmessern des Kreises um M. Diese letztere Eigenschaft des symmetrischen Zahnexcentriks kann u. A. nützliche Verwendung finden.

4) Auch so ist die hier in Rede stehende Kette, Fig. 76, zur Ausführung gekommen, dass eins der Drehkörperpaare B, B' durch ein Prismenpaar ersetzt wurde; Fig. 79 stellt den Fall dar beispielsweise mit B' als Prismenpaar und innerem Eingriffe der Räder R, R'. Ist dabei a' das festgestellte Glied und $e < a + b$, so verhält sich auch dieser Mechanismus als eine Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel (e Kurbel, b' Schieber) ähnlich wie das Zahnexcentrik, Fig. 77, im Falle $a < e + a'$; wenn die Bewegung von der Kurbel ausgeht, so bewegt sich der Schieber nach einem ähnlich wie dort im Allgemeinen verwickelten Gesetze.

Fig. 79.



Bemerkenswerth ist der Specialfall, dass bei innerem Eingriffe der Räder (Fig. 79) $a = r = \frac{1}{2} r'$ gemacht wird. Der Punkt B als ein Punkt in der Peripherie des kleineren R von zwei Cardanischen Kreisen R, R' bewegt sich dann in einem Durchmesser des grösseren Kreises R'; bei Feststellung des Gliedes a' (mit dem Rade R') kann also der Mechanismus als Geradführung dienen und ist er als solche mehrfach in Benutzung. Wenn freilich nur die Beziehung zwischen dieser geradlinigen Bewegung des Punktes B und der Rotation der Kurbel e benutzt werden soll, so sind die Glieder b und b' überflüssig. Beim Wegfalle derselben geht der zusammengesetzte in einen einfachen Mechanismus über: einen Kurbelradmechanismus nach der Bezeichnung in §. 59, indem die Kette dadurch auf die einfache Zahnräderkette R, e, R' reducirt wird.

5) Die unter 2), 3) und 4) besprochenen Fälle können combinirt werden, wie es z. B. bei dem Flaschenzuge von Eade* geschehen ist. Seine kinematische Kette geht aus der in Fig. 78 schematisch dargestellten dadurch hervor, dass auch noch das Drehkörperpaar B' durch ein Prismenpaar ersetzt wird, und zwar so, dass dessen Schubrichtung zu der des Prismenpaares b, b' senkrecht ist; das Glied b' ist dann ein rechtwinkliger Kreuzschieber. Sind z und z' die Zahnzahlen der Räder R, R', so entsprechen bei Stellung auf b einer Umdrehung von e:

$$\frac{e}{r} = \frac{r - r'}{r} = \frac{z - z'}{z}$$

Umdrehungen von R. Bei der hier in Rede stehenden Ausführung hat R' nur einen Zahn weniger als R, so dass sich letzteres Rad auch nur um einen Zahn dreht bei einer vollen Umdrehung von e und somit eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame dadurch erreicht werden kann, entsprechend der Hebung einer bedeutenden Last durch eine Kraft von mässiger Grösse. Indem dabei die Kurbel e sehr klein ausfällt, ist sie nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als Excentrik gestaltet.

6) Endlich könnte man auch eins der Drehkörperpaare A, A' der Kette, Fig. 76, in ein Prismenpaar übergehen lassen, womit die Strecke AA' und also einer der Radien r, r' unendlich gross würde, so dass von den Rädern R, R' eins durch eine Zahnstange zu ersetzen wäre. Gleichzeitig könnte als Combination mit einem der unter 3) und 4) besprochenen Fälle auch das Paar C oder eins der Paare B, B' als Prismenpaar ausgeführt sein, indem nur nicht drei Prismenpaare in der Kette enthalten sein dürften, um sie nicht in eine ebene Prismenkette zu verwandeln. Auch kann als Combination mit dem Falle unter 2) immer dann $a = 0$ oder $a' = 0$ sein, wenn nicht A und B' oder A' und B zugleich Prismenpaare sind.

§. 63. Zusammengesetzte sphärische Zahnräderketten.

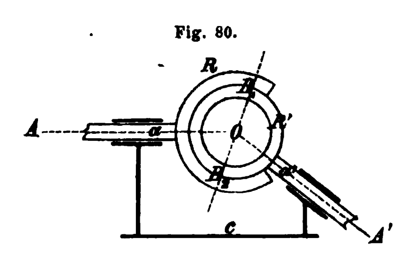
Ebenso wie nach vorigem §. eine ebene, kann auch eine sphärische Drehkörperkette mit $x + 4$ Gliedern dadurch zwangläufig gemacht werden, dass x mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder mit einfachen Zahnräderketten verbunden werden, die dann nur nicht cylindrische, sondern conische Räder enthalten. Ein elementar zusammengesetzter Mechanismus, dessen Kette auf solche Weise insbesondere aus einer sechs-

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1868, Tafel II.



gliedrigen sphärischen Drehkörperkette entstanden gedacht werden kann, ist z. B. das Blees'sche Universalgelenk, wobei zugleich das Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) in Anwendung gebracht, die Kette nämlich auf eine viergliedrige reducirt ist in Folge des Ersatzes von drei Drehkörperpaaren durch ein Kugelpaar. Dieser Mechanismus, welcher bezweckt, den Ungleichförmigkeitsgrad der Rotationsbewegung einer getriebenen Welle a' bei gleichförmiger Rotation der treibenden Welle a möglichst auf Null zu reduciren selbst bei grösseren spitzen Winkeln α, unter denen sich die Axen A und A' von a und a' im Punkte O (Fig. 80) schneiden (während bei dem gewöhnlichen Universalgelenk dieser Ungleichförmigkeitsgrad nach §. 46 einen beträchtlich von Null verschiedenen, mit α schnell wachsenden Werth hat), liegt die folgende Ueberlegung zu Grunde.

Fig. 80.



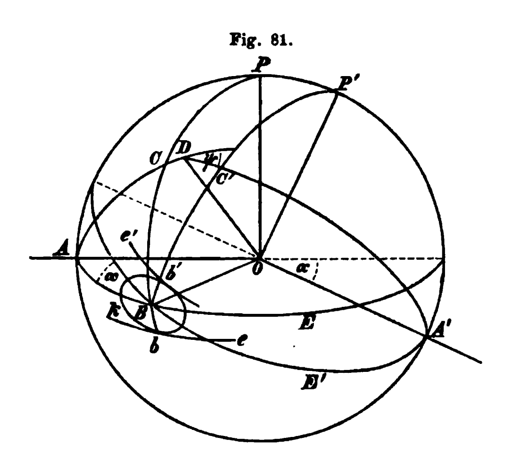
Wenn die Wellen a, a' um ihre Axen A, A' mit jeder Zeit gleichen Winkelgeschwindigkeiten relativ gegen den gemeinsamen Lagerkörper c (Fig. 80) als festgestelltes Glied rotirten, so würde die Durchschnittslinie B einer durch A gehenden und in a festen Ebene E mit einer durch A' gehenden und in a' festen Ebene E', falls sie in irgend einer Lage in der Ebene H enthalten wäre, die in der Halbirungslinie des Winkels AOA' normal zur Ebene AA' ist, beständig in dieser Ebene H bleiben, in derselben um den Punkt O rotirend. Wenn also umgekehrt a und a' durch einen Bolzen b von veränderlicher relativer Lage gegen a und a' so verbunden werden könnten, dass dessen Axe B (B_1OB_2 in Fig. 80) in der Ebene H um den Schnittpunkt O der Axen A, A' rotirt, so würden a und a' stets gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben.

Bei der Blees'schen Ausführung dieses Gedankens sind E, E' die Mittelebenen zweier Ringe R, R', mit denen die Wellen a, a' endigen und wovon der eine R den anderen R' umgreift, indem sich beide in einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte O berühren. R' ist ein geschlossener Ring, R aber so weit aufgeschnitten, wie das ungehinderte Spiel mit Rücksicht auf den Neigungswinkel α der Axen A, A' und die Dicke der Welle a' erfordert. An zwei diametral gegenüber liegenden Stellen B_1 und B_2 sind die Ringe längs ihren Mittelebenen E, E' geschlitzt auf solche Längen, dass der Bolzen b, indem seine Axe B mit der Durchschnittslinie der Ebenen E, E' zusammenfällt, stets in allen vier Schlitzen Raum zum Durchgange durch die Ringe findet. Um ihn aber zu nöthigen, diese Lage be-

ständig zu behalten, ist er bei B_1 und B_2 ringsum conisch verzahnt, so dass die Zahnflächen gegen O convergiren, und sind ebenso die inneren Flächen der Ringschlitze mit entsprechenden Zähnen versehen, jedoch nur einseitig und wechselweise auf entgegengesetzten Seiten des Bolzens, so dass diese vier Ringverzahnungen durch ihre Eingriffe mit den (doppelt so breiten) Zähnen des Bolzens diesen alle in gleichem Sinne um seine Axe drehen, während sich bei der Rotation der Wellen a, a' die Ebenen E, E' längs OB_1 und OB_2 in entgegengesetztem Sinne gegen einander bewegen. —

Um zu untersuchen, in welchem Grade der Zweck eines möglichst constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses der Wellen a, a' durch diesen Mechanismus erreicht wird, sei um O als Mittelpunkt mit dem Radius $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben, die von den Axen A, A' in den Punkten A, A' (Fig. 81), von den Mittelebenen E, E' der Ringe in den grössten Kreisen E, E', von der Bolzenaxe im Punkte B (und seinem hier nicht gezeichneten Gegenpunkte) als Schnittpunkt der grössten Kreise E, E', von den Theilrisskegeln (Axoiden) der Ringverzahnungen in den kleineren Kreisen e, e' und von dem Theilrisskegel des Bolzens in dem kleinen Kreise k geschnitten wird. Letzterer werde von e und e' in den Punkten b und b' berührt, und es sei der Winkel $BOb = BOb' = \beta$. Der Radius von k ist dann $= \sin\beta$, der Radius von e und $e' = \cos\beta$.

Fig. 81.



Es werde ausgegangen von derjenigen Lage als Anfangslage, in welcher E normal zur Axenebene AOA' ist, und es seien die Verzahnungen so in Eingriff gebracht, dass in dieser Lage zugleich E' und folglich auch die Bolzenaxe normal zur Axenebene ist; E und E', ebenso e und e' schneiden sich dann unter dem Winkel $\alpha =$ dem Neigungswinkel der Axen A, A'. Wird ferner in der Axenebene OP normal zu OA, OP' normal zu OA' gezogen, so dass in der Anfangslage P der Pol von E und e, P' der Pol von E' und e' ist, so liegen die Berührungspunkte b, b' beziehungsweise in den grössten Kreisen PB und $P'B$, deren Ebenen normal zu OA und OA' sind.

Wenn nun die Welle a mit den Ebenen E, e sich um den Winkel $\varphi = BC$ dreht, so sei $\varphi' = BC'$ der entsprechende Drehungswinkel von a' mit den Ebenen E', e', und ψ der Winkel, unter dem sich nach diesen Drehungen die Ebenen E, E' in OD (der Bolzenaxe) schneiden, ferner $CD = x$ und $C'D = x'$. Das sphärische Dreieck $AA'D$ hat dann die folgenden Seiten nebst gegenüber liegenden Winkeln:

$$AA' = \pi - \alpha, \qquad A'D = \frac{\pi}{2} + x', \qquad DA = \frac{\pi}{2} + x$$

$$D = \pi - \psi, \qquad A = \frac{\pi}{2} + \varphi, \qquad A' = \frac{\pi}{2} + \varphi'.$$

Zwischen ihnen bestehen drei von einander unabhängige Relationen:

$$\cos D = -\cos A \cos A' + \sin A \sin A' \cos (AA')$$

$$\frac{\sin D}{\sin (AA')} = \frac{\sin A}{\sin (A'D)} = \frac{\sin A'}{\sin (DA)}$$

oder

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$\frac{\sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{\cos \varphi}{\cos x'} = \frac{\cos \varphi'}{\cos x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Eine vierte Gleichung ergiebt sich aus folgender Erwägung. Dadurch, dass der Punkt B auf dem Kreise E um $CD = x$ fortrückt, bewegt sich der Berührungspunkt b von e und k im Sinne be (Fig. 81) um $x \cos \beta$ längs diesen zwei Kreisen, entsprechend einer Vergrösserung des Winkels zwischen e und e' um $\frac{x \cos \beta}{\sin \beta} = x \operatorname{cotg} \beta$, wenn unterdessen der Berührungspunkt b' von e' und k sich nicht geändert hätte. In der That ist aber letzterer im Sinne $b'e'$ um $x' \cos \beta$ längs e' und k fortgerückt, entsprechend einer Verkleinerung des Winkels zwischen e und e' um $x' \operatorname{cotg} \beta$, falls b ohne Lagenänderung geblieben wäre. Aus beiden Gründen zusammen hat sich also jener Winkel um $(x' - x) \operatorname{cotg} \beta$ verkleinert, und folgt daraus die Gleichung:

$$(x' - x) \operatorname{cotg} \beta = \alpha - \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Die Elimination von x, x' und ψ zwischen den 4 Gleichungen (1)—(3) liefert eine Beziehung zwischen φ', φ, α und β, somit dann auch das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Wellen a', a:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi}$$

als eine Function von φ mit den Constanten α, β. Einer Viertelumdrehung von a entspricht auch eine solche von a' der Art, dass sich $\frac{\omega'}{\omega}$ bei der

1ten, 3ten, 5ten ... Viertelumdrehung auf gleiche und zwar entgegengesetzte Weise ändert wie bei der 2ten, 4ten, 6ten ... Viertelumdrehung. Je kleiner dabei β ist, je grösser also $cotg\,\beta$, desto weniger sind x' und x nach Gl. (3), also φ' und φ nach Gl. (2), somit auch ω' und ω verschieden.

Ist β ein kleiner Bruch, so kann aus den Gleichungen (1)—(3) näherungsweise gefolgert werden:

$$\varphi' = \varphi - \eta;\quad \eta = \frac{(\alpha - 2\vartheta)\cos\varphi}{cotg\frac{\alpha}{2}\,cotg\,\beta + \sin\varphi\,tg\,\vartheta};\quad \sin\vartheta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi \quad . (4)$$

und findet man daraus beispielsweise für $tg\,\beta = 0{,}163$ (Werth von $tg\,\beta$ bei einem ausgeführten Modell) und

$$\begin{array}{lccl} & \alpha = 30^0 & \alpha = 45^0 & \\ max\frac{d\eta}{d\varphi} = & 0{,}0085 & 0{,}0198 & \text{bei nahe } \varphi = 33^0, \\ min\frac{d\eta}{d\varphi} = & -0{,}0229 & -0{,}0530 & \text{bei } \varphi = 90^0, \end{array}$$

also den Ungleichförmigkeitsgrad (§. 46):

$$\delta = max\frac{\omega'}{\omega} - min\frac{\omega'}{\omega} = max\frac{d\eta}{d\varphi} - min\frac{d\eta}{d\varphi} = \begin{cases} 0{,}0314 \text{ für } \alpha = 30^0 \\ 0{,}0728 \text{ für } \alpha = 45^0. \end{cases}$$

Für andere kleine Werthe von β ist er näherungsweise proportional $tg\,\beta$. Der Ungleichförmigkeitsgrad $\varDelta$ des gewöhnlichen Universalgelenkes ist nach §. 46, Gl. (5) erheblich grösser:

$$\varDelta = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} 9{,}2\,\delta \text{ für } \alpha = 30^0 \\ 9{,}7\,\delta \text{ für } \alpha = 45^0. \end{cases}$$

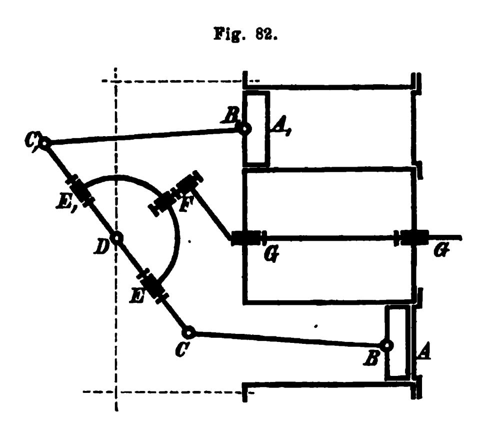
§. 64. Nicht elementare Mechanismen.

Wenn auch die Untersuchung der kinematischen Eigenschaften von nicht elementaren Mechanismen, wie schon in §. 60 bemerkt wurde, im Allgemeinen hier nicht beabsichtigt ist, so mögen doch an dieser Stelle schliesslich einige solche Mechanismen als Beispiele besprochen werden, um ihre Unterschiede von elementar zusammengesetzten deutlicher hervortreten zu lassen.

1) Um durch den in einem Dampfcylinder hin und her gehend bewegten Kolben AB, Fig. 82, eine Welle FG in stetige Rotation zu versetzen, deren Axe G mit der Cylinderaxe parallel ist, kann ein Hebel CD, dessen fest (in fester Verbindung mit dem Cylinder) gelagerte Drehungs-

axe D die Wellenaxe G rechtwinklig schneidet, einerseits durch die Koppel BC, deren Axen B, C parallel der Axe D sind, so mit dem Kolben, andererseits durch den Bügel EF, dessen Axen E, F, indem dabei D und E, E und F rechte Winkel bilden, durch den Schnittpunkt der Axen D, G gehen, so mit der Welle verbunden werden, dass dadurch ein zusammengesetzter Mechanismus $ABCDEFG$ entsteht, der indessen nicht elementar ist, da seine Kette in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden kann: in die Ketten der ebenen (allgemeinen) Schubschwinge $ABCD$ und der sphärischen Schwingkurbel $DEFG$.

Fig. 82.



Wenn die Schwinge CD über D hinaus verlängert und an der anderen Seite mittels einer Koppel C_1B_1 mit dem Kolben B_1A_1 eines zweiten Dampfcylinders verbunden wird, so kann ohne allzu ungleichförmige Rotation der Welle jeder dieser Dampfcylinder einfach wirkend, an der Koppelseite offen und der Mechanismus dann sehr compendiös gemacht werden durch unmittelbare Verbindung der Koppel mit dem Kolben ohne Kolbenstange. — Wenn auch dieselbe hier besprochene Bewegungsumwandlung durch einen elementaren, insbesondere sogar durch einen einfachen, z. B. durch den sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus nach Fig. 61, §. 48, erreichbar ist, so kann doch von praktischen Gesichtspunkten aus jener nicht elementare Mechanismus den Vorzug verdienen.

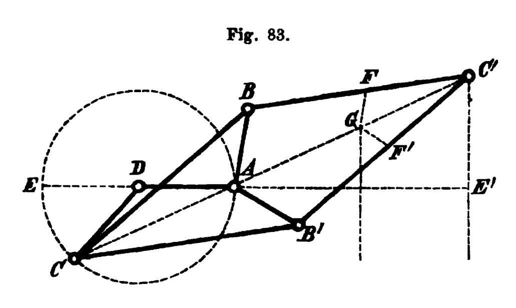
2) Um einen Punkt C' in gerader Linie (resp. eine Gerade C' nach einer zu ihr normalen Richtung in einer Ebene) zu führen durch Vermittelung eines ebenen Drehkörpermechanismus, dessen Paaraxen alle im Endlichen liegen, kann man den geometrischen Satz benutzen, dass, wenn man durch einen Punkt A in der Peripherie eines Kreises alle möglichen Secanten desselben zieht und, unter C ihre zweiten Schnittpunkte mit dem Kreise verstanden, die Punkte C' in ihnen so wählt, dass die Producte $AC.AC'$ gleich gross sind, alsdann der Ort der Punkte C' eine Gerade $C'E'$ und zwar normal zu dem durch A gehenden Durchmesser AE des Kreises ist; aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ACE und $AE'C'$ (Fig. 83) folgt nämlich:

$$AC : AE = AE' : AC', \text{ also } AC.AC' = AE.AE'.$$



Diese Bemerkung liegt der Peaucellier'schen Geradführung, Fig. 83, zu Grunde. Dieselbe besteht aus drei viergliedrigen, also zwangläufigen ebenen Drehkörperketten $ABCD, AB'CD, BCB'C'$, von denen die erste mit der zweiten die Glieder CD und DA, die erste mit der dritten das Glied BC, die zweite mit der dritten das Glied CB' gemein hat, und deren Gliedlängen so gewählt sind, dass

Fig. 83.



$$CD = DA,\ AB = AB',\ BC = CB' = B'C' = C'B$$

ist, während das Glied AD in solcher Lage festgestellt ist, dass seine Axenebene DA normal zu der Ebene $C'E'$ ist, in der die Axe C' geführt werden soll. Dass unter diesen Umständen die Punkte A, C, C' beständig in gerader Linie liegen, und dass C in dem durch A gehenden Kreise zum Mittelpunkte D geführt wird, ist ohne Weiteres einleuchtend; dass aber auch das Product $AC.AC'$ constant ist, folgt daraus, dass es gleich dem Producte der Abschnitte jeder anderen durch A gehenden Sehne des aus B als Mittelpunkt mit $BC = BC'$ als Radius beschriebenen Kreises, insbesondere also

$$= (CB + BA)(CB - BA)$$

= dem Producte der Abschnitte des durch A gehenden Durchmessers jenes Kreises ist. Bei der durch Fig. 83 angedeuteten Anordnung erscheint der Mechanismus als ein um die Axe A schwingender, aus 6 paarweise gleichen Stäben gebildeter Balancier von veränderlicher Form, dessen Endpunkt C' dadurch in einer Geraden sich zu bewegen genöthigt ist, dass der andere Endpunkt C in einem durch A gehenden Kreise geführt wird. Durch die punktirten Linien FG und $F'G$ ($BF = B'F'$, $FG = F'G$) ist angedeutet, wie es nur der Hinzufügung von je zwei weiteren gleich langen Gliedern bedarf, die bei G unter sich, bei F und F' mit den Gliedern BC' und $B'C'$ durch Drehkörperpaare verbunden sind, um ausser C' noch andere Punkte G in geraden Linien zu führen, die mit der Bahn des Punktes C' parallel sind, entsprechend aber solchen darin durchlaufenen Strecken (Hublängen), die sich zu der des Punktes C' verhalten

$$= AG : AC' = BF : BC'.$$

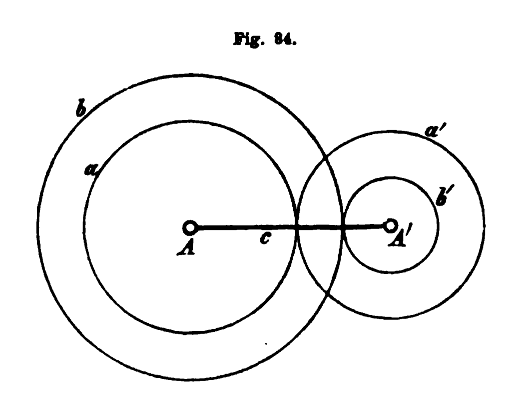
3) Von nicht elementaren Zahnrädermechanismen sind solche bemerkenswerth, deren viergliedrige Ketten aus zwei einfachen Zahnräderketten a, a', c und b, b', c so zusammengelegt sind, dass der Steg c ihnen gemeinsam

ist, die Räder a, b zusammenfallende Axen A, die Räder a', b' dagegen die gemeinsame Axe A' haben, indem sie zu einem Gliede fest verbunden sind: siehe Fig. 84 für den Fall einer ebenen solchen zusammengesetzten Kette; a und b sind binäre, $a'b'$ und c ternäre Glieder derselben. Mit Reuleaux kann sie als rückkehrende Räderkette bezeichnet werden, insofern sie bei der Reihenfolge

$$a, \; a'b', \; c, \; b$$

ihrer Glieder eine Rückkehr des letzten Gliedes b zur Axe A des ersten Gliedes a vermittelt.

Fig. 84.



Der durch die Stellung auf c hervorgehende Mechanismus, als rückkehrender Zahnrädermechanismus zu bezeichnen (entsprechend den für die Mechanismen aus der einfachen Zahnräderkette in §. 59 gewählten Namen), kann zur Vermittelung einer von der des Rades a verschiedenen Winkelbewegung des Rades b oder einer gewissen relativen Winkelbewegung von b gegen a dienen. Sind nämlich a, b, a', b' die Theilrisshalbmesser der gleich bezeichneten Räder, so hat die Winkelgeschwindigkeit ω_a des Rades a die in gleichem Sinne stattfindende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\omega_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

des Rades b zur Folge, also die relative Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b - \omega_a = \left(\frac{a}{a'}\frac{b'}{b} - 1\right)\omega_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

von b gegen a, positiv im Sinne von ω_a. Wenn insbesondere die Räder nicht nach Fig. 84 mit kreisförmigen Theilrissen, sondern als unrunde Räder ausgeführt werden, so aber, dass die Mittelwerthe von ω_a und ω_b einander gleich sind (wie es z. B. der Fall ist, wenn alle 4 Räder congruente elliptische Räder, a' und b' aber ungleich liegend verbunden sind), so erhält b gegen a eine zu verschiedenen Zwecken verwendbare oscillatorische relative Winkelbewegung.

Durch Feststellung des Rades a ergiebt sich ein Mechanismus, der analog den in §. 59 gewählten Bezeichnungen ein rückkehrender Kurbelradmechanismus genannt werden kann. Sind dabei ω_b und ω_c die Winkelgeschwindigkeiten des Rades b und der Kurbel c (ω_c absolut ver-

standen, ω_b aber positiv oder negativ, jenachdem der betreffende Drehungssinn mit dem der Kurbel übereinstimmend oder ihm entgegengesetzt ist), so folgt die Beziehung zwischen ω_b und ω_c aus der Bemerkung, dass dieser Mechanismus in den vorigen übergeführt wird durch seine Drehung um die Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega_c$, wodurch die Bewegung des Gliedes c aufgehoben wird. Indem aber dann die Winkelgeschwindigkeiten von a und b beziehungsweise $= -\omega_c$ und $= \omega_b - \omega_c$ würden, ist nach Gl. (1):

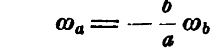
$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\left(-\omega_c\right),$$

also

$$\omega_b = \left(1 - \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\right)\omega_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Diese Formeln gelten allgemein für die verschiedenen Specialfälle solcher Räderwerke, wenn nur der Radius eines Hohlrades (Rades mit innerer Verzahnung) mit entgegengesetztem Zeichen in die betreffende Formel eingesetzt wird. Bemerkenswerth ist z. B. der Fall, dass (bei kreisförmigen Theilrissen) a ein Hohlrad ist, und dass die Räder a', b' einander gleich sind, somit zu einem einzigen mit a und b zugleich in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden können: Fig. 85. Mit c als festgestelltem Gliede ergiebt sich daraus u. A. ein bekanntes Gangspillgetriebe; wird dabei das Rad b mit der Winkelgeschwindigkeit ω_b gedreht, so folgt die Winkelgeschwindigkeit ω_a der innen verzahnten Kettentrommel aus Gl. (1) mit $-a$ statt a und mit $a' = b'$:

Fig. 85.



$$\omega_a = -\frac{b}{a}\omega_b.$$

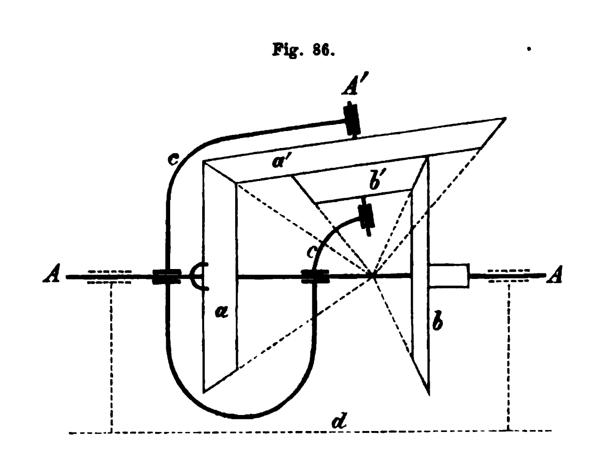
Es dreht sich also die Trommel mit einer im Verhältnisse $\frac{b}{a}$ kleineren Winkelgeschwindigkeit, und zwar, wie das Minus-Zeichen ausdrückt, im entgegengesetzten Sinne wie das Rad b. — Mit a als festgestelltem Gliede erhält man aus der Kette, Fig. 85, ein vielfach benutztes Göpelgetriebe, bei dem es umgekehrt darauf ankommt, die kleine Winkelgeschwindigkeit ω_c, womit das Glied c von dem Pferde umgedreht wird, mit Uebersetzung ins Schnelle auf die Welle des Rades b zu übertragen; die betreffende Winkelgeschwindigkeit ω_b derselben folgt aus Gl. (3) mit $-a$ statt a und mit $a' = b'$:



$$\omega_b = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\omega_c.$$

Wenn die hier besprochene rückkehrende Räderkette mit Kegelrädern statt mit Cylinderrädern ausgeführt wird, wie Fig. 86 schematisch darstellt (ohne das später zu besprechende, punktirt angedeutete Glied d, und indem b mittels einer Hülse lose drehbar zu denken ist um die mit a fest verbundene Welle), so ist zu berücksichtigen, dass bei überall äusserer Verzahnung und Feststellung des Gliedes c die coaxialen Räder a, b nicht, wie in Fig. 84, in gleichem Sinne, sondern in entgegengesetztem Sinne um die Axe A rotiren, so dass in Gl. (1) und somit auch in den daraus abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) der Factor $\frac{a}{a'}\frac{b'}{b}$ mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden muss, falls nach wie vor die Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_b, ω_c in der Weise algebraisch verstanden werden, dass gleiche Zeichen derselben einerlei Drehungssinne entsprechen.

Fig. 86.



4) Bei der so eben betrachteten rückkehrenden Räderkette waren die Glieder a, b mit dem Gliede c durch coaxiale Drehkörperpaare unmittelbar gepaart. Würde dazwischen ein weiteres Glied d eingefügt, das durch dergleichen coaxiale Drehkörperpaare mit den Rädern a, b und dem Gliede c, oder auch nur mit einem Theil dieser Glieder unmittelbar gepaart ist, so wäre die nun fünfgliedrige zusammengesetzte Kette zwar nicht mehr zwangläufig, dieser Mangel an Zwangläufigkeit indessen unwesentlich, wenn nicht etwa d als festgestelltes Glied oder anderweitig die relative Bewegung dieses Gliedes gegen ein anderes der Kette bei dem betreffenden Mechanismus benutzt werden soll. Bei dem Mechanismus aber, der durch Feststellung des Gliedes d aus der Kette hervorgeht, kann die Zwangläufigkeit dadurch wieder hergestellt werden, dass zwei der Glieder a, b, c gleichzeitig und unabhängig von einander gedreht werden, etwa a und c mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_a und ω_c; der Mechanismus ist dann als Inter-



ferenzmechanismus zu bezeichnen, insofern die Winkelgeschwindigkeit ω_b des Rades b sich als Resultat der Interferenz jener zwei unabhängigen Winkelgeschwindigkeiten ω_a und ω_c ergiebt. Die betreffende Beziehung folgt aus Gl. (1) mit Rücksicht darauf, dass jetzt $\omega_a - \omega_c$ und $\omega_b - \omega_c$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten von a und b gegen c sind:

$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}(\omega_a - \omega_c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Darin sind wieder die Radien etwaiger Hohlräder mit negativen Vorzeichen einzusetzen; auch ist wieder der aus diesen Radien gebildete Factor im Falle von Kegelrädern (Fig. 86) entgegengesetzt zu nehmen, so dass dann die Beziehung lautet:

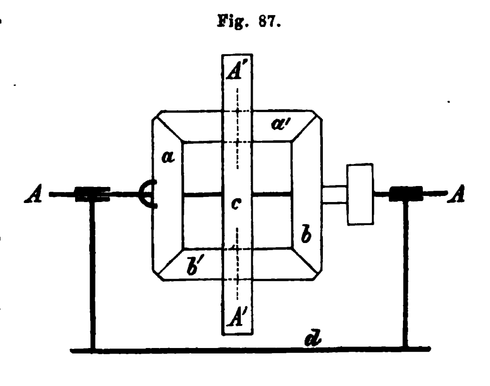
$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}(\omega_c - \omega_a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Dieser letztere Mechanismus ist es namentlich, der bei gewissen Spinnmaschinen Anwendung findet, und zwar so, dass $a = b$ und $a' = b'$, folglich nach Gl. (5):

$$\omega_a + \omega_b = 2\,\omega_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ist. Die Axen A und A' sind dann rechtwinklig gegen einander gerichtet, und können a', b' zu einem einzigen zugleich mit a und b in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden, statt dessen jedoch der Symmetrie halber zwei gleiche Räder a', b' benutzt zu werden pflegen, die auf entgegengesetzten Seiten der Axe A zugleich mit a und b in Eingriff und in dem als Cylinderrad ausgeführten Gliede c um die Axe A' drehbar sind. Fig. 87 stellt diesen Mechanismus schematisch dar, unter AA eine Welle verstanden, auf der das Rad a fest sitzt, während b und c lose darauf drehbar sind; durch ein Rad auf der Hülse des Rades b kann seine Drehung weiter fortgepflanzt werden, wogegen die Räder a und c ihre Drehungen beziehungsweise durch die Welle AA und durch die Verzahnung von c empfangen.

Fig. 87.



5) Als besonders artenreiche Gruppe von nicht elementar zusammengesetzten Mechanismen sind solche zu erwähnen, bei denen Flüssigkeiten zur Gliedbildung benutzt werden, namentlich in der Weise, dass die Bewegung der betreffenden Maschine von dieser Flüssigkeit ausgeht (Kraft-

maschine) oder dass umgekehrt die Ortsänderung der Flüssigkeit durch die Maschine bezweckt wird (Pumpe). Dabei wird die zusammengesetzte Kettenbildung im Allgemeinen durch einen Hülfsmechanismus so vermittelt, dass ein Glied desselben als Kapsel (Hohlkörper), ein anderes als ein damit gepaarter Kolben gestaltet wird, während beide mit der Flüssigkeit durch kraftschlüssige Paarung eine Kette bilden, die sich mit der Kette jenes Hülfsmechanismus zu einer nicht elementaren Kette zusammensetzt. Als Hülfsmechanismus kann insbesondere z. B. ein einfacher Zahnrädermechanismus oder ein viergliedriger Drehkörpermechanismus dienen, ersteren Falles so, dass der Steg als Kapsel, die Zahnräder als Kolben auf verschiedene Weise ausgebildet werden, wogegen im anderen Falle eine grössere Mannigfaltigkeit je nach der Art des Drehkörpermechanismus und der Wahl seiner als Kapsel und als Kolben auszubildenden Glieder stattfinden kann.

Wenn im Falle einer solchen Pumpe im weiteren Sinne des Wortes durch Ventile oder Schieber ein periodisches Oeffnen und Schliessen des Kapselraumes vermittelt wird, so kommt die aus dieser sogenannten Steuerung, aus der Kapsel, dem Kolben und der Flüssigkeit gebildete Kette ganz analog einem Schaltwerke (§. 58) zur Wirkung, so dass die betreffende Pumpe mit Reuleaux nicht unpassend ein Flüssigkeitsschaltwerk genannt werden kann. So entspricht z. B. bei der gewöhnlichen Wasser-Saug- und Hebepumpe mit Ventilkolben das Bodenventil der Sperrklinke c', das Kolbenventil der Schaltklinke c, der Kolben selbst dem hin und her bewegten Schaltschieber d, das Wasser der Klinkstange a, der Pumpencylinder dem festgestellten Gliede d' eines Schaltwerkes, wie es aus Fig. 73 entstanden zu denken ist durch den Uebergang des Drehkörperpaares A in ein Prismenpaar, des Klinkrades a in eine Klinkstange und der Schaltschwinge d in einen Schaltschieber. Die beiden Flüssigkeitsgesperre, aus denen beziehungsweise als Schaltung und als Sperrung das Flüssigkeitsschaltwerk zusammengesetzt ist, sind laufende oder ruhende Gesperre im Sinne der Bezeichnungen in §. 58, jenachdem sie mit Ventilen gebildet sind, die selbstthätig durch den Flüssigkeitsstrom geöffnet, durch Schwerkraft oder Federkraft geschlossen werden, oder aber mit Schiebern (auch mit entlasteten Ventilen), die kettenschlüssig zwangläufig bewegt werden. Letzteres ist namentlich dann nöthig, wenn die Bewegung von der Flüssigkeit ausgeht, also bei hydraulischen Kraftmaschinen von der hier in Rede stehenden Art (Wassersäulenmaschinen, Kolbendampfmaschinen etc.), die als rückläufige Flüssigkeitsschaltwerke bezeichnet werden können. —

Die besprochenen Beispiele lassen erkennen, wie die Bildung zusammengesetzter Mechanismen wesentlich durch den Zweck bedingt ist, der



dadurch erreicht werden soll, bestehend bei den Beispielen unter 1) in der Verwandlung der gegebenen Bewegungsart eines Gliedes in eine andere Bewegungsart eines anderen Gliedes, unter 2) in der an gewisse Bedingungen geknüpften Erzielung einer bestimmten Bahn, die von einem gewissen Körperpunkte durchlaufen werden soll, unter 3) in der Verwandlung einer gegebenen Bewegungsart (dort Rotation um eine gewisse Axe) in eine eben solche (Rotation um dieselbe Axe) mit anderer Geschwindigkeit, unter 4) in der Zusammensetzung verschiedener Bewegungen zu einer resultirenden Bewegung, unter 5) in der Förderung einer Flüssigkeit oder in ihrer Benutzung als Arbeitsflüssigkeit einer Kraftmaschine. Noch mannigfaltiger, als solche Zwecke selbst, sind die möglichen Arten ihrer Erfüllung, so dass eine allgemeine und erschöpfende synthetische Entwickelung von dergleichen nicht elementaren Mechanismen kaum thunlich erscheint. Eine mit Bezug auf technische Anwendungen beschränkte, in erster Reihe vom Zwecke, sowie event. von der Form des zum Betriebe disponiblen Arbeitsvermögens ausgehende Uebersicht derselben und ihre Besprechung mit Rücksicht auf die Vollkommenheit und Einfachheit der Erreichung des Zweckes, mit Rücksicht ferner auf die Anforderungen der praktischen Ausführung und des Betriebes, auch auf die Wirthschaftlichkeit der Benutzung des disponiblen Arbeitsvermögens, ist aber theils als Aufgabe der Technologie und des Maschinenbaues zu betrachten, theils in die einzelnen folgenden Abschnitte der theoretischen Maschinenlehre zu verweisen, wenigstens so lange die synthetische Entwickelung und systematische Uebersicht selbst der elementaren Mechanismen, als Grundlage jener weiteren Aufgabe, einstweilen nur so unvollständig durchgeführt ist, wie aus dem Vorhergehenden sich ergeben hat.

B. Allgemeine Bewegungswiderstände.

§. 65. Einleitende Erklärungen.

Die auf die Glieder eines Getriebes wirkenden äusseren Kräfte können unterschieden werden als active oder treibende Kräfte, als passive Kräfte oder Widerstände und als indifferente Kräfte, jenachdem ihre Arbeiten bei der Bewegung des Getriebes positiv, negativ oder Null sind. Diese Charaktere sind also nicht den Kräften an sich eigenthümlich, sondern davon abhängig, wie sie an dem betreffenden Getriebe zur Wirkung kommen; so kann die Schwerkraft ebensowohl treibende Kraft (z. B. bei



hydraulischen Kraftmaschinen u. s. f.) wie Widerstand (z. B. bei Hebemaschinen) oder indifferente Kraft (z. B. als Gewicht einer Transmissionswelle) oder auch abwechselungsweise das Eine oder Andere sein (als Schwere eines periodisch auf- und niedergehenden Gliedes).

Die Widerstände sind theils primäre oder Nutzwiderstände, theils secundäre oder Bewegungswiderstände, jenachdem sie durch den Zweck des Getriebes (als Maschine oder als Theil einer solchen) unmittelbar oder aber mittelbar durch die Art und Weise bedingt werden, wie die Erreichung dieses Zweckes durch das Getriebe vermittelt wird. Sofern es eine der wesentlichsten Aufgaben der theoretischen Maschinenlehre ist, die Bedingungen zu untersuchen, unter denen das zum Betriebe einer Maschine disponible Arbeitsvermögen möglichst vollkommen nutzbar, d. h. zur Ueberwindung der Nutzwiderstände zu verwerthen ist, sowie die Grösse des unter gegebenen Umständen erreichbaren Vollkommenheitsgrades solcher Verwerthung (des sogen. Wirkungsgrades) nachzuweisen, ist es hier am Platze, diese Bewegungswiderstände, die stets einen gewissen Theil jenes disponiblen Arbeitsvermögens zu ihrer Bewältigung in Anspruch nehmen, wenigstens die allgemeiner vorkommenden derselben einer zusammenfassenden Besprechung zu unterwerfen. Sie sind theils von den Nutzwiderständen abhängig und zwar wachsend mit denselben (namentlich in Folge des dadurch vermehrten Druckes zwischen den Elementen der betreffenden Elementenpaare), theils werden sie unabhängig vom Nutzwiderstande entweder durch die Bewegung der Maschine an und für sich verursacht (z. B. der Luftwiderstand, überhaupt der Widerstand des Mediums, in dem sich die Maschine oder einzelne bewegte Glieder derselben befinden) oder zugleich durch indifferente Kräfte (z. B. die Kolbenreibung und die Reibung der Schwungradwelle einer Dampfmaschine u. s. f.). Sind M und μN die Arbeiten, die in einer gewissen Zeit zur Ueberwindung beziehungsweise der vom Nutzwiderstande unabhängigen und der damit wachsenden Bewegungswiderstände aufzuwenden sind, unter N die Arbeit des Nutzwiderstandes selbst verstanden, so ist die erforderliche Betriebsarbeit (Arbeit der treibenden Kräfte) für dieselbe Zeit:

$$L = M + (1 + \mu) N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Alle Bewegungswiderstände werden veranlasst durch relative Bewegungen entweder der Theile eines und desselben Kettengliedes, oder der Elemente eines Elementenpaares an ihrer Berührungsstelle gegen einander, oder von Kettengliedern gegen das umgebende Medium. Die letzteren Widerstände sind meistens von untergeordneter Grösse und übrigens nach den Gesetzen der Hydraulik zu beurtheilen, insbesondere, was den hier



vorzugsweise in Betracht kommenden Widerstand der Luft betrifft, nach §. 156 des I. Bandes. Die durch innere relative Bewegungen, nämlich durch die Deformation von Kettengliedern veranlassten Bewegungswiderstände können bei der Verwendung von bildsamen Körpern, insbesondere von Zug- oder Druckkraftorganen (§. 28) als Kettenglieder zwar unter Umständen von wesentlicher Bedeutung sein, doch sind von allgemeinstem Vorkommen und erheblichstem Einflusse solche, die durch die relativen Bewegungen der Elemente von Elementenpaaren veranlasst und als Reibungswiderstände im engeren Sinne bezeichnet zu werden pflegen. Nur von ihnen und zwar mit Bezug auf feste Körper wird (ausser von dem inneren oder Deformationswiderstande der Zugkraftorgane) hier die Rede sein, da in Betreff der äusseren und inneren Reibung von Flüssigkeiten als Druckkraftorganen auf die Gesetze der Hydraulik im I. Bande zu verweisen ist.

Was überhaupt die relative Bewegung einer Körperoberfläche (Elementenfläche) E gegen eine andere E' betrifft, so ist sie identisch mit der absoluten Bewegung von E, die dadurch hervorgeht, dass beiden Flächen zu ihren schon vorhandenen noch eine gemeinschaftliche, derjenigen von E' entgegengesetzte Bewegung mitgetheilt und somit E' in Ruhe versetzt wird. Sollen dabei E und E' beständig einander berühren und zwar, wie zunächst angenommen werde, in einem Punkte P, P' (P der Fläche E, P' der Fläche E' angehörig und mit P zusammenfallend), so kann jede unendlich kleine Elementarbewegung von E im Allgemeinen zerlegt werden in eine Gleitung längs einer gemeinsamen Tangente der Flächen und in eine Drehung um eine durch den Berührungspunkt P, P' gehende Axe, letztere wieder in zwei Drehungen beziehungsweise um die gemeinsame Normale und eine gemeinsame Tangente der Flächen. Hiernach zerfällt die Elementarbewegung im Allgemeinen in eine gleitende, bohrende und rollende (wälzende).

Die bohrende Bewegung ist dadurch charakterisirt, dass E und E' sich beständig mit denselben Punkten P und P' berühren, während eine durch P gehende Linie in E und eine durch P' gehende Linie in E' sich unter veränderlichem Winkel schneiden.

Bei gleitender Bewegung ist von den Berührungspunkten P und P' der Flächen E und E' nur der eine, etwa P unveränderlich, der andere P' aber nach und nach in den stetig auf einander folgenden Punkten einer Linie p' in E' gelegen, und es wird diese Linie p' von einer durch P gehenden Linie in E stets unter demselben Winkel geschnitten. Wäre letzteres nicht der Fall, so wäre die Bewegung eine bohrend-gleitende.



Die rollende Bewegung ist dadurch charakterisirt, dass die Berührungspunkte P und P' beziehungsweise in E und E' gewisse Linien p und p' durchlaufen der Art, dass 1) je zwei sich entsprechende (von P und P' gleichzeitig durchlaufene) Bögen PQ, $P'Q'$ derselben gleich lang sind, und dass 2) die Flächen E, E' in den Linien p, p' von abwickelbaren Flächen berührt werden können, deren entsprechende erzeugende Gerade PR, $P'R'$ die Linien p, p' unter gleichen Winkeln schneiden und von den folgenden entsprechenden Erzeugenden QR, $Q'R'$ in den Punkten R, R' der Wendecurven jener abwickelbaren Flächen stets so geschnitten werden, dass $PR = P'R'$ ist. Wäre diese Bedingung unter 2) nicht erfüllt, so wäre die relative Bewegung eine bohrend-rollende; wären entsprechende Bogenelemente PQ, $P'Q'$ der Linien p, p' nicht gleich lang, so wäre sie gleitend-rollend; fände beides nicht statt, so läge damit der allgemeine Fall einer bohrend-gleitend-rollenden Bewegung vor.

Berühren sich E und E' in einer Linie p, p' (p in E, p' in E' liegend und mit p zusammenfallend), so ist in den verschiedenen Punkten derselben die Art der relativen Bewegung im Allgemeinen verschieden. Bohrend kann die Bewegung nur in einem Punkte P, P' sein; in den übrigen Punkten der Berührungslinie ist sie dann gleitend, und zwar senkrecht zur Bohrungsaxe (der gemeinsamen Normale von E und E' im Punkte P, P') gerichtet, der Grösse nach proportional dem Abstande von dieser Axe. Dieselbe Curve der einen Fläche, z. B. p in E, fällt mit stets anderen congruenten Curven p' in E' zusammen, die sich alle in P' schneiden, und ist dann also E', so weit diese Curven p' reichen, eine Umdrehungsfläche. — Gleitend in solcher Weise, dass in allen Punkten der Berührungslinie p, p' die Gleitungen gleich gerichtet und gleich gross sind, kann die relative Bewegung dann sein, wenn die eine der beiden Flächen, etwa E', durch Translationsbewegung der Linie p entstanden gedacht werden kann, längs welcher sie von der anderen Fläche E in den wechselnden Linien p' berührt wird. — Rollend kann die Bewegung im Allgemeinen nur in einem Punkte sein, während sie in den übrigen Punkten der Berührungslinie dann gleitend-rollend ist. Diese gleitend-rollende Bewegung kann in allen Punkten der Berührungslinie gleich sein, wenn E und E' geradlinige Flächen sind, die sich stets in einer gemeinschaftlichen geraden Erzeugungslinie p, p' berühren, längs welcher die elementare Gleitung und um welche die elementare Drehung stattfindet. Sind E und E' abwickelbare Flächen, so kann die relative Bewegung eine für alle Punkte der geraden Berührungslinie gleiche rollende Bewegung sein, und sind dann die gleichzeitig abgewickelten Flächenelemente von E und E' stets einander gleich.



Berühren sich endlich E und E' in einer Fläche, so ist die Bewegung im Allgemeinen nur gleitend; die bohrende Bewegung ist wieder nur in einem Punkte, die rollende dagegen nur vorübergehend in Punkten des Umfanges der Berührungsfläche möglich.

Zwei Körper, die einen gegenseitigen Druck auf einander ausüben, berühren sich, da sie nie absolut starr sind, streng genommen stets in einer Fläche. Was dabei als eine bohrende Bewegung erscheint, ist eigentlich eine Gleitung, die in den verschiedenen Punkten jener Berührungsfläche senkrecht gegen die Perpendikel auf die Drehungsaxe gerichtet und denselben proportional ist. Die scheinbar rollende Bewegung ist eine stetige Folge von Drehungen um Berührungslinien der auf einander folgenden Berührungsflächen und wegen der wechselnden Deformationen beider Körper sowohl mit Gleitung und Reibung an ihren sich berührenden Oberflächen wie auch, den relativen Bewegungen im Innern der Körper entsprechend, mit inneren Reibungen verbunden.

Die Arbeitsverluste durch Bewegungswiderstände bei einer in Betrieb befindlichen Maschine nach vorstehenden Andeutungen einzeln und vollständig in Anschlag zu bringen, ist meistens unthunlich theils wegen mangelnder Kenntniss der dazu nöthigen Erfahrungswerthe, theils wegen übergrossen Zeitaufwandes, der dazu erforderlich wäre und weder dem erreichbaren Genauigkeitsgrade noch der beschränkten Wichtigkeit des Resultates entsprechen würde. In der Regel muss man sich vielmehr mit erfahrungsmässiger Schätzung der Werthe von M und μ in Gl. (1) für die verschiedenen Arten von Maschinen begnügen, besonders dann, wenn ihre Bewegungswiderstände von sehr mannigfaltiger und grossentheils von besonderer, der betreffenden Maschine eigenthümlicher Art sind. Insoweit sie aber von mehr einfacher und allgemeiner Art und dabei von erheblichem Einflusse sind, kann eine eingehendere Berechnung derselben doch thunlich und nützlich sein, und gilt das namentlich von denjenigen, welche durch die drei zwangläufigen niederen Elementenpaare, also durch Prismenpaare, Drehkörperpaare (insbesondere als Zapfenreibung von Wellen in ihren Lagern) und durch Schraubenpaare, sowie auch von solchen, die durch die vorzugsweise zu kinematischer Kettenbildung verwendeten höheren Elementenpaare veranlasst werden, nämlich durch Zahnräderpaare, Walzenpaare (Reibungsräder- oder Rollenpaare) und durch Elementenpaare mit Zugkraftorganen, während dergleichen mit Druckkraftorganen, insbesondere als mit Hohlcylindern (Röhren) gepaarte Flüssigkeiten vorkommend, solche Widerstände verursachen, die nach hydraulischen Gesetzen zu beurtheilen sind und deshalb hier ausser Betracht bleiben. Widerstände



der genannten Gruppen von Elementenpaaren sind es vorzugsweise, die den gesammten mit einem Maschinenbetriebe verbundenen Arbeitsverlust bedingen und deshalb im Folgenden in nähere Untersuchung gezogen werden sollen, nachdem vorher die ihnen zu Grunde liegenden allgemeinen Reibungsgesetze im nächsten Paragraph besprochen sein werden.

§. 66. Reibungsgesetze im Allgemeinen.

Wenn zwei feste Körper sich in einer gewissen Fläche berühren, sei es in Folge ihrer Form (wie z. B. bei den Elementen eines Umschlusspaares) oder in Folge ihrer Deformation durch den gegenseitigen Normaldruck, so kommt die Reibung im engeren Sinne nur als Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung der Körper in Betracht, d. i. in Bezug auf die Bewegung des einen Körpers gegen den anderen als eine Kraft, die dieser Bewegung in der Berührungsfläche gerade entgegen gerichtet ist.*

* Wenn Reuleaux in einer Anmerkung zu seiner „theoretischen Kinematik“ (S. 599) die allgemein übliche Auffassung der Reibung als Widerstand für praktisch und wissenschaftlich unrichtig, für einen der logischen Klarheit ermangelnden Rest altererbter Auffassung der Mechanik erklärt, da man bei „Verfeinerung der Untersuchung“ finde, dass in jedem Falle die Reibung sowohl Bewegung verhindere wie solche erzeuge, so beruht dieses absprechende Urtheil theils auf dem Missverständnisse, als ob die Bezeichnung einer Kraft als Widerstand etwas dieser Kraft an und für sich Eigenthümliches ausdrücken solle, theils aber auch auf der Ausserachtlassung wirklich verfeinerter Anschauungen heutiger Naturwissenschaft. Wenn z. B. geltend gemacht wird, dass die Kolbenreibung einer Dampfmaschine deshalb kein Widerstand sei, weil der ihr entsprechende Verlust an lebendiger Kraft der Dampfwärme und somit der Leistung der Maschine wieder zu Gute komme, so bleibt damit doch diese Reibung ein Widerstand mit Bezug auf die bewegten Massen der Maschine und ist es übrigens nicht nur von der Reibung, sondern von allen Kräften gültig, dass jede Arbeit einer solchen den Uebergang von Arbeitsvermögen in eben solches von derselben oder von anderer Erscheinungsform, jedenfalls aber von gleicher Grösse vermittelt. Nach einem die heutige Naturwissenschaft beherrschenden Fundamentalgesetze ist eben die Gesammtgrösse des im Weltall vorhandenen Arbeitsvermögens unveränderlich, wie auch die Formen desselben, durch die Arbeiten von Kräften vermittelt, in beständiger gegenseitiger Umwandlung begriffen sein mögen. Als solche Formen des Arbeitsvermögens sind zu unterscheiden: äusseres und inneres freies und gebundenes Arbeitsvermögen. Unter einem freien Arbeitsvermögen (gewöhnlich als lebendige Kraft bezeichnet) ist ein solches zu verstehen, das eine bewegte Masse vermöge ihrer Bewegung besitzt, unter gebundenem aber ein solches, welches einer Gruppe von Massen in Folge ihrer relativen Lagen und der zwischen ihnen wirksamen Kräfte inne-



Ihre Grösse ist vor Allem von der des Normaldruckes Q abhängig und zwar wachsend mit demselben, weshalb sie $= \mu Q$ gesetzt zu werden pflegt, unter μ den sogenannten Reibungscoefficienten verstanden. Ist $\mu = tg \varrho$, so heisst ϱ der Reibungswinkel, indem er derjenige Winkel ist, unter welchem eine den einen Körper gegen den anderen in der Berührungsfläche drückende Kraft P wenigstens gegen die gemeinsame Normale geneigt sein muss, um entgegen der Reibung seine gleitende Bewegung einleiten oder beschleunigen zu können. Wäre nämlich dieser Winkel $= \varphi$, so wäre die auf Gleitung wirkende Kraftcomponente $= P \sin \varphi$, der Normaldruck $= P \cos \varphi$, also die Reibung $= \mu P \cos \varphi$, und somit der Ueberschuss jener activen über diese passive Kraft

$$= P(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

nur dann positiv, wenn $tg\, \varphi > \mu$, also $\varphi > \varrho$ ist.

---

wohnt. Dieses wie jenes kann weiter als äusseres und inneres unterschieden werden; ebenso nämlich wie das äussere freie Arbeitsvermögen einer als solche wahrnehmbaren Bewegung entspricht, d. h. einer Bewegung, bei der die materiellen Punkte des betreffenden Körpers Wege von messbarer Länge durchlaufen, das innere dagegen den hypothetischen, als solche nicht wahrnehmbaren und messbaren relativen Bewegungen der die Körper constituirenden Atome, kommt das äussere gebundene Arbeitsvermögen Systemen von messbaren Massen zu vermöge ihrer relativen Lagen in gegenseitigen Entfernungen von messbaren Grössen, das innere den Körpern selbst vermöge der relativen Lagen ihrer sie constituirenden hypothetischen Atome und der zwischen diesen wirksamen Kräfte. So wird in dem obigen Falle des Dampfkolbens durch die Reibung eine Verwandlung von äusserem in inneres freies Arbeitsvermögen (Wärme) vermittelt. In anderen Fällen hat die Reibung eine zusammengesetztere, mehr mittelbare Wirkung, wie z. B. in dem von Reuleaux gleichfalls angeführten Falle der durch den Geigenbogen angestrichenen Saite, wobei sie es möglich macht, dass äussere lebendige Kraft vom Bogen auf die Saite übergehen kann, nicht aber ohne Verlust, da zugleich ein der Reibungsarbeit gleicher Theil der lebendigen Kraft des Bogens in innere lebendige Kraft, d. i. inneres freies Arbeitsvermögen (Wärme) verwandelt wird. Letzteres, nämlich die Verwandlung von äusserem in inneres Arbeitsvermögen (in freilich meist untergeordnetem Grade auch gebundenes inneres Arbeitsvermögen, insbesondere z. B. mit Rücksicht auf die Abnutzung der sich reibenden Körper) ist unter allen Umständen der unmittelbare Erfolg von Reibungsarbeit, und insofern unter Arbeit, Arbeitsvermögen und lebendiger Kraft schlechtweg in der Mechanik und Maschinenlehre allgemein äussere Arbeit, äusseres Arbeitsvermögen resp. äussere lebendige Kraft verstanden zu werden pflegt, kann man sagen, dass mit Reibung stets ein Verlust von Arbeit resp. äquivalenter lebendiger Kraft verbunden ist. Auf zwei in relativ gleitender Bewegung begriffene Körper wirkt sie zwar in entgegengesetztem Sinne, auf jeden aber als relative Widerstandskraft, nämlich im umgekehrten Sinne seiner relativen Bewegung gegen den anderen.

Mittelwerthe von μ, insbesondere gemäss den umfassenden Versuchen von Morin, finden sich in technischen Taschenbüchern angegeben. Erfahrungsmässig ist übrigens dieser Coefficient abhängig

1) von der materiellen Beschaffenheit der sich reibenden Körper (gleichartigen Körpern entspricht im Allgemeinen ein grösseres μ, als ungleichartigen),

2) von ihrer Oberflächenbeschaffenheit sowohl an und für sich (wachsend mit der Rauhigkeit), als in Bezug auf die Bewegungsrichtung (insbesondere z. B. bei Hölzern, überhaupt bei faserigen Körpern),

3) von der Beschaffenheit einer zwischen den Reibungsflächen etwa vorhandenen flüssigen oder weichen Substanz (Wasser, Oel, Fett, Seife), die den Werth des Coefficienten μ um so ausschliesslicher bestimmt, in je dickerer Schicht sie vorhanden und je kleiner der specifische Druck (Druck pro Flächeneinheit) ist, so dass die Oberflächen sich um so weniger unmittelbar berühren, je glatter sie zugleich sind,

4) von der Grösse des specifischen Druckes p,

5) von der relativen Geschwindigkeit v, mit der die Körper längs einander gleiten.

Was diese Einflüsse unter 4) und 5) betrifft, so wächst μ zugleich mit p insbesondere nach Versuchen von Rennie (Stahl und Messing auf Gusseisen, Gusseisen und Schmiedeisen auf Schmiedeisen bei etwas fettigen Oberflächen); wenn indessen p unter eine gewisse Grenze sinkt, so kann es bei sehr glatter oder fettiger Oberfläche auch der Fall sein, dass μ mit weiter abnehmenden Werthen von p nicht ab-, sondern zunimmt.

Dass μ mit wachsender Geschwindigkeit v abnimmt, haben insbesondere die Versuche von Bochet ergeben, angestellt mit Eisenbahnfahrzeugen, die bei festgestellten Rädern mittels besonderer, an der Sohle mit verschiedenen Substanzen bekleideter Schuhe auf den Schienen gleitend fortbewegt wurden. Ihnen zufolge soll, wenn v in Metern pro Secunde ausgedrückt ist,

$$\mu = \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + 0{,}3\,v} + \mu_1$$

gesetzt werden können, in welcher Formel μ_0 und μ_1 die Werthe von μ beziehungsweise für $v = 0$ und $v = \infty$ bedeuten. Für dieselben ergaben sich u. A. die folgenden Werthe bei den angeführten Bekleidungen der Schuhe und specifischen Drucken p in Kgr. pro Quadratcentim.

	μ_0	μ_1
Trockenes weiches Holz bei $p > 10$	0,6	0,3
Trockenes hartes Holz bei $p > 10$	0,55	0,25

	μ_0	μ_1
Halbpolirtes Eisen, trocken oder nass, bei $p > 300$ . . .	0,3	0,15
„ „ , trocken bei $p > 100$	0,25	0,075
„ „ , polirt und geschmiert bei $p > 20$.	0,25	0,075
Nicht harziges Holz, genässt mit Wasser bei $p > 20$.	0,25	0,075
Polirtes und angefettetes Holz bei $p > 20$	0,16	0,06

Die Werthe von μ_0 sind zugleich im Allgemeinen als die sogenannten Reibungscoefficienten der Ruhe, d. h. als diejenigen zu betrachten, die einer erst beginnenden Bewegung entsprechen. In gewissen Fällen, insbesondere z. B. für Holz oder Leder auf feuchten oder fettigen Eisenschienen, sowie auch bei sehr grossen Werthen von p ist indessen dieser Reibungscoefficient der Ruhe, namentlich wenn letztere lange Zeit gedauert hat, merklich grösser als derselbe für eine selbst sehr langsame Bewegung. —

Die Mannigfaltigkeit der Umstände, von denen hiernach der Reibungscoefficient abhängt, deutet auf verschiedene Ursachen, deren Zusammenwirken den fraglichen Widerstand zur Folge hat. Als diese Ursachen sind anzuführen: die Rauhigkeit der Oberflächen, die Deformation der Körper und die Molekularanziehung.

Die Rauhigkeit der Oberflächen hat zur Folge, dass die Körper mit kleinen Vorsprüngen und Vertiefungen in einander eingreifen, und dass somit die Verschiebung des einen Körpers gegen den anderen wiederholte Erhebungen des ersteren entgegen dem Drucke Q längs kleinen schiefen Ebenen des anderen nöthig macht. Ist φ der mittlere Neigungswinkel der letzteren gegen die scheinbare Berührungsfläche der Körper, so muss die längs dieser wirkende Kraft R, um eine Verschiebung zu ermöglichen, die durch folgende Gleichung bestimmte Grösse haben:

$$R \cos\varphi = Q \sin\varphi, \text{ woraus } \mu = \frac{R}{Q} = tg\,\varphi$$

folgt. Indem man sich die Erhabenheiten und Vertiefungen der Körperoberflächen von sehr verschiedenen abgerundeten Formen vorzustellen hat, wird φ und somit μ um so grösser sein, je tiefer die einen in die anderen durchschnittlich eingreifen, und das wird um so mehr der Fall sein, nicht nur je rauher die Körperoberflächen, sondern auch je gleichartiger die Rauhigkeiten beider sind, womit es abgesehen vom Einflusse der Molekularkräfte zusammenhängen mag, dass der Reibungscoefficient grösser für gleichartige, als für ungleichartige Körper gefunden zu werden pflegt.

Durch den Druck Q werden die Körper mehr oder weniger deformirt und zwar so, dass der kleinere resp. der nächst der Berührungsfläche

stärker convex gekrümmte Körper abgeplattet und in den anderen um einen gewissen Betrag hinein gedrückt wird. Je mehr das der Fall ist, unter desto grösserem Winkel ist die effective Berührungsfläche gegen die scheinbare, längs welcher die gleitende Bewegung stattfindet, am Rande geneigt, desto grösser deshalb auch μ, sofern ein gewisses beständiges Hinaufgleiten des abgeplatteten Körpers längs dem Eindrucke des anderen vorhergehen muss, um diesen Eindruck im Sinne der Bewegung von Stelle zu Stelle fortschreiten zu lassen. Indem aber solche Deformation natürlich um so beträchtlicher ist, je grösser der specifische Druck p, erklärt sich dadurch das Wachsen von μ mit p.

Dass μ auch mit abnehmender Geschwindigkeit v zunimmt, mag u. A. dadurch bedingt sein, dass sowohl das periodische Eingreifen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche, als auch die so eben erwähnte Deformation einer gewissen Zeit zur Ausbildung bedarf, dass somit beides um so vollständiger zu Stande kommt, je langsamer die relative Bewegung ist.

Die Molekularanziehung kommt um so mehr zur Geltung, je inniger die Berührung ist, je glatter nämlich die Oberflächen sind oder je mehr ihre Vertiefungen durch eine flüssige oder weiche Zwischensubstanz ausgefüllt werden. Geschieht letzteres in solchem Grade, dass die festen Körper sich überhaupt kaum mehr unmittelbar, sondern vorzugsweise mittelbar, nämlich eben durch Vermittelung jener Zwischensubstanz berühren, so beruht der Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung vorwiegend auf der inneren Reibung, mit der die relativen Molekularverschiebungen dieser Zwischensubstanz verbunden sind. Je grösser übrigens der specifische Druck p ist, desto weniger wird das Eindringen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche durch die fragliche Zwischensubstanz verhindert.

I. Reibung von Prismenpaaren.

§. 67. Kolbenreibung.

Die Reibung von Prismenpaaren ergiebt sich meistens so unmittelbar als Folge des Druckes in der prismatischen Elementenfläche und eines erfahrungsmässigen Reibungscoefficienten, dass sie weiterer Besprechung an dieser Stelle nicht bedarf. Besondere Erwähnung wegen ihres erheblichen

Einflusses auf den Arbeitsverlust durch Bewegungswiderstände bei ausgedehnten Gruppen von Maschinen verdient indessen die Reibung einer besonderen Art von Prismenpaaren, bestehend aus einem Cylinder, der als sogenannter Kolben K mit einem Hohlcylinder C durch Vermittelung eines bildsamen Körpers L dicht anschliessend so gepaart ist, dass dadurch zwei in demselben Hohlcylinder beiderseits vom Kolben befindliche Flüssigkeiten F_1 und F_2 möglichst vollkommen von einander geschieden werden trotz ihres verschiedenen specifischen Druckes p_1 resp. p_2. Einer angenähert angebbaren einfachen Gesetzmässigkeit unterliegt diese Kolbenreibung freilich nur in dem Falle, dass die Liederung, nämlich jene Paarung von K und C mit Hülfe des bildsamen Körpers L, eine sogenannte hydrostatische Liederung ist, charakterisirt dadurch, dass der Druck in der Liederungsfläche F (Berührungsfläche zwischen L und C oder L und K, jenachdem L mit K oder mit C zu einem Element verbunden ist) vom Flüssigkeitsdrucke herrührend proportional demselben veränderlich ist. Ist der specifische Druck p_1 der Flüssigkeit F_1 der grössere, so wäre der specifische Druck p in der Fläche F, in welcher der bildsame Körper L, jenachdem er mit K oder C verbunden ist, von der Flüssigkeit F_1 gegen die cylindrische Oberfläche von C resp. K angedrückt wird, $= p_1$ selbst zu setzen, wenn der verschwindend enge Raum zwischen L und C resp. K längs der Fläche F als vollkommen leer gelten dürfte. Doch kann bei der beträchtlichen Steifigkeit, die der Körper L zu besitzen pflegt, wenn er auch aus Leder (als Stulp oder Manschette) gebildet sein mag, eine so innige Berührung kaum angenommen werden, und erscheint es richtiger, jenen specifischen Druck p in der Liederungsfläche nur $= p_1 - p_2$ zu setzen, eine Annahme, die besonders dann zutreffend sein wird, wenn L mit K zu einem Element verbunden ist und somit bei der relativen Bewegung von K gegen C im Sinne von F_1 gegen F_2 auch die Berührungsfläche F längs C in demselben Sinne von F_1 gegen F_2 fortrückt, wogegen, wenn L mit C verbunden ist, die Berührungsfläche längs K im umgekehrten Sinne, nämlich von F_2 gegen F_1 fortrückt und dann im Zwischenraume zwischen L und K ein noch grösserer specifischer Druck, als p_2, wohl stattfinden könnte in Folge anhaftender Flüssigkeit, die kurz zuvor noch die Pressung p_1 hatte.

Indem nun die Fläche F eine Cylinderfläche von gewisser Breite b, also $F = \pi d b$ ist, unter d den inneren Radius von C resp. äusseren Radius von K verstanden, jenachdem L mit K oder C zu einem Element verbunden ist, ergiebt sich die Grösse der Reibung:

$$R = \mu \,.\, \pi d b \,.\, p.$$

Auf Grund der Annahme $p = p_1 - p_2$ ist aber der Ueberdruck auf den Kolben im Sinne seiner relativen Bewegung gegen den Hohlcylinder:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} p$$

und somit das Verhältniss beider Kräfte, das wegen übereinstimmender Wege auch dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste durch die Kolbenreibung gleich ist:

$$\frac{R}{P} = 4 \mu \frac{b}{d} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Setzt man im Durchschnitt $b = 0,1\, d$ und μ für eine hydrostatische Liederung im engeren Sinne des Wortes, nämlich für eine Ledermanschette als bildsamen Körper $L = \frac{1}{4}$, dagegen für eine hydrostatische Metall-Liederung nur 0,3 so gross $= \frac{3}{40} = 0,075$, so ergiebt sich die Reibung R im ersten Falle = 10 Procent, im zweiten = 3 Procent des Ueberdruckes auf den Kolben. (Eine hydrostatische Metall-Liederung kann nach Art eines von G. Krauss angegebenen Locomotivkolbens aus zwei aufgeschnittenen Metallringen gebildet werden, welche, mit nur sehr schwachem Zwange in den Cylinder passend, mit versetzten Fugen so in die Nuth des Kolbens neben einander eingelegt sind, dass die Summe ihrer Breiten, d. i. die Dimension b in Gl. (1) etwas kleiner ist, als die Breite der Nuth, ihre inneren Durchmesser aber etwas grösser sind, als der Kolbendurchmesser in der Nuth. Indem dann der Dampf diese Liederungsringe im Sinne der Kolbenbewegung gegen den vorderen Rand der Nuth drückt, kann er zwischen sie und die cylindrische Nuthfläche eindringen, um sie zugleich radial auswärts gegen die Cylinderwand zu drücken.)

Bei elastischen Liederungen wird der Druck des Liederungskörpers L gegen das nicht mit ihm zu einem Gliede verbundene Element des Prismenpaares K, C durch seine Elasticität vermittelt, entsprechend der Deformation dieses Körpers L bei seiner Einzwängung zwischen K und C. Indem aber diese Deformation durch die unvermeidliche Abnutzung sich ändert, ändert sich damit auch der specifische Druck p in der Liederungsfläche F und somit die entsprechende Reibung auf solche Weise, dass sie sich einer rationellen Berechnung gänzlich entzieht. Für die verschiedenen Arten von Maschinen, bei denen sie von wesentlichem Einflusse ist, muss sie erfahrungsmässig geschätzt werden.

Dasselbe gilt von der unter ähnlichen Umständen stattfindenden Stopfbüchsenreibung, nämlich von der Reibung zwischen einer cylin-

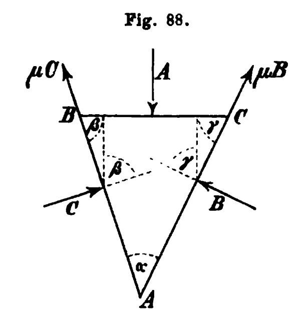
drischen Stange und der Packung einer Stopfbüchse, wodurch sie geführt und zugleich eine Flüssigkeit am Entweichen längs der Berührungsfläche möglichst gehindert werden soll.

§. 68. Beispiel.

Bei Getrieben mit prismatisch gepaarten Gliedern kann der Arbeitsverlust durch Reibung verhältnissmässig sehr gross, folglich der Wirkungsgrad $\eta =$ dem Verhältnisse der Arbeit N des Nutzwiderstandes zur Arbeit L der treibenden Kraft (§. 65) sehr klein werden, besonders wenn die Reibung der betreffenden Prismenpaare nicht nur von indifferenten Kräften (wie z. B. die Kolbenreibung bei elastischer Liederung von der Elasticität des Liederungskörpers), sondern vom Nutzwiderstande herrührt, indem sie proportional demselben zunimmt. Als Beispiel diene die Keilkette a, b, c (Fig. 38, §. 34) unter der Voraussetzung, dass bei Feststellung des Gliedes c das Glied b entgegen einem Nutzwiderstande Q verschoben werden soll durch eine auf die obere (freie) Fläche des Keils a wirkende Kraft P, die rechtwinklig gegen die Schubrichtung des Prismenpaares b, c und somit gegen Q gerichtet sei. Es handelt sich um das Verhältniss dieser Kräfte P, Q und um den Wirkungsgrad η des Getriebes (= dem Verhältnisse der Arbeit von Q zur gleichzeitigen Arbeit von P) mit Rücksicht auf die Reibungen der drei Prismenpaare, deren betreffende Reibungscoefficienten einander gleich $= \mu$ vorausgesetzt werden.

Zu dem Ende werde zunächst das Gleichgewicht der Kräfte an einem einzelnen Keil a betrachtet, indem dessen Querschnitt im Allgemeinen als ein beliebiges Dreieck ABC, Fig. 38, mit den Winkeln α, β, γ beziehungsweise an den Ecken A, B, C vorausgesetzt wird. Dieselben Buchstaben A, B, C mögen zugleich Kräfte bezeichnen, die von aussen her normal gegen die Seitenflächen BC, CA und AB auf den Keil ausgeübt werden, B und C als Widerstände zweier anderer Körper b und c, mit denen der Keil a prismatisch gepaart ist und längs welchen er beziehungsweise im Sinne CA und BA in relativer Bewegung begriffen sei, so dass die betreffenden Reibungen, bei Voraussetzung gleicher Reibungscoefficienten $= \mu B$ und μC, als nach AC und AB, Fig. 88, gerichtete Kräfte auf den

Fig. 88.



Keil wirken. Dem Gleichgewichte aller Kräfte entsprechen dann die Gleichungen:

$$B(\sin\gamma - \mu\cos\gamma) = C(\sin\beta - \mu\cos\beta)$$

und

$$A = B(\cos\gamma + \mu\sin\gamma) + C(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

Aus letzterer folgt mit Rücksicht auf die andere Gleichung:

$$A(\sin\beta - \mu\cos\beta) = B[(\sin\beta - \mu\cos\beta)(\cos\gamma + \mu\sin\gamma) + (\sin\gamma - \mu\cos\gamma)(\cos\beta + \mu\sin\beta)]$$
$$= B[(1 - \mu^2)\sin(\beta + \gamma) - 2\mu\cos(\beta + \gamma)]$$

und stehen somit wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ die Kräfte A, B, C in der Beziehung:

$$\frac{A}{(1 - \mu^2)\sin\alpha + 2\mu\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\beta - \mu\cos\beta} = \frac{C}{\sin\gamma - \mu\cos\gamma} \quad \ldots (1).$$

Ist nun bei dem Keilgetriebe a, b, c (Fig. 38) der Zuschärfungswinkel des gleichschenkligen Keils a, d. i. der spitze Winkel, unter dem die Schubrichtungen der Prismenpaare c, a und a, b gegen einander geneigt sind, $= 2\sigma$, und wird mit B der Normaldruck zwischen den Gliedern a und b (gleich demselben zwischen a und c) bezeichnet, so folgt aus Gl. (1) mit

Fig. 38.

$$A = P, \quad \alpha = 2\sigma, \quad \beta = \gamma = 90^0 - \sigma:$$

$$\frac{B}{P} = \frac{\cos\sigma - \mu\sin\sigma}{(1 - \mu^2)\sin 2\sigma + 2\mu\cos 2\sigma} \quad \ldots (2).$$

In Betreff der Beziehung zwischen den Kräften B und Q am Gliede b ist letzteres als ein Keil zu betrachten, dessen Zuschärfungswinkel (der Angriffsfläche von Q gegenüber liegend) $= 90^0 - \sigma$ und dessen der Angriffsfläche von B gegenüber liegender Winkel $= 90^0$ ist, der sich aber nicht (wie der Keil a im Sinne der Kraft P) im Sinne der Kraft Q, sondern entgegengesetzt bewegt, entsprechend solchen Reibungen der Prismenpaare a, b und b, c, die nicht (wie die Reibungen in Fig. 88) von der Zuschärfungskante des Keiles weg gerichtet, sondern gegen sie hin gerichtet sind. Indem dieser letztere Umstand durch Umkehrung des Vorzeichens von μ zu berücksichtigen ist, ergiebt sich aus Gl. (1) mit

$$A = Q, \ \alpha = 90^0 - \sigma, \ \beta = 90^0 \text{ und } -\mu \text{ statt } \mu:$$

$$\frac{Q}{B} = (1 - \mu^2)\cos\sigma - 2\mu\sin\sigma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\frac{Q}{P} = \frac{[(1 - \mu^2)\cos\sigma - 2\mu\sin\sigma](\cos\sigma - \mu\sin\sigma)}{(1 - \mu^2)\sin 2\sigma + 2\mu\cos 2\sigma}$$

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{[(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu]\,(1-\mu\,tg\,\sigma)}{1-\mu^2+\mu\,(cotg\,\sigma-tg\,\sigma)}$$

wegen
$$2\,cotg\,2\,\sigma=\frac{2}{tg\,2\,\sigma}=\frac{1-tg^2\,\sigma}{tg\,\sigma}=cotg\,\sigma-tg\,\sigma,$$

also auch
$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu}{1+\mu\,cotg\,\sigma}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2-2\,\mu\,tg\,\sigma}{\mu+tg\,\sigma}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu\,tg\,\sigma-\mu\,(\mu+tg\,\sigma)}{\mu+tg\,\sigma}$$

oder mit $\mu=tg\,\varrho$ (§. 66):

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Hiernach ist, wenn P_0 den Werth von P bedeutet, der $\varrho=0$, also $\mu=0$ entsprechen würde:

$$\frac{Q}{P_0}=\frac{1}{2}\,cotg\,\sigma.$$

Die gleichzeitigen Arbeiten von P_0 und Q sind einander gleich, da ohne Reibung weder Verlust noch Gewinn an Arbeit stattfindet, und es ist also der Wirkungsgrad η des Keilgetriebes = dem Verhältnisse der gleichen Wegen des Keils a entsprechenden Arbeiten von P_0 und P = dem Verhältnisse dieser Kräfte selbst:

$$\eta=\frac{P_0}{P}=tg\,\sigma\,[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,\ldots\ldots\ldots\ (5).$$

Wenn an dieses Keilgetriebe die Forderung der Selbstsperrung, d. h. die Forderung gestellt wird, dass der Keil a nicht zurückgehe, wenn die Wirkung der Kraft P unterbrochen wird (wie es z. B. periodisch der Fall ist, wenn bei einer Keilpresse die Kraft P stossweise von einer niederfallenden Stampfe ausgeübt wird), so muss sich nach Gl. (2) die Kraft P negativ ergeben, die bei irgend einer augenblicklichen Grösse von B erforderlich wäre, um den Rückgang des Keils zu hindern. Da solchem Rückgange entgegengesetzt gerichtete Reibungen entsprächen, so gilt für fragliche Kraft die Gleichung (2) mit $-\mu$ statt μ:

$$\frac{B}{P}=\frac{\cos\sigma+\mu\sin\sigma}{(1-\mu^2)\sin 2\,\sigma-2\,\mu\cos 2\,\sigma}$$

und ist sie demnach negativ nur im Falle:

$$tg\,2\,\sigma<\frac{2\,\mu}{1-\mu^2}\ \text{oder}\ tg\,2\,\sigma<tg\,2\,\varrho,\ \text{d. i.}\ \sigma<\varrho.$$

Vorbehaltlich der Erfüllung dieser Bedingung ist η nach Gl. (5) um so grösser, je grösser σ, vorausgesetzt dass auch der Reibungscoefficient einen

gewissen Werth nicht überschreitet. Denn mit $tg\,\sigma = x$ und $tg\,\varrho = \mu$ folgt aus Gl. (5):

$$\eta = x\left(\frac{1-\mu x}{\mu + x} - \mu\right) = \frac{(1-\mu^2)x - 2\mu x^2}{\mu + x}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{(\mu + x)(1-\mu^2 - 4\mu x) - (1-\mu^2)x + 2\mu x^2}{(\mu + x)^2}$$

$$= \mu\frac{1-\mu^2-4\mu x - 2x^2}{(\mu+x)^2},$$

mit $x < \mu$ folglich
$$\frac{d\eta}{dx} > \mu\,\frac{1-7\mu^2}{(\mu+x)^2}$$

und somit $\frac{d\eta}{dx}$ positiv, sofern nur $\mu < \sqrt{\frac{1}{7}}$, d. i. $\mu < 0{,}38$ ist.

Der grösstmögliche Werth, den η haben kann, wenn $\mu < 0{,}38$ (ungefähr $\varrho < 21^0$) und $\sigma < \varrho$ ist, ergiebt sich aus Gl. (5) mit $\sigma = \varrho = arctg\,\mu$:

$$max\,\eta = \mu\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu} - \mu\right) = \frac{1-3\mu^2}{2}.$$

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung.*

§. 69. Allgemeine Principien ihrer Berechnung.

Die Zapfen (Wellzapfen), nämlich die Theile rotirender Wellen, mit denen sie in den Lagern gestützt und damit zu einem Drehkörperpaare gepaart sind, können unterschieden werden in Spurzapfen und Tragzapfen, jenachdem der Zapfendruck P, d. i. der resultirende Druck zwischen Zapfen und Lager in die Zapfenaxe (Wellenaxe) fällt oder sie rechtwinklig schneidet; bei anders gerichtetem Zapfendrucke würde derselbe in zwei Componenten zerlegt werden können, beziehungsweise längs der Axe und senkrecht dazu gerichtet, und der Zapfen dann diesen Componenten entsprechend zugleich den Charakter als Spur- und als Tragzapfen haben. In allen Fällen handelt es sich um die Berechnung des Reibungsmomentes M in Bezug auf die Axe, das der relativen Drehung des Zapfens gegen das Lager um diese Axe entspricht. Dieses Moment, das auch als Grösse einer am Hebelarme = 1 wirkenden Kraft zu betrachten ist, giebt bei Multiplication mit 2π die Reibungsarbeit pro Umdrehung, bei Multiplication mit

* Siehe: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 200.

der Winkelgeschwindigkeit der Welle dagegen die Reibungsarbeit pro Zeiteinheit, d. i. die Arbeitstärke der Zapfenreibung.

Die Reibungsfläche $= F$ (Berührungsfläche zwischen Zapfen und Lagerpfanne) ist irgend eine Umdrehungsfläche. Ihre Meridianlinie sei auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der x und y bezogen so, dass die x-Axe in der Zapfenaxe liegt; a und b seien die zwei äussersten Werthe von y, d. h. die Radien der die Reibungsfläche begrenzenden Parallelkreise. Ist ferner p der specifische Normaldruck in einem Punkte der Reibungsfläche und μ der Reibungscoefficient, so ist die Reibung in einem Flächenelemente $dF = \mu p\, dF$ und ihr Moment in Bezug auf die Axe $= \mu p\, y\, dF$, also

$$M = \mu \int p y\, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Darin ist p an die Bedingung gebunden, dass die Summe der im Sinne des Zapfendruckes P genommenen Componenten der elementaren Normaldrucke $= P$, also

$$\int p \cos\varphi\, dF = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sein muss, das Integral wie das vorige über die ganze Reibungsfläche ausgedehnt gedacht, und unter φ den Winkel zwischen den Richtungen von p und P verstanden.

Damit indessen p durch Gl. (2) bestimmt sei und dann auch die Integration von Gl. (1) bei gegebener Gestalt der Reibungsfläche ausgeführt werden könne, muss in Betreff des Vertheilungsgesetzes des Normaldruckes in der Fläche F eine Annahme gemacht werden. Die einfachste solche Annahme besteht darin, p als Constante vorauszusetzen, womit sich ergiebt:

$$M = \mu p \int y\, dF \text{ mit } p = \frac{P}{\int \cos\varphi\, dF} = \frac{P}{F'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

unter F' die Projection der Reibungsfläche F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene verstanden. Diese Annahme, die zugleich einen constanten Werth des nach P gerichteten Druckes in der Projection F', und zwar $= p$ pro Flächeneinheit von F' zur Folge hat, ist in Ermangelung genügender Anhaltspunkte für eine andere in der That am natürlichsten für einen neuen Zapfen oder einen solchen, der nur zeitweilig in relativer Drehung gegen das Lager befindlich und deshalb keiner merklichen Abnutzung unterworfen ist, indem dann thatsächlich die Druckvertheilung in der Berührungsfläche von elastischen Deformationen und von zufälligen Abweichungen der Zapfen- und Lageroberfläche von ihrer (bei $P = 0$) vorausgesetzten Congruenz, überhaupt von Umständen abhängt, die sich einer zutreffenden Beurtheilung und Berücksichtigung bei der in Rede stehenden Rechnung entziehen. Handelt es sich aber um einen

Zapfen, der sich in anhaltender Rotation im Lager befindet, d. h. um einen solchen, der mit Rücksicht auf die dann stattfindende merkliche Abnutzung beider Theile als eingelaufener Zapfen bezeichnet werde, so ist das Vertheilungsgesetz von p in der Reibungsfläche wesentlich abhängig von dem Gesetze, nach dem diese Abnutzung stattfindet, wie folgende Ueberlegung erkennen lässt.

Die Grösse der Reibung in einem Punkte der Reibungsfläche ist proportional p, also die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional dem Producte aus p und der relativen Geschwindigkeit, mit welcher im fraglichen Punkte die beiden sich berührenden Flächen an einander gleiten. Diese Geschwindigkeit ist aber proportional dem Abstande y des Punktes von der Rotationsaxe, mithin die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional py. Sie hat die Verwandlung eines ihr an Grösse gleichen äusseren in inneres theils freies, theils gebundenes Arbeitsvermögen zur Folge, nämlich theils Erwärmung des Zapfens und seines Lagers, theils Abnutzung (Ueberwindung der Cohäsion in oberflächlichen Schichten) dieser beiden Elemente. In welchem Verhältnisse diese Theilung der Reibungsarbeit in freies und gebundenes inneres Arbeitsvermögen stattfindet, ist hier gleichgültig, wesentlich dagegen die Frage, ob das Verhältniss in allen Elementen der Reibungsfläche dasselbe sei oder nicht. Sofern es aber ohne Zweifel hauptsächlich vom beiderseitigen Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper abhängt und diese beiden Umstände in allen Elementen der Reibungsfläche gleich, auch andere etwa influirende Umstände wenigstens nicht sehr verschieden sind, so ist die zunächst liegende Annahme die wahrscheinlich zutreffendste, dass in allen Elementen der Reibungsfläche ein gleicher verhältnissmässiger Theil der ganzen Reibungsarbeit zur Abnutzung verwendet werde, der demnach pro Zeiteinheit auch proportional py ist.

Ist a die während einer gewissen Zeit in einem Punkte der Reibungsfläche erfolgende resultirende Abnutzung, normal zur Fläche gemessen, so besteht dieselbe aus zwei Theilen: der Abnutzung a_1 des Zapfens und derjenigen a_2 des Lagers, und die zur Abnutzung a verwendete Arbeit ist proportional $m_1 a_1 + m_2 a_2$, unter m_1 und m_2 Constante verstanden, die vom Material des Zapfens resp. der Lagerpfanne abhängen. Die Grösse des Verhältnisses $\frac{a_1}{a_2}$, welches wegen der im Allgemeinen grösseren Härte des Zapfens < 1 sein wird, ist hier gleichgültig; wesentlich dagegen ist wieder die Frage, ob es in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross sei, und diese Frage scheint auch hier bejaht werden zu müssen, weil das fragliche

Verhältniss im Wesentlichen kaum von anderen Umständen als von der specifischen Abnutzungsfähigkeit beider Materialien abhängig sein kann. Setzt man demnach $a_1 = \alpha_1 a$ und $a_2 = \alpha_2 a$, unter α_1 und α_2 wieder zwei vom Zapfen- resp. Lagermaterial abhängige Constante verstanden, so wird die zur resultirenden Abnutzung a erforderliche Arbeit

$$\text{proportional } (m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)\, a, \text{ also proportional } a,$$

und da die dazu nach Obigem in der Zeiteinheit verwendbare Arbeit auch proportional py ist, so ergiebt sich *die resultirende normale Abnutzung pro Zeiteinheit in jedem Punkte der Reibungsfläche proportional* py.

Wäre nun p nach der gewöhnlichen Annahme in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross, auch bei einem eingelaufenen, in der Abnutzung begriffenen Zapfen, so wäre letztere in den verschiedenen Punkten der Reibungsfläche normal dazu gemessen lediglich proportional y, was offenbar unmöglich ist. Der Spurzapfen einer stehenden Welle und seine Lagerpfanne (Spurplatte) z. B., die sich ursprünglich in einer ebenen Fläche berührten, müssten sich dann unter der Einwirkung des nach der Axe gerichteten Druckes P und der entsprechenden Reibung so abnutzen, dass sie durch Kegelflächen begrenzt werden, die sich nur in ihren Mittelpunkten (Spitzen) berühren; der cylindrische Tragzapfen einer liegenden Welle und seine Pfanne würden unter der Einwirkung des zur Axe rechtwinkligen Druckes P bei der Abnutzung zwar cylindrisch bleiben, aber während der Zapfen einen kleineren Radius erhielte, würde die Pfanne nach einem grösseren abgerundet werden, so dass beide sich nachher nur in einer geraden Linie berührten. In jenem Punkte des stehenden resp. dieser Linie des liegenden Zapfens müsste nun der ganze Druck concentrirt sein im Widerspruche mit der Annahme selbst, die dieses Resultat herbeigeführt hat, abgesehen davon, dass schon die Vorstellung des Ueberganges zu dem fraglichen Zustande stellenweiser Entfernung der Oberflächen von einander, nachdem sie ursprünglich in allseitiger Berührung waren, absurd ist; wenn auch der anfängliche Normaldruck an einer gewissen Stelle in Folge verhältnissmässig grösserer Abnutzung daselbst abnehmen mag, so kann er doch nicht bis Null abnehmen, weil damit die Abnutzung an dieser Stelle aufhörte, was bei der fortschreitenden Abnutzung an anderen Stellen unmöglich ist.

Hieraus ist ersichtlich, dass mit der Abnutzbarkeit des Zapfens und seines Lagers nicht nur die Annahme eines constanten Werthes von p in Widerspruch wäre, sondern dass zur Berechnung des Reibungsmomentes eingelaufener Zapfen überhaupt keine Annahme hinsichtlich der Vertheilung



dieses Normaldruckes gemacht werden darf. Die Abnutzung selbst bedingt eben solche Vertheilung, die sich aus der Erwägung ergiebt, dass, indem sich der Zapfen im Sinne des Druckes P in die Lagerpfanne einfrisst, die Berührung in allen Punkten stets erhalten bleibt, woraus folgt, dass die resultirende Abnutzung, im Sinne von P gemessen, für alle Punkte der Reibungsfläche gleich gross sein muss. Dann ist aber die normale Abnutzung proportional $\cos\varphi$, und da sie nach Obigem auch proportional py ist, so folgt:

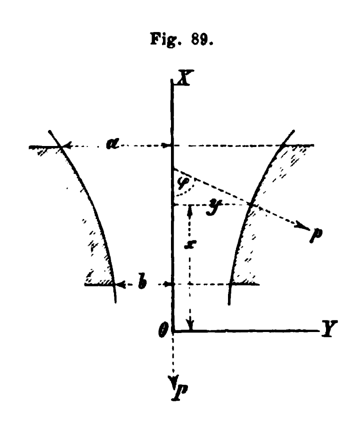
$$\frac{py}{\cos\varphi} = Const. = C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Die Substitution des hieraus sich ergebenden Ausdruckes von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ in Gl. (1) liefert für M zunächst einen Ausdruck, der die Constante C enthält, deren Werth dann aus Gl. (2) durch Substitution von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ zu ermitteln ist:

$$M = \mu C \int \cos\varphi\, dF = \mu C F' \text{ mit } C = \frac{P}{\int \frac{\cos^2\varphi}{y} dF} \quad \ldots \ldots (5).$$

§. 70. Reibungsmoment von Spurzapfen.

Fig. 89.



Die Reibungsfläche wird hier am einfachsten in ringförmige Flächenelemente dF zerlegt durch Ebenen, die in den Abständen dx normal zur x-Axe sind; indem sie die Meridianlinien in ihre Bogenelemente ds zerlegen, ist

$$dF = 2\pi y\, ds.$$

A. Neuer Spurzapfen.

Durch Substitution des vorstehenden Ausdruckes von dF sowie mit

$$F' = \pi(a^2 - b^2)$$

ergiebt sich nach Gl. (3) des vorigen Paragraphen das Reibungsmoment:

$$M = \frac{2\mu P}{a^2 - b^2} \int y^2\, ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

woraus dann leicht die Werthe von M für besondere Fälle zu erhalten sind.

1) Für einen abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche πb^2 erhält man mit $ds = \frac{dy}{\sin\alpha}$, unter α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe der Kegelfläche verstanden, und indem das Integral in Gl. (1) zwischen den Grenzen $y = b$ und $y = a$ genommen wird:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \frac{1}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

insbesondere für einen ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

für einen conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und für einen ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

2) Ist der abgestumpft-kegelförmige Zapfen mit Reibung an der Endfläche πb^2 behaftet, so mag zwar die Annahme eines constanten, also namentlich auch für die conische Umfläche und die ebene Endfläche gleich grossen Werthes von p in erhöhtem Grade unsicher, weil eine kaum erreichbare Genauigkeit der Bearbeitung voraussetzend sein; wird sie aber gleichwohl beibehalten, so ergiebt sich M als Summe von zwei Bestandtheilen, von denen der erste aus Gl. (5) mit $\frac{b^2}{a^2}P$ statt P und b statt a, der zweite aus Gl. (2) mit $\frac{a^2 - b^2}{a^2}P$ statt P hervorgeht:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu P}{a^2}\left(b^3 + \frac{a^3 - b^3}{\sin\alpha}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

3) Ist bei einem kugelförmigen Zapfen r der Radius der Kugelfläche, α das Maximum von φ, nämlich der spitze Winkel zwischen der x-Axe (Fig. 89) und den nach den äussersten Punkten der Reibungsfläche gezogenen Radien, so folgt aus Gl. (1) mit

$$a = r\sin\alpha, \quad b = 0, \quad y = r\sin\varphi, \quad ds = r\,d\varphi:$$

$$M = \frac{2\mu P}{r^2\sin^2\alpha} r^3 \int_0^\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi = \mu P r \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (7),$$

insbesondere z. B. für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \mu P r = \frac{4}{7} \mu P r$ . . . . . (8),

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M = \frac{\pi}{2} \mu P r = \frac{11}{7} \mu P r$ . . . . (9).

4) Für den **Schiele'schen Zapfen**, dessen Meridianlinie dadurch charakterisirt ist, dass ihre Tangenten (zwischen den Durchschnittspunkten mit der x-Axe und den Berührungspunkten gemessen) gleiche Länge t haben, ist $ds = \frac{t}{y} dy$, also

$$M = \frac{2 \mu P}{a^2 - b^2} t \int_b^a y\, dy = \mu P t \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10),$$

somit unabhängig von der Länge des vom Lager umschlossenen Zapfenstücks.

B. Eingelaufener Spurzapfen.

Das Reibungsmoment sei zum Unterschiede hier mit M' bezeichnet; für den kegelförmigen und den kugelförmigen Zapfen behalte α die oben angegebenen Bedeutungen. Aus Gl. (5) im vorigen §. folgt dann mit

$$F' = \pi (a^2 - b^2), \quad dF = 2 \pi y\, ds, \quad \cos \varphi = \frac{dy}{ds}:$$

$$M' = \mu C \pi (a^2 - b^2) \text{ mit } C = \frac{P}{2 \pi \int \cos \varphi\, dy},$$

also

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a^2 - b^2}{\int \cos \varphi\, dy} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

1) Für den **abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche** ergiebt sich hieraus mit

$$\cos \varphi = \sin \alpha, \text{ also } \int \cos \varphi\, dy = (a - b) \sin \alpha:$$

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a + b}{\sin \alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12),$$

insbesondere für den ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P (a + b) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13),$$

für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{a}{\sin \alpha} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14),$$

für den ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2}\mu P a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

In den zwei letzten Fällen vermindert sich das Reibungsmoment durch die Abnutzung, wie die Vergleichung mit den Ausdrücken (4) und (5) erkennen lässt, im Verhältnisse:

$$M : M' = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 1 : \frac{3}{4}.$$

2) Sind bei dem abgestumpft-kegelförmigen Zapfen mit Reibung an der Endfläche P_1 und P_2 die Bestandtheile von P, die beziehungsweise die Reibungen an der Endfläche und der kegelförmigen Umfläche verursachen, M_1 und M_2 die bezüglichen Reibungsmomente, so ist

$$M_1 = \frac{1}{2}\mu P_1 b \text{ nach Gl. (15)}, \quad M_2 = \frac{1}{2}\mu P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha} \text{ nach Gl. (12)},$$

und da diese Momente sich wie die Inhalte der gleichzeitig von beiden Flächen aus abgeschliffenen Körperschalen verhalten müssen:

$$M_1 : M_2 = P_1 b : P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha} = b^2 : a^2 - b^2,$$

so folgt daraus $P_1 : P_2 = b : (a-b)\sin\alpha$,

$$P_1 = \frac{b}{b+(a-b)\sin\alpha} P, \quad P_2 = \frac{(a-b)\sin\alpha}{b+(a-b)\sin\alpha} P,$$

also
$$M' = \frac{1}{2}\mu\left(P_1 b + P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{2}\mu P \frac{a^2}{b+(a-b)\sin\alpha} \quad \ldots (16).$$

3) Für den kugelförmigen Zapfen ist wegen $y = r\sin\varphi$:

$$dy = r\cos\varphi\, d\varphi, \quad \int \cos\varphi\, dy = r\int_0^\alpha \cos^2\varphi\, d\varphi = r\frac{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{2},$$

also nach Gl. (11) mit $a = r\sin\alpha$, $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2}\mu P \frac{r^2\sin^2\alpha}{r\frac{\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{2}} = \mu P r \frac{\sin^2\alpha}{\alpha+\sin\alpha\cos\alpha} \quad \ldots (17),$$

insbesondere für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M' = \frac{2}{\pi+2}\mu P r = \frac{7}{18}\mu P r \quad \ldots (18),$

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M' = \frac{2}{\pi}\mu P r = \frac{7}{11}\mu P r \quad \ldots\ldots (19).$

Die Vergleichung mit obigen Ausdrücken (8) und (9) lässt erkennen, dass

für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sich $M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2 - 4} = 1 : 0{,}68$

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sich $M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2} = 1 : 0{,}41$

verhält, dass also namentlich bei diesem letzteren kugelförmigen Spurzapfen, dessen Reibungsfläche eine halbe Kugelfläche ist, durch das Einlaufen eine Verminderung des Reibungsmoments auf weniger als die Hälfte des ursprünglichen Werthes zu erwarten ist.

4) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

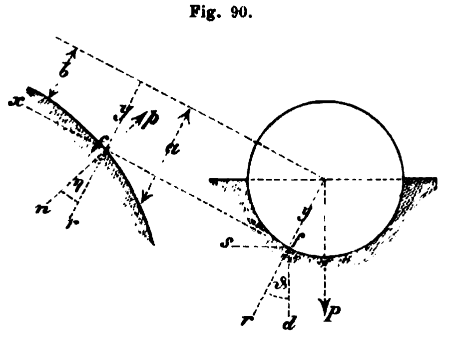
$$\int \cos\varphi\, dy = \int \frac{y}{t}\, dy = \frac{a^2 - b^2}{2t},$$

nach Gl. (11) somit $$M' = \mu P t \quad \ldots\ldots (20).$$
Dieser Zapfen hat also die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, dass sein Reibungsmoment sich durch die Abnutzung nicht verändert, indem der Normaldruck immer gleichförmig in der Berührungsfläche vertheilt bleibt.

§. 71. Reibungsmoment von Tragzapfen.

Der Zapfen sei ringsum vom Lager umschlossen, so dass als Reibungsfläche F der Theil seiner Oberfläche zu rechnen ist, der (ausser von den Parallelkreisen mit den Radien a und b) von der zum Zapfendrucke P senkrechten Meridianebene begrenzt wird, indem sie von letzterer aus im Sinne von P gelegen ist. Der Inhalt jenes Meridianschnittes zwischen den Durchmessern $2a$ und $2b$ ist dann $= F' =$ der Projection von F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene. Die Reibungsfläche F ist hier in Elemente dF mit zwei unendlich kleinen Dimensionen zu zerlegen, und zwar am natürlichsten durch eine Schaar von Meridianebenen nebst einer Schaar von Ebenen, die in den Abständen dx, den Bogenelementen ds der Meridianlinie entsprechend, zur Zapfenaxe normal sind.

Fig. 90.



Vom Punkte f (Fig. 90) eines so erhaltenen Flächenelementes dF aus werde die Gerade

fn normal zur Reibungsfläche,

fr im Sinne des Radius des betreffenden Parallelkreises,

fd im Sinne des Zapfendruckes P,

fx parallel der Zapfenaxe

gezogen und der Winkel nfr mit η, rfd mit ϑ bezeichnet, während der Winkel $nfd = \varphi$ ist. Es ist dann

$$\cos\varphi = \cos\eta \cos\vartheta \text{ und } dF = y\, d\vartheta\, ds \quad \ldots\ldots (1).$$

Wenn ein solcher Tragzapfen nicht cylindrisch ist, so kommt ausser dem Reibungsmoment M noch ein anderer Umstand in Betracht. Denkt man nämlich die elementaren Normalpressungen der Reibungsfläche in je zwei Componenten zerlegt nach den Richtungen rf und xf, erstere weiter in je zwei Componenten nach df und senkrecht dazu nach sf, so sind (unter entsprechender Compression des Zapfens) die nach df gerichteten Druckcomponenten mit P, die nach sf gerichteten unter sich im Gleichgewichte. Die nach xf gerichteten Componenten aber setzen sich zu einer Resultanten $A =$ ihrer Summe:

$$A = \int p \sin\eta\, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zusammen, womit der Zapfen aus dem Lager herauszugleiten strebt, oder womit die ganze Welle im Sinne ihrer Axe in das Lager am anderen Ende gedrückt wird, wenn nicht dieser andere Zapfen in gleicher Weise einen entgegengesetzt gerichteten axialen Druck A_1 verursacht, so dass die Welle thatsächlich nur mit der Differenz beider Kräfte A, A_1 gegen das eine oder andere Lager gedrückt wird; der Zapfen des letzteren ist dann mit einem zusätzlichen Reibungsmoment als Spurzapfen behaftet, das nach der bezüglichen Formel im vorigen §. zu berechnen ist, indem darin für P jene Differenz der Kräfte A, A_1 substituirt wird.

A. Neuer Tragzapfen.

Mit $dF = y\, d\vartheta\, ds$ ergiebt sich für denselben aus Gl. (3) in §. 69:

$$M = \mu \frac{P}{F'} \iint y^2\, d\vartheta\, ds = \mu \frac{P}{F'} \int y^2\, ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \pi \mu \frac{P}{F'} \int y^2\, ds \quad . . (3)$$

sowie nach Gl. (2):

$$A = \frac{P}{F'} \iint y \sin\eta\, d\vartheta\, ds$$

oder wegen $\sin\eta\, ds = dy$:

$$A = \frac{P}{F'} \int y\, dy \int d\vartheta = \pi \frac{P}{F'} \int y\, dy = \frac{\pi}{2} P \frac{a^2 - b^2}{F'} \quad \ldots\ldots (4).$$

1) Für einen cylindrischen Zapfen vom Radius r und von der Länge l (insoweit er vom Lager umschlossen wird) ist

$$a = b = y = r, \quad F' = 2rl, \quad \int y^2\, ds = r^2 l,$$

also nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2} \mu P r \text{ und } A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

2) Wenn bei dem kegelförmigen Zapfen wieder α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe bedeutet, so ist

$$F' = (a+b)\,l = (a+b)\frac{a-b}{tg\,\alpha} = \frac{a^2-b^2}{tg\,\alpha}$$

und
$$\int y^2\,ds = \frac{1}{\sin\alpha}\int y^2\,dy = \frac{a^3-b^3}{3\sin\alpha},$$

also
$$M = \frac{\pi}{3}\mu P\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\frac{1}{\cos\alpha} \text{ und } A = \frac{\pi}{2}P\,tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ (6).$$

Insbesondere für einen conischen Spitzzapfen ist $b = 0$, also

$$M = \frac{\pi}{3}\mu P\frac{a}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ (7).$$

3) Bei dem Schiele'schen Zapfen (siehe vorigen Paragraph) ist

$$ds = \frac{t}{y}dy, \text{ also } \int y^2\,ds = t\int y\,dy = t\frac{a^2-b^2}{2},$$

damit nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2}\mu P t\frac{a^2-b^2}{F'}; \quad A = \frac{M}{\mu t} \quad \ldots\ldots\ (8).$$

Für den Meridianschnitt F' erhält man:

$$F' = 2\int y\,dx = 2\int y\cos\eta\,ds = 2\,t\int\cos\eta\,dy$$

oder wegen $y = t\sin\eta$, also $dy = t\cos\eta\,d\eta$:

$$F' = 2\,t^2\int\cos^2\eta\,d\eta = t^2(\eta + \sin\eta\cos\eta),$$

zu nehmen zwischen den Grenzen $\eta = arc\sin\frac{b}{t}$ und $\eta = arc\sin\frac{a}{t}$, also

$$F' = t^2\left(arc\sin\frac{a}{t} - arc\sin\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}}\right) \quad . (9).$$

B. Eingelaufener Tragzapfen.

Die Grössen M und A seien zum Unterschiede hier mit M' und A' bezeichnet. Nach Gl. (5), §. 69, sowie mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen (1) und wegen $\cos\eta\,ds = dx$ ist dann

$$\frac{P}{C} = \int\frac{\cos^2\varphi}{y}dF = \int\int\cos^2\eta\cos^2\vartheta\,d\vartheta\,ds = \int\cos\eta\,dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$C = \frac{2}{\pi}\frac{P}{\int\cos\eta\,dx}$$

$$M' = \mu C F' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{F'}{\int \cos\eta\, dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

ferner, da nach Gl. (4) in §. 69:

$$p = C \frac{\cos\varphi}{y} = C \frac{\cos\eta \cos\vartheta}{y}$$

ist, nach Gl. (2) mit $dF = y\, d\vartheta\, ds$ und $\cos\eta\, ds = dx$:

$$A' = C \int\int \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta\, d\vartheta\, ds = C \int \sin\eta\, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta = 2\, C \int \sin\eta\, dx$$

oder mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von C:

$$A' = \frac{4}{\pi} P \frac{\int \sin\eta\, dx}{\int \cos\eta\, dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Hiernach und mit den vorigen Bedeutungen der Buchstaben r, l, a findet man

1) für den cylindrischen Zapfen wegen $\eta = 0$ und $F' = 2\, r\, l$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{2\, r\, l}{l} = \frac{4}{\pi} \mu P r; \quad A' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Vergleichung mit obigem Ausdrucke (5) ergiebt eine Abnahme des Reibungsmoments in Folge der Abnutzung im Verhältnisse:

$$M : M' = 1 : \frac{8}{\pi^2} = 1 : 0{,}81.$$

2) Für den kegelförmigen Zapfen wird mit $\eta = \alpha$ und $F' = (a + b)\, l$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a + b}{\cos\alpha}; \quad A' = \frac{4}{\pi} P\, tg\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (13),$$

insbesondere für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a}{\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

und nach Gl. (7): $\qquad M : M' = 1 : \frac{6}{\pi^2} = 1 : 0{,}61.$

3) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

$$dx = cotg\, \eta\, dy \text{ und } y = t \sin\eta, \text{ also } dy = t \cos\eta\, d\eta$$

und

$$\int \cos\eta\, dx = t \int \frac{\cos^3\eta}{\sin\eta}\, d\eta.$$

Darin ist

$$\int \frac{\cos^3\eta}{\sin\eta}\, d\eta = \int (1 - \sin^2\eta) \frac{d \sin\eta}{\sin\eta} = ln \sin\eta - \frac{1}{2} \sin^2\eta$$

zwischen den Grenzen $\sin\eta = \frac{b}{t}$ und $\sin\eta = \frac{a}{t}$ zu nehmen, also

$$\int \cos\eta\, dx = t\left(ln\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{t^2}\right).$$

Somit ergiebt sich nach Gl. (10) mit Rücksicht auf den Ausdruck (9) von F':

$$M' = \frac{2}{\pi}\mu P t \frac{arc\sin\frac{a}{t} - arc\sin\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1 - \frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1 - \frac{b^2}{t^2}}}{ln\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2 - b^2}{t^2}} \quad . \quad (15).$$

Ferner ist:

$$\int \sin\eta\, dx = \frac{1}{t}\int y\, dx = \frac{1}{2}\frac{F'}{t}$$

und deshalb nach Gl. (10) und (11):

$$A' = \frac{2}{\pi}\frac{P}{t}\frac{F'}{\int \cos\eta\, dx} = \frac{M'}{\mu t} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

analog obiger Beziehung (8) zwischen A und M.

§. 72. Versuche über Zapfenreibung.

Die betreffenden Versuche beziehen sich ausschliesslich auf cylindrische Tragzapfen. Wird, wie üblich, das Reibungsmoment eines solchen vom Radius r bei dem Zapfendruck P:

$$M = \mu' P r$$

gesetzt, so ergab sich nach älteren Versuchen, insbesondere von Morin, für eiserne Zapfen in Lagern von Gusseisen oder Bronze und bei Anwendung verschiedener Schmiermittel (Oel, Talg, Schweineschmalz) im Durchschnitt etwa:

$$\mu' = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}08$$

je nach der mehr oder weniger sorgfältigen Abwartung bezüglich auf Schmierung.

Neuere Versuche haben diesen Coefficienten meistens erheblich kleiner und zugleich in höherem Grade von den Umständen abhängig ergeben. Bei Versuchen von Waltjen und von Rühlmann mit der Waltjen'schen Reibungswage (sowie auch bei späteren Versuchen von Dr. Lunge) wurde er für Stahlzapfen meistens zwischen 0,01 und 0,04 liegend gefunden. Zugleich ergab sich eine auffallende Abhängigkeit des Coefficienten von der Peripheriegeschwindigkeit v des Zapfens in der Weise, dass er bei einem

gewissen Werthe von v (ungefähr 0,4 Mtr. pro Sec.) am kleinsten war und bei abnehmender Geschwindigkeit schneller, bei wachsender langsamer zunahm. Das Minimum von μ' wurde vom Material der Lagerpfanne, vom Schmieröl und vom specifischen Drucke abhängig gefunden, von letzterem übrigens in verschiedenem Sinne bei verschiedenartigen Lagerpfannen.

Durch Versuche über die Zapfenreibung von Eisenbahnwagenaxen, die in den Jahren 1861 und 1862 in der Eisenbahnwerkstätte zu Hannover von Kirchweger angestellt wurden, fand sich jene so eben erwähnte Abhängigkeit des Coefficienten μ' von der Geschwindigkeit nicht bestätigt. Bei Anwendung von Lagerpfannen aus Bronze, Hartblei oder Zinncomposition, geschmiert mit Rüböl oder Cohäsionsöl, zeigte sich μ' für 10 bis 360 Umdrehungen pro Minute fast gleich gross. Uebrigens wurde dieser Coefficient ganz auffallend klein gefunden, nur etwa $= 0{,}01$ für die Lagerpfannen aus Hartblei oder Zinncomposition resp. $= 0{,}014$ für Pfannen aus Bronze; doch gelten diese Werthe nur für grössere specifische Belastungen von etwa 20 bis 120 Kgr. pro Quadratcentim. Innerhalb dieser Grenzen hatte die Grösse der Belastung keinen erheblichen Einfluss; bei ihrer weiteren Abnahme bis etwa 2 Kgr. pro Quadratcentim. nahm aber μ' bis zum Dreifachen jener Werthe zu.

Wiederum wesentlich anders waren die Ergebnisse von Versuchen Hirn's. Bei der Unsicherheit, die hiernach mit Rücksicht auf die erhebliche Abweichung ihrer Resultate den seitherigen Versuchen über die Reibung cylindrischer Tragzapfen anhaftet, wird es rathsam sein, den Coefficienten μ' in der Regel nicht kleiner als 0,06 zu veranschlagen, oder den Reibungscoefficienten μ in den Formeln der vorigen Paragraphen wenigstens $= 0{,}04$, entsprechend:

$$\mu' = \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}04 = 0{,}063 \text{ nach §. 71, Gl. (5),}$$

$$\mu' = \frac{4}{\pi} \cdot 0{,}04 = 0{,}051 \text{ nach §. 71, Gl. (12).}$$

§. 73. Beispiele.

1) Das Gewicht einer Turbine sammt Welle und einem darauf sitzenden Zahnrade sei $P = 2500$ Kgr. Wie gross ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Reibung ihres ebenflächig-kreisförmigen Spurzapfens zu veranschlagen, wenn dessen Durchmesser $(2\,a) = 8$ Centim. ist (entsprechend einem specifischen Drucke in der Reibungsfläche von ungefähr

50 Kgr. pro Quadratcentim.), wenn ferner die Turbine 32 Umdrehungen in der Minute macht bei einem Aufschlagwasserquantum von 0,9 Cubikmtr. pro Secunde und bei 1,5 Mtr. Gefälle?

Der sogenannte absolute Effect, nämlich das dem Gefälle entsprechende Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pro Secunde ist

$$= 1000 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1{,}5 = 1350 \text{ Meterkilogramm.}$$

Setzt man das Reibungsmoment:

$$M = 0{,}04\, Pa = 0{,}04 \,.\, 2500 \,.\, 0{,}04 = 4 \text{ Meterkilogramm,}$$

entsprechend $\mu = 0{,}06$ nach §. 70, Gl. (5)

resp. $\mu = 0{,}08$ nach §. 70, Gl. (15),

jenachdem der Zapfen als neu oder eingelaufen betrachtet wird, so ist, da die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi \,.\, 32}{60} = 3{,}35$$

ist, die Reibungsarbeit pro Secunde:

$$M\omega = 4 \,.\, 3{,}35 = 13{,}4 \text{ Meterkilogramm,}$$

nahe $= 1\ ^0/_0$ des absoluten Effects.

2) Der verhältnissmässige Arbeitsverlust, der bei einem Schubkurbelmechanismus (§. 39, Fig. 47) durch die Reibung verursacht wird, sei unter der Voraussetzung auszudrücken, dass die auf den Schieber c abwechselungsweise im Sinne AC und CA (Fig. 47) wirkende Kraft S von constanter Grösse ist. Dieser Mechanismus enthält drei Drehkörperpaare A, B, C, deren Reibungen wie bei cylindrischen Tragzapfen zu beurtheilen sind, und ausserdem das Prismenpaar D mit den Elementen c, d. Indem aber der Druck zwischen den Elementen des Paares A, nämlich der Zapfendruck in den Lagern der Kurbelwelle, in viel höherem Grade durch das Gewicht dieser Welle, als durch die übertragene Kraft verursacht zu werden pflegt, während die Reibungen des Kurbelzapfens B (Radius $= k$), des Schieberzapfens C (Radius $= s$) und des Schiebers in seiner Prismenführung umgekehrt vorzugsweise von der Kraft S herrühren, sollen hier nur die letzteren drei Reibungen, insoweit sie von S abhängig sind, in Betracht gezogen werden, um das Verhältniss m der Summe ihrer Arbeiten, die für eine halbe Umdrehung der Kurbel (dem Uebergange aus einer in die andere der Lagen AB_0, AB_1, Fig. 47, entsprechend) beziehungsweise mit B, C, D bezeichnet seien, zur gleichzeitigen Arbeit von S:

$$m = \frac{B + C + D}{S \,.\, 2a}$$

auszudrücken. Insofern die Drucke zwischen den Elementen der Paare B, C, D und somit die betreffenden Reibungen während der halben Kurbel-

umdrehung variabel sind, genügt es mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Reibungscoefficienten, jene Veränderlichkeit nur näherungsweise zu berücksichtigen, etwa mit einer solchen Annäherung, wie sie der Vernachlässigung von λ^2 gegen 1 entspricht, unter λ das Verhältniss der Kurbellänge a zur Koppellänge b verstanden, das höchstens $= \frac{1}{4}$ zu sein pflegt. Mit dieser Annäherung kann, wenn, wie in §. 40 mit Bezug auf Fig. 47, der Winkel B_0AB mit α, ACB mit γ bezeichnet wird,

$$\gamma = tg\,\gamma = sin\,\gamma = \lambda\, sin\,\alpha$$

gesetzt werden und, wenn P, K die Componenten der Schubkraft S beziehungsweise normal zur Schieberbahn und im Sinne der Koppel CB bedeuten,

$$P = S\,tg\,\gamma = S\,\lambda\,sin\,\alpha,\quad K = \frac{S}{cos\,\gamma} = \frac{S}{\sqrt{1 - \lambda^2 sin^2\alpha}} = S.$$

Mit der aus §. 72 hervorgehenden Bedeutung des Coefficienten μ' ist nun ein Elementarbestandtheil der Arbeit B:

$$dB = \mu' K k\, d(\alpha - \gamma) = \mu' S k\, d(\alpha - \gamma),$$

somit, da bei der halben Kurbelumdrehung sich der Winkel $ABC = \alpha - \gamma$ von 0 bis π ändert,

$$B = \mu' S k\, \pi.$$

Ferner ist, $d\gamma$ absolut verstanden:

$$dC = \mu' K s\, d\gamma = \mu' S s\, d\gamma,$$

also, da bei der halben Kurbelumdrehung γ von Null bis $max\,\gamma = max\,(\lambda\, sin\,\alpha) = \lambda$ zunimmt und dann wieder bis Null abnimmt,

$$C = 2\,\mu' S s\,\lambda.$$

Was endlich die Arbeit D betrifft, so kann, da der Ausdruck des Normaldruckes $P = S\lambda\, sin\,\alpha$ zwischen dem Schieber und seiner Gleitbahn schon den Factor λ enthält, der dem Drehungswinkel α der Kurbel entsprechende Schieberweg (§. 40, Gl. 3) einfach $= a\,(1 - cos\,\alpha)$, sein Differential $= a\, sin\,\alpha\, d\alpha$ gesetzt werden und somit, wenn μ den betreffenden Reibungscoefficienten bedeutet,

$$dD = \mu P a\, sin\,\alpha\, d\alpha = \mu S a \lambda\, sin^2\alpha\, d\alpha,$$

woraus sich durch Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$ ergiebt:

$$D = \mu S a \lambda \frac{\pi}{2}.$$

Hiernach ist:

$$m = \frac{B + C + D}{S \cdot 2a} = \left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{a} + \lambda \frac{s}{a}\right)\mu' + \frac{\pi}{4}\lambda\mu.$$

Auf eine ebenso sorgfältige und wirksame Abwartung der Reibungsflächen, wie bei Zapfen in unbeweglichen Lagern, ist in Fällen der hier in Rede stehenden Art nicht zu rechnen, auch nicht auf Verminderung des Arbeitsverlustes durch das Einlaufen von Zapfen, sofern damit, wie hier, der wechselnden Kraftrichtung wegen ein zu periodischen Stössen Veranlassung gebender todter Gang verbunden ist. Setzt man deshalb etwa

$\mu = 0{,}07$ und $\mu' = \frac{\pi}{2}\mu = 0{,}11$ nach §. 71, Gl. (5), so wird

$$m = \frac{0{,}173\,k + 0{,}11\,\lambda s}{a} + 0{,}055\,\lambda,$$

insbesondere mit durchschnittlich $s = \frac{3}{4}k$ und $\lambda = \frac{1}{5}$:

$$m = 0{,}19\,\frac{k}{a} + 0{,}011.$$

Schliesslich mag bemerkt werden, dass dieselben Ausdrücke ohne erheblichen Fehler auch bei veränderlicher Grösse der Schubkraft S zur Schätzung des mit einem Kurbelmechanismus verbundenen verhältnissmässigen Arbeitsverlustes durch Reibung zu Grunde gelegt werden können. Näherungsweise ist nämlich die auf den Schieberweg reducirte Reibung, d. i. die durch den angenäherten elementaren Schieberweg $= a \sin\alpha\, d\alpha$ dividirte elementare Reibungsarbeit für den Kurbelzapfen:

$$\frac{dB}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\alpha - \lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \lambda \cot g\, \alpha,$$

für den Schieberzapfen:

$$\frac{dC}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d\gamma}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \lambda \cot g\, \alpha$$

und für den Schieber selbst:

$$\frac{dD}{a \sin\alpha\, d\alpha} = \mu P \text{ proportional } \sin\alpha.$$

Während also der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die zwei Zapfenreibungen zusammen besonders an den Enden des Schieberweges (den grösseren Werthen von $\frac{1}{\sin\alpha}$ entsprechend) ins Gewicht fällt, ist er für die Gleitbahn des Schiebers gerade umgekehrt in der Mitte seines Weges am grössten, so dass eine wesentliche Aenderung der Grösse m durch die Veränderlichkeit von S nur dann zu erwarten sein würde, wenn $B + C$ entweder sehr gross oder sehr klein in Vergleich mit D, und S im ersten Falle von der Mitte gegen die Enden des Schieberweges, im zweiten umgekehrt von beiden Enden gegen die Mitte hin an Grösse zunähme. Wenn

aber, wie bei Dampfmaschinen, wo S den Dampfdruck auf den Kolben (nach Abzug der Kolbenreibung) bedeutet, diese Kraft nur gegen das eine der beiden Wegenden des Schiebers hin abnimmt, auch die Arbeiten $B+C$ und D (die den Factoren μ' und μ entsprechenden zwei Glieder obiger Ausdrücke von m) nicht allzu verschieden sind, wird der Werth von m durch solche Veränderlichkeit von S nicht wesentlich beeinflusst werden können.

III. Reibung von Schraubenpaaren.

§. 74. Schraubenpaare mit scharfem oder flachem Gewinde.

Die Elementenfläche (Berührungsfläche von Schraube und Mutter) sei eine Schraubenfläche von solcher Art, dass sie durch Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, welche, indem sie die Axe des Schraubenpaares unter constantem Winkel schneidet, zugleich längs derselben verschoben und um sie gedreht wird mit constantem Verhältnisse der gleichzeitigen elementaren Schiebungen und Drehungen. Gesucht wird das Moment M eines Kräftepaares, welches mit Rücksicht auf die Reibung in der Elementenfläche auf das eine der beiden Elemente S, S', etwa auf das Element S in einer zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebene wirken muss, um dieses Element S am anderen S' entlang zu schrauben entgegen einer axialen Kraft Q, wodurch S gegen S' gedrückt wird.

Der gegenseitige Normaldruck zwischen S und S', sowie die entsprechende Reibung findet in einem solchen Theile F der Elementenfläche statt, welche S im Sinne von Q, S' im umgekehrten Sinne begrenzt, und es hängt die gesuchte Beziehung zwischen Q und M von dem Gesetze ab, nach dem die Pressung in jener Fläche F vertheilt ist. In letzterer Hinsicht werde indessen angenommen, der Druck sei so vertheilt, dass er in der mittleren Schraubenlinie L concentrirt zu denken ist, in welcher die Fläche F von der mit dem Schraubenpaare coaxialen Cylinderfläche C geschnitten wird, deren Radius r das arithmetische Mittel des äusseren und inneren Gewindehalbmessers ist. Wird dann

$$M = Pr$$

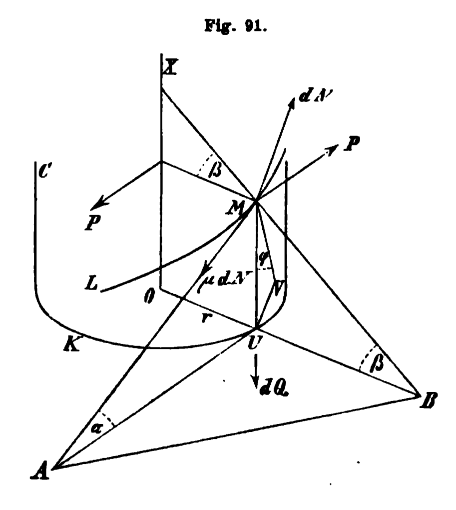
gesetzt, so handelt es sich um das Verhältniss der Kräfte P und Q als Function des Reibungscoefficienten $\mu = arctg\,\varrho$ und der Winkel α, β, unter denen beziehungsweise die Tangente der Schraubenlinie L und die erzeugende



Gerade der Schraubenfläche F gegen die zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebenen geneigt sind.

Für den beliebigen Punkt M (Fig. 91) der Schraubenlinie L sei MA ihre Tangente, MB die Erzeugende der Schraubenfläche F, MU die Erzeugende der Cylinderfläche C, und es seien A, B, U die Durchschnittspunkte dieser drei Geraden mit einer Ebene E, die im Punkte O normal zur Axe OX des Schraubenpaares ist und somit die Cylinderfläche C in einem Kreise K mit dem Radius r schneidet; UA berührt den Kreis K im Punkte U, während UB die Verlängerung des Radius OU ist, und es ist der Winkel $MAU = \alpha$, der Winkel $MBU = \beta$. Die Ebene AMB berührt die Schraubenfläche F im Punkte M, und wenn V die Projection des Punktes U auf diese Ebene ist, so sei der Winkel $UMV = \varphi$.

Fig. 91.



Auf ein Bogenelement MM' von L laste das Element dQ von Q, und es sei dN der Normaldruck, der in demselben vom Elemente S' des Schraubenpaares auf S nach der Richtung UV ausgeübt wird, folglich μdN die Reibung, die in MM' der relativen Bewegung von S gegen S' entgegen, also im Sinne MA gerichtet ist. Diese dreierlei Kräfte dQ, dN und μdN sind für alle Bogenelemente der Schraubenlinie L zusammen im Gleichgewichte mit dem Kräftepaare $= M = Pr$, von dessen entgegengesetzt gerichteten Kräften P, P die eine in M nach der Richtung AU angreifend gedacht werde, so dass die andere die Axe OX schneidet. Dieses Gleichgewicht erfordert, dass die Summe der Arbeiten aller Kräfte = Null ist für irgend eine relative Bewegung von S gegen S', die etwa so gross angenommen werde, dass der Weg der in M angreifenden Kraft P (Weg des Angriffspunktes im Sinne der Kraft) $= AU = 1$ ist; indem er dann für die andere, die Axe OX schneidende Kraft P = Null,

für jede Kraft $dQ = - UM = - tg\, \alpha$,

für jede Kraft $dN = 0$,

für jede Kraft $\mu dN = - AM = - \sec \alpha$

ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$P - \int dQ\, tg\,\alpha - \int \mu\, dN \sec\alpha = 0$$
$$P = Q\, tg\,\alpha + \mu N \sec\alpha.$$

N ist dadurch bestimmt, dass die Summe der Componenten aller Kräfte nach irgend einer Richtung, z. B. nach der Richtung der Axe = Null sein muss; daraus folgt:

$$\int dQ - \int dN \cos(VUM) + \int \mu\, dN \cos(AMU) = 0$$
$$Q - N \sin\varphi + \mu N \sin\alpha = 0,$$

und die Substitution des daraus folgenden Ausdruckes von

$$N = \frac{Q}{\sin\varphi - \mu \sin\alpha}$$

in obiger Gleichung für P giebt:

$$P = Q\left(tg\,\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha(\sin\varphi - \mu\sin\alpha)}\right) = Q\frac{\sin\alpha\sin\varphi + \mu\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\varphi - \mu\sin\alpha)}$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha\sin\varphi + \mu\cos\alpha}{\sin\varphi - \mu\sin\alpha}.$$

Um darin schliesslich φ durch α und β auszudrücken, kann man bemerken, dass in Bezug auf UA, UB, UM als Axen der x, y, z die Gleichung der Ebene AMB ist:

$$\frac{x}{UA} + \frac{y}{UB} + \frac{z}{UM} = 1$$

oder mit $UA = 1$, $UB = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$, $UM = tg\,\alpha$:

$$x\, tg\,\alpha + y\, tg\,\beta + z = tg\,\alpha.$$

Daraus folgt der *Cosinus* des Winkels VUM, den die Normale der Ebene AMB mit UM, also mit der z-Axe bildet:

$$\cos(VUM) = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}$$

und somit
$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu\cos\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}{1 - \mu\sin\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

insbesondere für Schrauben mit flachem Gewinde mit $\beta = 0$ und $\mu = tg\,\varrho$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\, tg\,\alpha} = tg(\alpha + \varrho) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus Gl. (1) ist ohne Weiteres ersichtlich, dass zur relativen Bewegung des einen gegen das andere Element des Schraubenpaares entgegen der auf ersteres wirkenden axialen Kraft Q eine um so kleinere Kraft P oder ein um so kleineres Kraftmoment $M = Pr$ nöthig ist, je kleiner der Winkel β ist, so dass in solchem Falle bezweckter Arbeitsleistung ein Schrauben-

paar mit flachem Gewinde den Vorzug verdient. Wenn aber durch die Kraft P resp. durch das Moment M das betreffende Element des Schraubenpaares nicht sowohl relativ gegen das andere entgegen der Kraft Q bewegt, als vielmehr an der Bewegung im Sinne von Q verhindert werden soll, wobei dann die Reibung entgegengesetzt gerichtet ist wie zuvor und deshalb μ und ϱ in den Gleichungen (1) und (2) entgegengesetzt zu nehmen sind, so ist P um so kleiner und um so eher negativ (entsprechend dem Erforderniss eines Zwanges zur Bewegung selbst im Sinne von Q), je grösser β ist. Um diesen Fall handelt es sich bei Befestigungsschrauben, die deshalb mit scharfem Gewinde auszuführen sind bei ausserdem kleiner Grösse des mittleren Steigungswinkels α. Nach der für solche Schrauben üblichen Whitworth'schen Scala ist in der That α meistens $< 3^0$, so dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$\cos\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha+tg^2\beta}=\sqrt{1+tg^2\beta}=\sec\beta$$

gesetzt werden kann und somit nach Gl. (1):

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+\mu\sec\beta}{1-\mu\,tg\,\alpha\sec\beta}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder auch mit $\mu\sec\beta=tg\,\varrho'$:

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\varrho'}{1-tg\,\alpha\,tg\,\varrho'}=tg(\alpha+\varrho')\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Mit dem üblichen Werthe von $\beta=27^0\,30'$ und mit $\mu=0{,}15$ ergiebt sich:

$$tg\,\varrho'=0{,}169;\quad \varrho'=9^0\,36'.$$

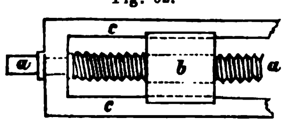
Bei Schraubenpaaren mit flachem Gewinde, die als Elementenpaare von Getrieben zu mechanischer Arbeitsleistung dienen, kann in der Regel auf grössere Glätte und Fettigkeit der Reibungsfläche gerechnet werden, entsprechend etwa:

$$\mu=tg\,\varrho=0{,}1;\quad \varrho=5^0\,43'.$$

§. 75. Beispiele.

1) Als Beispiel diene zunächst jene am häufigsten angewendete Form der coaxialen Schraubenkette, bei welcher, wie Fig. 62 (§. 49) andeutet, eines der drei coaxialen Schraubenpaare durch ein Drehkörperpaar, ein zweites durch ein Prismenpaar (beide als Specialfälle von Schraubenpaaren zu betrachten) ersetzt ist, und zwar bei Voraussetzung einer solchen Verwendung als Getriebe, dass in Bezug auf c als festgestelltes Glied das Glied b ent-

Fig. 62.



gegen einem axialen Widerstande Q bewegt werden soll durch Drehung der Schraube a vermittels eines Kraftmomentes M. Gesucht wird die Beziehung zwischen M und Q mit Rücksicht auf die Reibungen der Elementenpaare, entsprechend den Reibungscoefficienten:

$\mu = arctg\,\varrho$ für das Schraubenpaar b, a,

μ' für das Drehkörperpaar a, c,

μ'' für das Prismenpaar c, b.

Ist r der mittlere Radius, α der mittlere Steigungswinkel des flachen Gewindes des Schraubenpaares a, b, und ist A der axiale Druck zwischen a und b, sowie zwischen a und c, ferner M' das diesem Drucke entsprechende Reibungsmoment des Drehkörperpaares a, c, so ist nach Gl. (2) im vorigen Paragraph:

$$M = Pr + M' = Ar\,tg(\alpha + \varrho) + M'$$

oder mit $M' = \mu' A r'$, wo r' bei gegebener Spurzapfenfläche des Paares a, c nach §. 70 zu bestimmen ist:

$$M = A[r\,tg(\alpha + \varrho) + \mu' r'].$$

Ist ferner r'' die mittlere Entfernung der Gleitfläche zwischen b und c von der Schraubenaxe, somit der gegenseitige Normaldruck dieser Glieder

$$= \frac{M - M'}{r''} = \frac{Ar\,tg(\alpha + \varrho)}{r''}$$

und die entsprechende Reibung $R = \mu'' \dfrac{Ar\,tg(\alpha + \varrho)}{r''}$,

so ergiebt sich $Q = A - R = A\left(1 - \mu'' \dfrac{r}{r''}\,tg(\alpha + \varrho)\right)$

und durch Einsetzung des hieraus folgenden Ausdruckes von A in obiger Gleichung für M:

$$M = Qr \frac{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \dfrac{r'}{r}}{1 - \mu'' \dfrac{r}{r''}\,tg(\alpha + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ohne Reibungen, d. h. mit $\varrho = \mu' = \mu'' = 0$ wäre:

$$M_0 = Qr\,tg\,\alpha,$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\,\alpha \frac{1 - \mu'' \dfrac{r}{r''}\,tg(\alpha + \varrho)}{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \dfrac{r'}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Es sei z. B. der Querschnitt des Gewindes ein Quadrat, dessen Seite

$= {}^1/_8$ des äusseren $= {}^1/_6$ des inneren, also $= {}^1/_7$ des mittleren Gewindedurchmessers d ist; die Steigung s ist dann doppelt so gross, also

$$s = \frac{2}{7} d$$

$$\text{und } tg\,\alpha = \frac{s}{\pi d} = \frac{2}{7\pi} = 0{,}091, \text{ entsprechend } \alpha = 5^0\,12'.$$

Die Schraube a stütze sich gegen das Lager (das festgestellte Glied c) auf der in Fig. 62 abgebrochen gezeichneten rechten Seite in einer kreisförmigen ebenen Fläche, während sie auf der linken Seite nur cylindrisch (ohne Anläufe resp. vortretende Ringe) mit dem Gliede c gepaart sei; dieses Cylinderpaar, jene ebene Stützfläche und die axiale Kraft A als Schliessungskraft bedingen dann zusammen eine Paarung der Glieder a und c, deren kinematischer Charakter der eines Drehkörperpaares ist. Der Radius jener kreisförmigen ebenen Spurzapfenfläche sei = dem inneren Gewindehalbmesser $= \frac{6}{7} r$, so dass bei Abstraction von dem Einflusse fortschreitender Abnutzung nach §. 70, Gl. (5) gesetzt werden kann:

$$r' = \frac{2}{3}\,\frac{6}{7}\,r = \frac{4}{7}\,r = 0{,}57\,r;$$

endlich sei $r'' = 4\,r$. Wird dann nach vorigem Paragraph

$$\varrho = 5^0\,43', \text{ entsprechend } \mu = 0{,}1$$

angenommen, also $tg\,(\alpha + \varrho) = tg\,(10^0\,55') = 0{,}193$
und wird auch $\mu' = \mu'' = 0{,}1$ gesetzt, so findet man nach Gl. (2):

$$\eta = 0{,}091\;\frac{1 - 0{,}25\,.\,0{,}0193}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}36.$$

Dieser geringe Wirkungsgrad rührt nur zu sehr kleinem Theile von der Reibung des Prismenpaares b, c her; denn mit $\mu'' = 0$ wird η nicht wesentlich $> 0{,}36$. Zum grössten Theile fällt die Kleinheit von η der Reibung des Schraubenpaares zur Last, doch hat auch die Spurzapfenreibung erheblichen Einfluss darauf, indem sich mit $\mu' = \mu'' = 0$ ergiebt:

$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = \frac{0{,}091}{0{,}193} = 0{,}47.$$

Durch diese Spurzapfenreibung des Paares a, c würde η in noch höherem Grade vermindert werden, wenn die betreffende Reibungsfläche nicht, wie hier angenommen, eine volle Kreisfläche, sondern eine Ringfläche wäre, deren innerer Radius dann wenigstens = dem Radius jener Kreisfläche sein würde. Uebrigens ist α hier ungewöhnlich gross angenommen worden; mit einem kleineren Steigungswinkel α ist auch η noch kleiner.

2) Eine coaxiale Schraubenkette der vorbesprochenen Art (entsprechend Fig. 62 bei Umkehrung des Schraubenpaares a, b, d. h. mit a als Mutter und b als Schraube) wird auch bei **Schraubenbefestigungen** von den zu verbindenden Körpern als dem Gliede c, von der sie durchdringenden Befestigungsschraube b und von der Mutter a gebildet, durch deren Anziehung mittels eines sie drehenden Kraftmoments M jene Körper mit einem gewissen gegenseitigen Drucke $= Q$ zusammengepresst werden sollen. Indem aber hier (abgesehen von untergeordneten Deformationswirkungen) die Glieder b und c nicht gegen einander verschoben werden, fällt die Reibung des Prismenpaares b, c ausser Betracht und ergiebt sich nach Gl. (1) mit $\mu''=0$ und ϱ' statt ϱ (entsprechend dem hier vorliegenden Falle eines scharfen Gewindes):

$$M=\left[tg\,(\alpha+\varrho')+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Werden hier ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen, so bedeutet M das Kraftmoment, das die Mutter am Rückgange (wobei auch die Reibungen im entgegengesetzten Sinne wirken) zu hindern im Stande ist; es muss negativ sein, damit die Mutter nicht von selbst, d. h. bei $M=0$ blos durch die Wirkung der Kraft Q zurückgehen könne. Das Kraftmoment M_1, womit dann die angezogene Mutter im umgekehrten Sinne gedreht werden muss, um sie zu lösen und damit die Befestigung wieder aufzuheben, ergiebt sich aus Gl. (3), indem ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen werden und darauf der ganze Ausdruck entgegengesetzt genommen wird; es ist also:

$$M_1=\left[tg\,(\varrho'-\alpha)+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Die nöthige Eigenschaft der Selbstsperrung kommt dieser Schraubenbefestigung in um so höherem Grade zu, je weniger $M_1 < M$, je kleiner also α ist.

Nach der Whitworth'schen Scala ist $\alpha = 2^0$ bis $3^0\,30'$ und mag, da die Verschiedenheiten dieses Winkels im Vergleich mit dem viel grösseren Reibungswinkel ϱ' und dessen Unsicherheit wenig ins Gewicht fallen, im Durchschnitt $\alpha = 2^0\,45'$ gesetzt werden. Damit und mit $\varrho'= 9^0\,36'$ (§. 74), ferner mit $\mu'=0{,}15$ und $r'=1{,}5\,r$, nahe entsprechend nach Gl. (3) in §. 70 einer ringförmigen Auflagerfläche der Schraubenmutter, deren Radien $=r$ und $1{,}9\,r$ sind, ergiebt sich:

$$M=0{,}444\;Qr;\quad M_1=0{,}345\;Qr=0{,}78\,M.$$

3) Der Wirkungsgrad eines singulären Schraubengetriebes (§. 51) ist mit alleiniger Rücksicht auf die Reibung seines Schraubenpaares, wodurch er vorwiegend bedingt zu werden pflegt,



$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)}$$

bei Voraussetzung eines flachen Gewindes, und er wurde z. B. oben unter 1) $= 0{,}47$ gefunden für $\alpha = 5^0\,12'$ und $\varrho = 5^0\,43'$. Er ist $= 0$ für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 90^0 - \varrho$, dazwischen am grössten für einen solchen Steigungswinkel α, welcher der Gleichung entspricht:

$$\frac{tg\,(\alpha + \varrho)}{cos^2\,\alpha} - \frac{tg\,\alpha}{cos^2\,(\alpha + \varrho)} = 0,\ \text{woraus}\ sin\,(2\,\alpha + 2\,\varrho) = sin\,2\,\alpha$$

$$4\,\alpha + 2\,\varrho = 180^0,\ \text{also}\ \alpha = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$$

$$\text{und}\ max\,\eta = \frac{tg\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{tg\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = tg^2\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

folgt, z. B. mit $\varrho = 5^0\,43'$, entsprechend $\mu = 0{,}1$:

$$\alpha = 42^0\,8'\ \text{und}\ max\,\eta = 0{,}82.$$

Diesen vortheilhaftesten Verhältnissen kann dadurch wenigstens näher zu kommen gesucht werden, ohne die der Gleichung

$$M_0 = Qr\,tg\,\alpha$$

entsprechende Beziehung zwischen bewegender Kraft und Nutzwiderstand bei Abstraction von Reibungswiderständen zu beeinträchtigen, dass jenes Getriebe, Fig. 62, durch ein sogenanntes Differentialschraubengetriebe ersetzt, nämlich dahin abgeändert wird, dass das eingängige Schraubenpaar a, b durch ein $n$gängiges, das Drehkörperpaar a, c aber durch ein $(n - 1)$gängiges, in gleichem Sinne mit jenem gewundenes Schraubenpaar ersetzt wird. Zu der Steigung $= s$ und dem mittleren Steigungswinkel $= \alpha$ eines eingängigen Schraubenpaares von gleichem Gewindequerschnitte und gleichem Gewindehalbmesser r stehen die Steigung und der mittlere Steigungswinkel jener Schraubenpaare a, b und a, c in der Beziehung:

$$s_n = ns\ \text{und}\ tg\,\alpha_n = n\,tg\,\alpha$$

$$s_{n-1} = (n - 1)\,s\ \text{und}\ tg\,\alpha_{n-1} = (n - 1)\,tg\,\alpha.$$

Sind es dann auch die Reibungen von zwei Schraubenpaaren, die jetzt den Wirkungsgrad η bedingen, so sind sie doch zusammen nur ungefähr ebenso gross wie die eines einzelnen eingängigen Schraubenpaares, wogegen die Spurzapfenreibung des früheren Drehkörperpaares a, c in Wegfall gekommen ist. Der Wirkungsgrad η dieses Differentialschraubengetriebes ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ist wieder A der axiale Druck zwischen a und b sowie zwischen a und c, so ist mit Rücksicht darauf, dass die relative Bewegung von a gegen

b entgegen der von *a* auf *b* ausgeübten Kraft A, dagegen die ebenso gerichtete relative Bewegung von *a* gegen *c* im Sinne der von *a* auf *c* ausgeübten (der vorigen entgegengesetzten) Kraft A stattfindet,

$$M = Ar\,[tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)],$$

während mit Rücksicht auf die Reibung des Prismenpaares *b*, *c* gemäss der Entwickelung unter 1)

$$Q = A\left[1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)\right]$$

ist. Daraus folgt:

$$M = Qr\,\frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$M_0 = Qr\,(tg\,\alpha_n - tg\,\alpha_{n-1}) = Qr\,tg\,\alpha$$

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\,\alpha\,\frac{1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Z. B. mit $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $r'' = 4\,r$, $\mu'' = 0{,}1$ findet man

für $n =$ 2	3	4
$\eta =$ 0,49	0,48	0,46

wesentlich $>$ 0,36 und wenig verschieden von $\frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = 0{,}47$. Uebrigens zeigt sich die Anwendung einer mehr als zweigängigen Schraube hier ohne Nutzen; auch wird η noch etwas grösser (um so mehr, je weniger $r'' > r$ ist), wenn das Schraubenpaar *a*, *c* mit *n*, dagegen *a*, *b* mit $n - 1$ Gängen ausgeführt wird. Es ist dann

$$M = Qr\,\frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

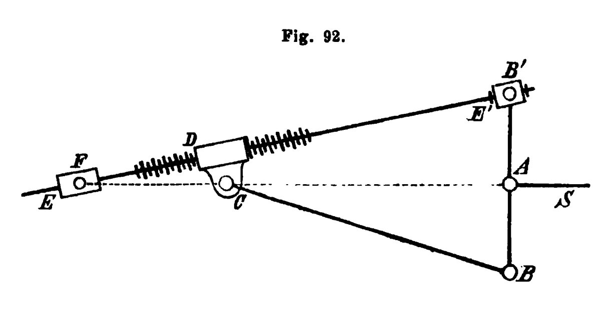
$$\eta = tg\,\alpha\,\frac{1 - \mu''\frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei zu bemerken ist, dass, wenn auch $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ negativ werden sollte (wie bei obigen Beispielen für $n = 2$), doch das Glied mit μ'' negativ bleiben muss, indem hier die Zeichenumkehrung von $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ nur die Bedeutung hat, dass der Normaldruck des Gliedes *b* auf das Glied *c* in den Gleitflächen des Prismenpaares *b*, *c* im umgekehrten Sinne gerichtet ist.

4) Als Beispiel eines zwar elementaren, aber zusammengesetzten Schraubengetriebes diene das von **Rogers** angegebene **Steuerruder-**

getriebe: Fig. 92. Die verticale Welle A des Steuers S trägt den Hebel BB', dessen Arm AB durch die Koppel BC mit der Schraubenmutter CD zusammenhängt (B und C sind Drehkörperpaare mit verticalen Axen), während die zugehörige Schraube DE' den anderen Arm AB' vermittels eines Zwischengliedes $B'E'$ angreift, das mit beiden Theilen durch die Drehkörperpaare B' und E' gepaart ist (die Axe von B' ist vertical, die von E' fällt mit der horizontalen Schraubenaxe zusammen). Die Schraubenspindel, cylindrisch (coaxial zum Schraubenpaare D) gepaart mit der um eine verticale Axe F drehbaren Hülse EF, wird an ihrem über E hinaus liegenden Ende durch das Steuerrad gedreht und bewirkt dadurch eine entsprechend kleinere Drehung des Steuerruders. Die Kette dieses Getriebes besteht aus der sechsgliedrigen singulären Schraubenkette $ABCDEF$ und der fünfgliedrigen Drehkörperkette $AB'E'EF$, die so zusammengesetzt sind, dass sie das festgestellte Glied FA gemein haben und dass AB mit AB', DE mit $E'E$ zu je einem Gliede verbunden sind. Indem das Cylinderpaar E als Ersatz eines zwischen DE und EF befindlichen Gliedes betrachtet werden kann, das mit einem jener zwei Glieder durch ein zum Schraubenpaare D coaxiales Drehkörperpaar R, mit dem anderen durch ein Prismenpaar P (Schubrichtung parallel den Axen von R und D) gepaart ist, so erscheint die erstere jener zwei das vorliegende Getriebe constituirenden einfachen Ketten als eine siebengliedrige singuläre Schraubenkette $ABCDRPF$ mit nur zwangläufigen niederen Elementenpaaren, die nicht zwangläufig ist, weil sie das Prismenpaar P und das Drehkörperpaar F mehr enthält, als die Kette $ABCDR$, die nach Fig. 65, §. 51, als fünfgliedrige singuläre Schraubenkette zwangläufig wäre. Die fehlende Zwangläufigkeit der fraglichen Kette ist aber dadurch hergestellt, dass ihr Glied FA mit dem gleichnamigen Gliede FA, das Glied AB mit dem Gliede AB' der zwangläufigen Schubkurbelkette $AB'PF$ fest verbunden wurde, welcher Schubkurbelkette dann freilich, um die Schraube als das Glied $B'P$ derselben verwenden zu können, unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit das weitere (fünfte) Glied $B'E'$ mit dem Drehkörperpaare E' einschaltungsweise hinzugefügt werden musste

Fig. 92.



unter gleichzeitigem Ersatze des Prismenpaares P durch das Cylinderpaar E.

Es sei nun das Kraftmoment M' zu bestimmen, mit welchem die Schraubenspindel EE' gedreht werden muss behufs Ueberwindung des Widerstandsmomentes M, das sich der Drehung des Steuerruders S um seine Axe A entgegensetzt. Insofern das Verhältniss $\frac{M'}{M}$ von der augenblicklichen Abweichung des Steuers aus seiner in Fig. 92 angenommenen mittleren Lage abhängt, werde letztere bei der Rechnung zu Grunde gelegt, und es sei φ' der Drehungswinkel der Schraube, der einem sehr kleinen Drehungswinkel $= \varphi$ des Steuers aus jener mittleren Lage entspricht. Es ist dann M' dadurch bestimmt, dass die aufgewendete Arbeit $M'\varphi'$ gleich sein muss der Nutzwiderstandsarbeit $M\varphi +$ den entsprechenden Arbeiten der verschiedenen Reibungswiderstände. Was letztere betrifft, so mag es genügen, ausser der Reibung des Schraubenpaares D nur die Spurzapfenreibung des Drehkörperpaares E' und die Tragzapfenreibungen der Drehkörperpaare B, B' zu berücksichtigen, da die Reibungsarbeiten der Paare C und F wegen Geringfügigkeit der betreffenden relativen Wege, die des Drehkörperpaares A und des Cylinderpaares E wegen Geringfügigkeit des Druckes von untergeordneter Grösse sind. Ist aber, wie ferner angenommen werde, die Länge $AB = AB' = a$ nur klein gegen die Längen AC und AF, so dass ACB und AFB' wenig veränderliche kleine Winkel sind und der axiale Druck zwischen den Elementen des Schraubenpaares $D =$ dem axialen Drucke in der Spurzapfenfläche des Paares $E' =$ den zu den Zapfenaxen B und B' senkrechten Drucken dieser Tragzapfen $= \frac{1}{2}\frac{M}{a}$ gesetzt werden kann, so ist die Reibungsarbeit des Schraubenpaares D

$$= \frac{1}{2}\frac{M}{a} r\,[tg\,(\alpha + \varrho) - tg\,\alpha]\,\varphi',$$

unter r den mittleren Gewindehalbmesser, α den mittleren Steigungswinkel und ϱ den betreffenden Reibungswinkel verstanden, ferner die Arbeit der Spurzapfenreibung des Paares E'

$$= \mu' \cdot \frac{1}{2}\frac{M}{a} r'\varphi',$$

wenn r' den mittleren Radius der betreffenden Reibungsfläche bedeutet, und endlich die Summe der Reibungsarbeiten an den Zapfen B und B', wenn deren Radien $= b$ sind und der betreffende Reibungscoefficient $= \mu'$ ist,

$$= \mu' \frac{M}{a} b\varphi,$$

da die Aenderungen der Winkel ABC und $AB'D$ absolut genommen $= \varphi$ gesetzt werden können. Somit ist:

$$M'\varphi' = M\varphi + \frac{1}{2}\frac{M}{a}r\,[tg(\alpha+\varrho) - tg\,\alpha]\,\varphi' + \mu'.\frac{1}{2}\frac{M}{a}r'\varphi' + \mu'\frac{M}{a}b\varphi$$

und folgt daraus durch Division mit $M\varphi'$, da die relative Axialbewegung der Elemente des Schraubenpaares unter obiger Voraussetzung, dass ACB und AFB' kleine Winkel sind,

$$r\varphi'\,tg\,\alpha = 2\,a\varphi,\ \text{also}\ \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}tg\,\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r} + \mu'\frac{b}{a}tg\,\alpha\right].$$

Dieser Ausdruck, in welchem $\frac{r'}{r}$ ein unechter, $\frac{b}{a}$ ein kleiner echter Bruch ist, lässt erkennen, dass auch die Reibungen der Paare B, B' von nur untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit den Reibungen der Paare D und E' sind, dass also ohne wesentlichen Fehler zu setzen ist:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Der $\varrho = 0$ und $\mu' = 0$ entsprechende Werth M'_0 von M' ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{M'_0}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}tg\,\alpha$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M'_0}{M'} = \frac{tg\,\alpha}{tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Z. B. mit den oben angenommenen Werthen: $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $\mu' = 0{,}1$ und mit $\frac{r'}{r} = 1{,}2$ findet man

$$M' = 0{,}16\frac{r}{a}M \text{ und } \eta = 0{,}29.$$

Dem Getriebe kommt die Eigenschaft der Selbstsperrung zu, insofern das Steuer nicht von selbst in die Mittellage zurückkehrt, wenn das Kraftmoment M' zu wirken aufhört, sondern ein umgekehrt drehendes Kraftmoment:

$$M'_1 = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg(\varrho-\alpha) + \mu'\frac{r'}{r}\right]$$

dazu erforderlich ist, das im vorliegenden Falle $= 0{,}41\ M$ gefunden wird.

IV. Zahnreibung.

§. 76. Zahnreibung von Cylinderrädern.

Es werde zunächst ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen, dass die Zähne nur hinter der Axenebene, d. h. nach dem Durchgange durch dieselbe auf einander wirken, jedes Zähnepaar so lange, bis das folgende in der Axenebene, nämlich in der Polaxe zur Berührung kommt. Die Bogenlängen $Pa = Pa'$ (Fig. 93), mit denen sich unterdessen die Theilkreise B, B' auf einander abwälzen, sei $= b$. Indem dabei die Berührungslinie des treibenden Zahnkopfes, von der Axe A des betreffenden Rades sich entfernend, den Weg $ap = s$, die Berührungslinie des getriebenen Zahnfusses dagegen, der betreffenden Radaxe A' sich nähernd, den Weg $a'p$ durchläuft, ist $s - s'$ der dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Weg der Reibung, nämlich der Betrag der relativ gleitenden Bewegung der Zähne, während sie zugleich längs einem Wege $= s'$ sich auf einander abwälzen. Ist b hinlänglich klein in Vergleich mit den Radien r, r' der Theilkreise B, B', so kann jener Reibungsweg ohne erheblichen Fehler = der Projection der Geraden aa' auf die Centrale AA' (Fig. 93), also

$$s - s' = r\left(1 - \cos\frac{b}{r}\right) + r'\left(1 - \cos\frac{b}{r'}\right)$$

und dabei $$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2}, \quad \cos\frac{b}{r'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r'^2},$$

also $$s - s' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{b^2}{2}$$

gesetzt werden. Der Druck, den die Zähne auf einander ausüben, ist im Allgemeinen veränderlich und von der Theilrisskraft $= P$ nach Grösse und Richtung verschieden, mit der sie bei ihrer Berührung in der Polaxe im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise auf einander wirken; wird aber von diesen Abweichungen abgesehen, also die Reibungsgrösse constant $= \mu P$ gesetzt, unter μ den Reibungscoefficient verstanden, so ist die dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Reibungsarbeit:

$$\mu P(s - s') = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b^2}{2}P,$$

woraus die auf die Theilkreise reducirte Reibung R durch Division mit b sich ergiebt:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \quad \ldots \quad (1).$$

$\frac{R}{P}$ ist der durch die Zahnreibung verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, nämlich das Verhältniss der Reibungsarbeit $= Rb$ zu der Arbeit $= Pb$, die ohne Reibung gleichzeitig durch die Räder übertragen würde.

Dieselben, somit auch zu derselben Gleichung (1) führenden Betrachtungen gelten offenbar für den Fall, dass die Berührung der Zähne nur vor der Axenebene stattfindet. Wenn ferner mehr als ein Paar Zähne hinter oder vor der Axenebene sich gleichzeitig berühren, so zerfällt zwar der ganze Zahndruck P in eine entsprechende Zahl von Theilen, doch bleibt Gl. (1) gültig, da für jedes der in Berührung befindlichen Zähnepaare der betreffende Theil von P mit demselben Factor

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2}$$

zu multipliciren ist, um in der Summe aller dieser Producte = dem Producte jenes gemeinschaftlichen Factors und der Summe aller Theilwerthe von P wieder die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung zu erhalten.

Wenn aber, wie es im Allgemeinen der Fall ist, die Zähne sowohl hinter wie vor der Axenebene auf einander wirken so, dass der Eingriffsbogen, d. h. der Abwälzungsbogen der Theilkreise, welcher der Berührungsdauer eines Zähnepaares entspricht, hinter der Axenebene $= b_1$, vor derselben $= b_2$ ist, so ergiebt sich nach Gl. (1):

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}(b_1 P_1 + b_2 P_2) \quad \ldots \quad (2),$$

unter P_1 und P_2 die Theile von P verstanden, mit denen beziehungsweise die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne auf einander wirken. Hier ist, falls b_1 und b_2 verschieden gross sind, die Reibung R von dem Verhältnisse abhängig, nach welchem P in die zwei Theile P_1 und P_2 zerfällt. Während dieses Verhältniss bei neuen oder neu gelagerten Rädern mehr oder weniger von zufälligen Umständen abhängen wird, lässt sich ohne Zweifel um so zutreffender

$$P_1 : P_2 = b_1 : b_2,$$

also

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}\frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1 + b_2} P \quad \ldots \quad (3)$$

setzen, je mehr die Vertheilung des Zahndruckes unter die verschiedenen gleichzeitig in Berührung befindlichen Zähnepaare durch ihre zunehmende Abnutzung bedingt wird. Wenn dann der ganze Eingriffbogen $= b_1 + b_2$ mit Rücksicht auf die Anzahl der Zähnepaare, die im Durchschnitt gleich-

zeitig in Berührung sein sollen, gegeben ist, b_1 und b_2 einzeln aber nicht durch die Verzahnungsart bestimmt sind, so ist es mit Rücksicht auf R am vortheilhaftesten, d. h. es ist R am kleinsten, wenn $b_1 = b_2$ gemacht wird. Mit $b_1 = b_2 = b$ geht aber der Ausdruck (3) von R wieder in den Ausdruck (1) über, der übrigens in diesem Falle auch unmittelbar aus Gl. (2) sich ergiebt, und zwar unabhängig von dem Verhältnisse, in welchem P in die Bestandtheile P_1 und P_2 zerfällt.

Im Durchschnitt pflegt $b_1 = b_2 = b =$ der sogenannten Theilung zu sein, d. h. = der im Theilkreise gemessenen Entfernung homologer Punkte benachbarter Zähne, so dass beständig zwei Zähnepaare (eins hinter, eins vor der Axenebene) in Eingriff sind. Indem dann

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'}, \text{ also } \frac{b}{r} = \frac{2\pi}{z} \text{ und } \frac{b}{r'} = \frac{2\pi}{z'}$$

ist, unter z und z' die Zähnezahlen der betreffenden Räder verstanden, ergiebt sich aus Gl. (1):

$$R = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wäre $b_1 = b_2 =$ der $m$fachen Theilung, so wäre auch $R =$ dem $m$fachen dieses Werthes, ebenso wenn nur einer der Bögen b_1, $b_2 =$ der $m$fachen Theilung, der andere = Null wäre. —

Für den **Eingriff eines Zahnrades und einer Zahnstange** ist, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des Rades bedeutet, in obiger Gleichung $r' = \infty$ resp. $z' = \infty$ zu setzen, so dass insbesondere aus Gl. (4) folgt:

$$R = \frac{1}{z}\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Den Fall des **inneren Eingriffes** endlich kann man sich, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des inneren Rades bedeutet, aus dem Falle eines äusseren Eingriffes durch stetige Aenderung des Radius r' hervorgegangen denken, wobei der letztere, indem er wachsend durch ∞ (einer Zahnstange entsprechend) hindurch geht, für das Hohlrad negativ wird. Oder wenn r' nach wie vor seinen Absolutwerth bedeutet, so ist in den Gleichungen (1)—(3) das Vorzeichen von $\frac{1}{r'}$ umzukehren, wie auch leicht durch eine der obigen ganz analoge directe Ableitung sich ergiebt. Ebenso ist dann, unter z' die Zähnezahl des Hohlrades verstanden, nach Gl. (4):

$$R = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}\right)\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Was schliesslich den Reibungscoefficient betrifft, so kann in der Regel je nach der grösseren oder geringeren Fettigkeit und Glätte der Zahnflächen gesetzt werden:

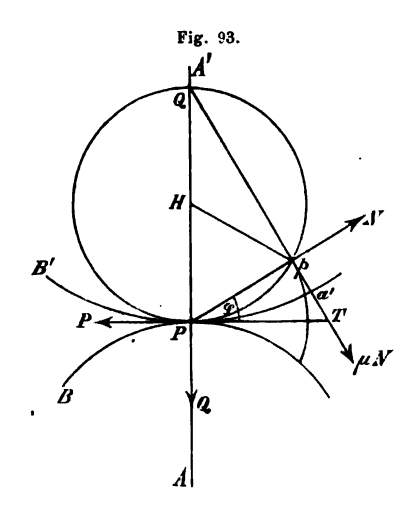
$$\pi\mu = \frac{1}{3} \text{ bis } \frac{2}{5}, \text{ entsprechend } \mu = 0,11 \text{ bis } 0,13.$$

§. 77. Einfluss der Zahnform.

Durch die angenäherte Entwickelung im vorigen Paragraphen hat sich die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung R unabhängig von der Zahnform ergeben. Die Frage, ob und in welcher Weise letztere etwa von Einfluss sei, erfordert eine genauere Prüfung, die dann zugleich ein Urtheil gewähren wird über den die Zapfenreibungen der betreffenden Wellen beeinflussenden Druck, den die Räder bei Uebertragung einer gewissen Theilrisskraft im Sinne der Centrale AA' ihrer Theilkreise auf einander ausüben.

Sind zu dem Ende (Fig. 93) $ap = \sigma$ und $a'p = \sigma'$ die längs den Zahnprofilen gemessenen Wege ihres Berührungspunktes p, die dem Abwälzungsbogen $Pa = Pa' = x$ der Theilkreise entsprechen, ist $Pp = y$ die Entfernung des Punktes p vom Pol P, ferner N der nach Pp gerichtete Normaldruck zweier Zähne und φ dessen Neigungswinkel gegen die gemeinsame Tangente der Theilkreise, so ist, wenn zunächst wieder ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen wird, dass derselbe nur hinter oder nur vor der Axenebene stattfindet, dass ferner beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist und zwar jedes Paar während einer Abwälzung der Theilkreise mit den Bögen $x = b$, entsprechend den Wegen $\sigma = s$ und $\sigma' = s'$ des Berührungspunktes p der Zahnprofile, der Mittelwerth der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung:

Fig. 93.



$$R = \frac{\mu}{b} \int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma').$$

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der Theilkreise, deren Radien wieder $AP = r$ und $A'P = r'$ seien, entsprechen die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ derselben um ihre Mittelpunkte A, A'; die relative Drehung des einen gegen den anderen Theilkreis um den Pol P ist aber die Resultante aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen Drehungswinkel, somit = ihrer Summe bei dem hier vorausgesetzten, entgegengesetzten Drehungsrichtungen um A, A' entsprechenden äusseren Eingriffe, und indem dieser elementare relative Drehungswinkel $= \frac{dx}{r} + \frac{dx}{r'}$ durch Multiplication mit $Pp = y$ den relativen Weg des Punktes p des einen Zahnprofils gegen das andere ergiebt, ist

$$d\sigma - d\sigma' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) y\, dx$$

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{\mu}{b} \int_0^b N y\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Ist nun P die constante Theilrisskraft, nämlich der Widerstand, den das getriebene dem treibenden Rade im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise entgegensetzt, Q der im Sinne der Centrale ausgeübte Widerstand, so sind die Kräfte P, Q, N und die Reibung μN in der Weise am getriebenen Rade im Gleichgewicht, wie es die Pfeilspitzen in Fig. 93 unter der Voraussetzung andeuten, dass der Eingriff hinter der Axenebene stattfindet, dass also das um A drehbare Rad das treibende ist. Dem Gleichgewicht jener Kräfte entsprechen die Gleichungen:

$$P = N \cos\varphi + \mu N \sin\varphi$$
$$Q = N \sin\varphi - \mu N \cos\varphi.$$

Findet der Eingriff vor der Axenebene statt, ist also in Fig. 93 das um A' drehbare Rad das treibende, so ist dessen Normaldruck N auf den betreffenden Zahn des getriebenen Rades umgekehrt wie in Fig. 93 gerichtet, und sind ebenso die Widerstände P, Q des getriebenen Rades entgegengesetzt gerichtet zu denken; die Reibung μN wirkt aber auf den getriebenen Zahn nach wie vor in dem durch die Figur angegebenen Sinne. In obigen zwei Gleichgewichtsbedingungen sind deshalb die linken Seiten und die ersten Glieder auf den rechten Seiten entgegengesetzt zu nehmen, oder es ist, was auf dasselbe hinaus läuft, $-\mu$ statt μ zu setzen, so dass sich daraus für beide Fälle zusammen ergiebt:

$$N = \frac{P}{\cos\varphi \pm \mu \sin\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$Q = P\frac{\sin\varphi \mp \mu\cos\varphi}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi} = P\frac{tg\,\varphi \mp tg\,\varrho}{1 \pm tg\,\varphi\, tg\,\varrho} = P\,tg(\varphi \mp \varrho) \ldots . (3),$$

unter ϱ den Reibungswinkel (§. 66) verstanden. Dabei gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem der Eingriff hinter oder vor der Axenebene stattfindet, und man erkennt aus Gl. (3), dass Q im letzteren Falle grösser ist. Bei Evolventenzähnen, bei denen φ einen constanten Werth hat, würde Q für den Eingriff hinter der Axenebene = Null sein, wenn $\varphi = \varrho$ wäre. In geringerem Grade, als Q, fällt nach Gl. (2) auch N und somit die Reibung μN vor der Axenebene grösser aus, als dahinter, wozu noch der Umstand hinzukommt, dass der im letzten Falle grössere Druck Q, indem er die Räder aus einander zu drängen strebt, vibrirende Bewegungen derselben verursachen und dadurch die Abnutzung der Zähne noch mehr vergrössern kann, wie es die Erfahrung bestätigt.

Die Einführung des Ausdruckes (2) von N in Gl. (1) giebt:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi},$$

wofür mit Rücksicht darauf, dass $\mu\sin\varphi$ stets sehr klein in Vergleich mit $\cos\varphi$, dass also $\mu\,tg\,\varphi$ ein sehr kleiner Bruch ist, gesetzt werden kann:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b(1 + \mu\,tg\,\alpha)}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

unter α einen Mittelwerth von φ verstanden, oder noch einfacher:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ebenso wie im vorigen Paragraphen ist dann auch wieder die unveränderte Gültigkeit dieser Ausdrücke zu erkennen, wenn gleichzeitig mehrere Zähnepaare auf der einen oder der anderen Seite der Axenebene in Berührung sind, wogegen bei beiderseits von dieser Ebene zugleich stattfindendem Eingriffe die reducirte Reibung R im Allgemeinen als Summe von zwei Bestandtheilen darstellbar ist, die nach Gl. (4) oder (5) sich ergeben auf Grund einer Annahme in Betreff des Vertheilungsverhältnisses von P unter die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne. Nur wenn im letzten Falle die beiderseitigen Eingriffbögen b gleich gross sind, wobei Gl. (4) unbedingt durch die Gleichung (5) zu ersetzen ist, gilt diese unverändert als Ausdruck des resultirenden Werthes von R. Sie (und ebenso dann auch die daraus für einen inneren Eingriff durch Umkehrung des Vorzeichens von r oder r' hervorgehende Gleichung) liefert für ver-

schiedene Verzahnungsarten etwas verschiedene Werthe von R, sofern dabei y und φ verschiedene Functionen von x sind.

Bei Evolventenzähnen (§. 19) ist φ constant und $y = x \cos \varphi$, also

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

übereinstimmend mit der allgemeinen Näherungsformel (1) im vorigen Paragraphen.

Bei Cykloidenzähnen (§. 17) ist, unter H (Fig. 93) den Mittelpunkt, $PQ = h$ den in der Centrale AA' liegenden Durchmesser des Hülfskreises verstanden, der durch äussere resp. innere Abwälzung auf den Theilkreisen B, B' mit dem Punkte p die Zahnprofile ap und $a'p$ beschreibt, und wenn T der Schnittpunkt der Geraden Qp mit der gemeinsamen Tangente der Theilkreise ist,

$$\frac{y}{\cos \varphi} = PT = h\, tg\, (PQp) = h\, tg\, \frac{1}{2}(PHp) = h\, tg\, \frac{x}{h},$$

da der Bogen Pp des Hülfskreises = den Bögen Pa, Pa' der Theilkreise, also $= x$ ist. Somit ergiebt sich das in Gl. (5) vorkommende Integral:

$$\int_0^b \frac{y\, dx}{\cos \varphi} = h^2 \int tg\, \frac{x}{h}\, d\left(\frac{x}{h}\right) = -h^2 \ln \cos \frac{b}{h}$$

oder auch wegen $tg\, \frac{x}{h} = \frac{x}{h} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{h^3} + \ldots$

$$\int_0^b \frac{y\, dx}{\cos \varphi} = h^2\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{b^4}{h^4} + \ldots\right) = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right)$$

und damit nach Gl. (5):

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right) \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Die Reibung von Cykloidenzähnen ist also etwas grösser, als die von Evolventenzähnen; doch pflegt der Unterschied und überhaupt der Einfluss der Zahnform auf die hier in Rede stehende Reibung nicht so bedeutend zu sein, dass er in Vergleich mit der Unsicherheit des Coefficienten μ bei Schätzung des betreffenden Arbeitsverlustes besondere Beachtung erforderte. Wäre z. B. $h = r'$ (das Zahnprofil $a'p$ in Fig. 93 eine radiale Gerade) und $b =$ der Theilung, so wäre, unter z' die Zähnezahl des um A' drehbaren Rades verstanden,

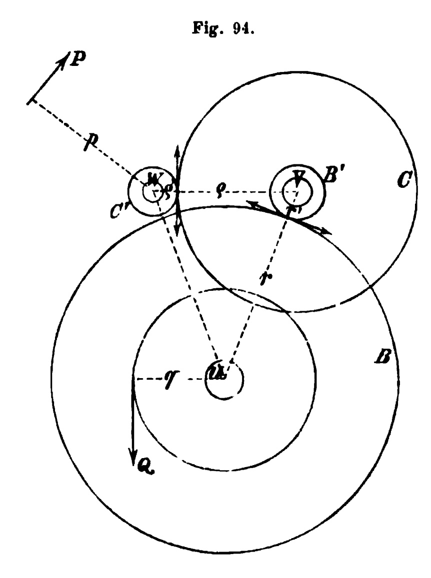
$$\frac{b}{h} = \frac{2\pi b}{2\pi r'} = \frac{2\pi}{z'},$$

$$\text{also } \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{z'^2} \text{ nahe} = \frac{20}{3 z'^2} < \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{20}$$
$$\text{für } z' > 8 \quad 10 \quad 12.$$

§. 78. Beispiel.

Eine zum Aufwinden und Versetzen schwerer Baustücke (Gewicht $= Q$) dienende Winde enthalte (Fig. 94) zu unterst die Kettentrommel (Radius bis zur Mittellinie der Lastkette gerechnet $= q$), deren horizontale Welle U (Radius in den Lagern $= u$) am einen Ende neben der Trommel das grosse Zahnrad B (Theilkreisradius $= r$, Zähnezahl $= z$) trägt. In dieses greift ein kleineres Rad B' (Theilkreisradius $= r'$, Zähnezahl $= z'$) auf der Vorgelegewelle V (Radius in den Lagern $= v$), und in das am anderen Ende auf letzterer sitzende Rad C (Theilkreisradius $= \varrho$, Zähnezahl $= \zeta$) endlich greift das kleinere Rad C' (Theilkreisradius $= \varrho'$, Zähnezahl $= \zeta'$) auf der Kurbelwelle W (Radius in den Lagern $= w$), die durch entgegengesetzt gerichtete Kurbeln (Länge $= p$) an beiden Enden gedreht wird. Wie gross muss die an diesen zwei Kurbeln normal zu denselben wirkende gesammte Kraft P sein, um mit Rücksicht auf die Zapfen- und Zahnreibungen die an der Kette hängende Last Q zu heben?

Fig. 94.



Ist B die Theilrisskraft zwischen den Rädern B und B', C dieselbe zwischen den Rädern C und C', so hat B als treibende Kraft die Trommelwelle U zu drehen entgegen dem Nutzwiderstande Q und den Bewegungswiderständen, nämlich der Zahnreibung zwischen B und B' sowie der Zapfenreibung in den Lagern der Welle. Das Verhältniss β der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung zur Theilrisskraft B ist nach §. 76, Gl. (4):

$$\beta = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi\mu.$$

Die Zapfenreibung wird (abgesehen vom Eigengewicht der Trommelwelle)

durch die Kräfte Q und B verursacht, von denen letztere fast ganz den Wellzapfen zunächst dem Rade B belastet, während Q sich auf beide Zapfen in verschiedenem Verhältnisse vertheilt je nach der Stelle, wo augenblicklich die Kette von der Trommel niederhängt. In den beiden Grenzfällen ihrer vollständigen Auf- oder Abwickelung kann mit Rücksicht darauf, dass die Kraft B nahe horizontal gerichtet ist, der gesammte Zapfendruck näherungsweise

$$= Q + B \text{ resp. } = \sqrt{Q^2 + B^2}$$

gesetzt werden, und da letzterer Ausdruck nach einer hier vollständig genügenden Näherungsformel* $= 0{,}96\, Q + 0{,}4\, B$ gesetzt werden kann, so mag im Durchschnitt der gesammte Zapfendruck zu

$$\frac{1{,}96}{2} Q + \frac{1{,}4}{2} B = 0{,}98\, Q + 0{,}7\, B$$

veranschlagt werden. Dem Gleichgewicht der Kräfte an der Trommelwelle entspricht dann die Gleichung:

$$(1 - \beta) Br = Qq + \mu' (0{,}98\, Q + 0{,}7\, B) u,$$

woraus folgt:

$$B = \frac{q + 0{,}98\, \mu' u}{(1 - \beta) r - 0{,}7\, \mu' u} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

In Bezug auf die Vorgelegewelle V ist B Nutzwiderstand, C die treibende Kraft. Letztere wird vermindert durch die Zahnreibung zwischen den Rädern C und C' im Verhältnisse

---

* Zur angenäherten Berechnung eines Ausdruckes von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ kann man setzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax + by,$$

wenn nur den Coefficienten a und b angemessene Werthe beigelegt werden, die um so zutreffender bestimmt werden können, zwischen je engeren Grenzen das Verhältniss $\frac{y}{x}$ liegend vorauszusetzen ist. Ist nur $\frac{y}{x} < 1$ gegeben, so ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}96\, x + 0{,}4\, y$$

mit einem Fehler von höchstens 4 Procent des wahren Werthes der Wurzelgrösse; für $\frac{y}{x} < \frac{1}{2}$ ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}986\, x + 0{,}23\, y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{4}{3}$ Procent, für $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$ dagegen

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}816\, x + 0{,}59\, y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{3}$ Procent des wahren Werthes.

$$\gamma = \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'}\right)\pi\mu$$

und da, was die Zapfenreibung betrifft, die Kraft B fast nur den einen, C fast nur den anderen Wellzapfen als Zapfendruck belastet, indem das Rad B' dicht neben dem einen, das Rad C dicht neben dem anderen Lager auf der Welle V sitzt, so entspricht dem Gleichgewicht der Kräfte an letzterer die Gleichung:

$$(1-\gamma)\,C\varrho = Br' + \mu'(B+C)\,v$$

$$C = \frac{r' + \mu' v}{(1-\gamma)\,\varrho - \mu' v}\,B \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2).$$

Was endlich das Gleichgewicht der Kräfte an der Kurbelwelle W betrifft, so kann von jeder der beiden an je einer Kurbel angreifenden treibenden Kräfte $= 0{,}5\,P$ angenommen werden, dass sie nur das der betreffenden Kurbel zunächst liegende Lager als Zapfendruck belastet; an einem dieser Lager setzt sich aber fragliche Kraft mit dem vom Nutzwiderstande herrührenden lothrechten Drucke C zu einer Resultanten zusammen, welche, da sie bei den Umdrehungen der Kurbel zwischen den Grenzen $C + 0{,}5\,P$ und $C - 0{,}5\,P$ schwankt, im Mittel $= C$ gesetzt werden kann. Somit gilt für die Kurbelwelle durchschnittlich die Momentengleichung:

$$Pp = C\varrho' + \mu'(C + 0{,}5\,P)\,w$$

$$P = \frac{\varrho' + \mu' w}{p - 0{,}5\,\mu' w}\,C \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(3).$$

Durch Multiplication der Gleichungen (1), (2), (3) ergiebt sich P im Verhältnisse zu Q. Ohne Bewegungswiderstände, d. h. mit $\mu' = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ wäre, unter P_0 den dieser Voraussetzung entsprechenden Werth von P verstanden,

$$P_0 = \frac{q}{r}\,\frac{r'}{\varrho}\,\frac{\varrho'}{p}\,Q = \frac{q}{p}\,\frac{z'}{z}\,\frac{\zeta'}{\zeta}\,Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(4).$$

Das Verhältniss $\frac{P_0}{P}$ ist der sogenannte Wirkungsgrad.

Da auf sorgfältige Wartung der Reibungsflächen bei einer solchen im Freien benutzten Winde kaum zu rechnen ist, mag

$$\pi\mu = 0{,}4 \text{ und } \mu' = 0{,}11$$

gesetzt werden. Ist nun z. B. bei Voraussetzung von zu hebenden Lasten bis $Q = 2500$ Kgr.

$$q = 240,\quad r = 462{,}5,\quad r' = 75,\quad \varrho = 323,\quad \varrho' = 68,\quad p = 400$$

$$\underbrace{\quad z = 74}_{u\,=\,45}\qquad \underbrace{z' = 12\quad \zeta = 76}_{v\,=\,32}\qquad \underbrace{\zeta' = 16\quad}_{w\,=\,20}$$

wo den angegebenen Längen das Millimeter als Einheit zu Grunde liegt und

$$\frac{r}{z} = \frac{r'}{z'} \text{ sowie } \frac{\varrho}{\zeta} = \frac{\varrho'}{\zeta'}$$

ist, so findet man $\beta = 0{,}0387$ und $\gamma = 0{,}0303$, damit nach Gl. (1)—(3):

$$B = 0{,}555\ Q, \quad C = 0{,}2535\ B, \quad P = 0{,}176\ C,$$

also $$P = 0{,}176 \,.\, 0{,}2535 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}0248\ Q,$$

während nach Gl. (4): $$P_0 = 0{,}0205\ P$$

gefunden wird, entsprechend einem Wirkungsgrade

$$\frac{P_0}{P} = \frac{205}{248} = 0{,}83.$$

Zur Hebung der Maximallast $Q = 2500$ Kgr. wäre an den zwei Kurbeln ein gesammter Druck:

$$P = 0{,}0248 \,.\, 2500 = 62 \text{ Kgr.}$$

erforderlich, wozu 4 Arbeiter, zwei an jeder Kurbel, ausreichen würden, da es sich hier nicht um eine längere Zeit hindurch stetig andauernde Leistung handelt.

Wenn zur Hebung geringerer Lasten die Kurbelwelle verschieblich in ihren Lagern eingerichtet ist, so dass durch solche Verschiebung die Räder C' und C ausser Eingriff kommen, dagegen ein auf der Kurbelwelle sitzendes zweites und zwar dem Rade B' gleiches Rad mit B zum Eingriffe gebracht wird (wonach bei der nun im umgekehrten Sinne zu bewirkenden Drehung der Kurbeln die Vorgelegewelle leer mitläuft), so bleibt, wenn B jetzt die Theilrisskraft zwischen dem Rade B und dem auf der Kurbelwelle sitzenden Rade B' bedeutet, die obige Gleichung (1) unverändert bestehen, während Gl. (2) wegfällt und Gl. (3) zu ersetzen ist durch:

$$P = \frac{r' + \mu' w}{p - 0{,}5\,\mu' w} B \quad \dots\dots\dots\dots (5),$$

Gl. (4) durch: $$P_0 = \frac{q}{r}\frac{r'}{p} Q = \frac{q}{p}\frac{z'}{z} Q \quad \dots\dots\dots\dots (6).$$

Mit den oben angenommenen Zahlenwerthen findet man hiernach:

$$P = 0{,}1935\ B = 0{,}1935 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}1074\ Q$$
$$P_0 = 0{,}0973\ Q$$

entsprechend einem Wirkungsgrade $\frac{P_0}{P} = \frac{973}{1074} = 0{,}91$. In diesem Zustande, nämlich ohne Hülfe der Vorgelegewelle, würden 4 Arbeiter bei gleicher durchschnittlicher Anstrengung von je $\frac{62}{4} = 15{,}5$ Kgr. Lasten heben können bis zu

$$Q = \frac{62}{0,1074} = 577 \text{ Kgr.}$$

natürlich mit entsprechend grösserer Geschwindigkeit, als bei Benutzung der Vorgelegewelle.

Mit Rücksicht darauf, dass bei dieser Rechnung die Belastung der Zapfen durch das Eigengewicht der Wellen, sowie auch die Kettenreibung unberücksichtigt blieb, wird schliesslich der Wirkungsgrad der Winde noch etwas kleiner zu veranschlagen sein, als 0,83 resp. 0,91, jenachdem sie mit oder ohne Vorgelegewelle benutzt wird.

§. 79. Zahnreibung von Kegelrädern.

Es werde zunächst wieder angenommen, dass der Eingriff nur auf einer Seite der Axenebene stattfindet und dass beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist. Letztere findet statt in einer Geraden, die verlängert durch den Durchschnittspunkt O der Axen OA, OA' geht, und wenn in ihr der Normaldruck N gleichförmig vertheilt vorausgesetzt wird, so kann er behufs der folgenden Betrachtung auch im Mittelpunkte p der fraglichen Berührungslinie concentrirt gedacht werden. Die Kugelfläche K, deren Mittelpunkt O und deren Radius $k = Op$ ist, schneidet dann die kegelförmigen Axoide der Räder in ihren mittleren Theilkreisen, deren Radien wieder mit r und r' bezeichnet seien; sie sind, unter P den Durchschnittspunkt der Kugelfläche K mit der Polaxe (der in der Axenebene liegenden Berührungslinie der Axoide) verstanden, beziehungsweise = den von P auf die Axen gefällten Perpendikeln PA, PA'. Die Eingriffslinie Pp, d. i. die Bahn des Punktes p in Bezug auf die Axenebene, sowie die Bahnen ap und $a'p$ dieses Punktes (analog Fig. 93) in den beiden Zahnflächen sind jetzt Curven in der Kugelfläche K, und wenn wieder σ, σ' die von den mittleren Theilkreisen aus gerechneten Bogenlängen ap, $a'p$ bedeuten, so ist der Mittelwerth der auf die mittleren Theilkreise reducirten Zahnreibung wie in §. 77:

$$R = \frac{\mu}{b} \int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma'),$$

unter b die Bogenlänge verstanden, mit der sich jene Theilkreise auf einander abwälzen, während die Berührung der Zähne dauert und der mittlere Berührungspunkt p längs den Zahnflächen die Wege $\sigma = s$, $\sigma' = s'$ durchläuft.

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der mittleren Theilkreise entsprechen wieder die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ der Räder; aber die relative Drehung des einen gegen das andere um die Polaxe $OP =$ der Resultanten aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen dieser elementaren Drehungswinkel ist jetzt:

$$d\varphi = dx\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}},$$

wenn ε den Axenwinkel AOA' bedeutet. Zerlegt man diese Drehung $d\varphi$ um OP in zwei Componenten um die Axe Op und um eine in der Ebene POp dazu senkrechte Axe, also, unter η den Winkel POp verstanden, in die Componenten $\cos\eta\, d\varphi$ und $\sin\eta\, d\varphi$, so ist es nur die letztere, welche die relativ gleitende Bewegung $= d\sigma - d\sigma'$ des Punktes p der einen Zahnfläche gegen die andere zur Folge hat:

$$d\sigma - d\sigma' = k\sin\eta\, d\varphi = y\, d\varphi,$$

wenn mit $y = k\sin\eta$ das vom Pol P auf die Berührungslinie Op gefällte Perpendikel bezeichnet wird. Die obige Gleichung für R geht somit über in:

$$R = \frac{\mu}{b}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}}\int_0^b Ny\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Indem sie sich von Gl. (1) in §. 77 nur dadurch unterscheidet, dass

$$\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \text{ an die Stelle von } \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

getreten ist, gelten mit der gleichen Modification auch die früher aus jener Gleichung gezogenen Folgerungen. Insbesondere kann, wenn P die auf die mittleren Theilkreise bezogene Theilrisskraft bedeutet, analog der allgemeinen Näherungsformel (1) in §. 76 gesetzt werden:

$$P = \frac{\mu b}{2} P\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

entsprechend der obigen Gleichung (1) mit $Ny = Px$.

Wenn endlich im Durchschnitt wieder der Eingriffsbogen b auf jeder Seite der Axenebene $=$ der Theilung, also, unter z und z' die Zähnezahlen verstanden,

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{bz},\ \frac{1}{r'} = \frac{2\pi}{bz'}$$

gesetzt wird, so folgt aus Gl. (2):

$$R = \pi\mu P\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{zz'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

insbesondere für $\varepsilon = 90^0$:

$$R = \pi \mu P \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z'^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Auch die früheren Formeln für Cylinderräder mit äusserem und innerem Eingriffe sind, wie es sein muss, als Specialfälle in der allgemeineren Gl. (3) enthalten, indem sie daraus beziehungsweise mit $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 180^0$ erhalten werden.

§. 80. Reibung von Schneckenrädern.

Zahnräderpaare mit windschiefen Radaxen werden selten zur Uebertragung so grosser Kräfte verwendet, dass ihre Reibung als wesentlicher Bestandtheil des gesammten Bewegungswiderstandes der betreffenden Maschine besondere Rücksicht erforderte, mit Ausnahme allenfalls des aus einer sogenannten Schnecke mit entsprechendem Schneckenrade (Schraube mit entsprechendem Schraubenrade) bestehenden Elementenpaares bei rechtwinkelig geschränkten Axen der Elemente. In dem gewöhnlichen Falle eines einfachen Gewindes der Schnecke entspricht einer vollen Umdrehung derselben eine Drehung des Rades um den Winkel $\frac{2\pi}{z}$, wenn z die Zähnezahl des Rades bedeutet, und wenn somit dieses Elementenpaar als einfaches Hülfsmittel für Bewegungsübersetzungen ins Langsame oft nützliche Dienste leisten kann, so ist damit doch der Nachtheil eines im Vergleich mit gewöhnlichen Räderpaaren sehr erheblichen Reibungswiderstandes verbunden, der nämlich (mit Rücksicht auf die Art der relativ gleitenden Bewegung in den Berührungspunkten beider Elemente) als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus der Gewindereibung eines Schraubenpaares und aus der Zahnreibung, die dem Eingriffe eines Cylinderrades von z Zähnen mit einer Zahnstange entspricht. Ist also Q der Nutzwiderstand im Theilrisse des Schneckenrades, so muss auf dasselbe wegen der Zahnreibung die etwas grössere Theilrisskraft Q' ausgeübt werden, die nach §. 76, Gl. (5) zu Q in der Beziehung steht:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z}\right) = Q,$$

und wenn dazu die Schnecke mit einem Kraftmomente $= Pr$ gedreht wird, so muss nach §. 74 mit Rücksicht auf die Gewindereibung:

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho) = Q \frac{tg(\alpha + \varrho)}{1 - \frac{\pi \mu}{z}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

sein, wo P, r, α, ϱ die aus §. 74 bekannten Bedeutungen haben. —

Bei einem einfachen Schneckenradgetriebe, bestehend aus Schnecke, Schneckenrad und einem gemeinsamen Lagerkörper beider, können (abgesehen von noch mehr untergeordneten Widerständen) ausser der vorbesprochenen Reibung des Schneckenradpaares auch die Spurzapfenreibung der Schneckenwelle und die Tragzapfenreibung der Radwelle in Betracht kommen. Mit Rücksicht auf letztere und auf die Zahnreibung zusammen ist der Druck Q', der auf das Schneckenrad tangential an seinen Theilriss entgegen dem Nutzwiderstande Q ausgeübt werden muss, bestimmt durch die Gleichung:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z}\right)\left(1 - \mu' \frac{b}{a}\right) = Q'\left(1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}\right) = Q,$$

unter a den Theilrisshalbmesser, b den Zapfenhalbmesser des Schneckenrades und unter μ' einen Coefficienten verstanden, dessen Bedeutung aus §. 72 hervorgeht. Indem dann wieder

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho)$$

ist, ergiebt sich mit Rücksicht auf die Spurzapfenreibung der Schnecke das zu ihrer Drehung erforderliche Kraftmoment:

$$M = Pr + \mu' Q' r' = Q' r \left[tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}\right],$$

unter r' den nach §. 70 zu bestimmenden mittleren Radius der Spurzapfenfläche und unter μ' den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, der, obschon von anderer Bedeutung, doch dem vorigen Coefficienten μ' gleich gesetzt werden mag. Die Einsetzung des aus obiger Gleichung folgenden Ausdruckes von Q' ergiebt endlich:

$$M = Qr \frac{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}}{1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ohne Reibungen wäre $M = M_0 = Qr\, tg\, \alpha$, und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\, \alpha \frac{1 - \frac{\pi \mu}{z} - \mu' \frac{b}{a}}{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Von der Spurzapfenreibung der Schnecke sind M und η in viel höherem Grade abhängig, als von der Tragzapfenreibung der Schneckenradwelle (da $\mu' \frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist), und ist es deshalb rathsam, das Getriebe möglichst so anzuordnen, dass jene Spurzapfenreibung nicht in einer Ringfläche ($r' > r$), sondern in einer vollen Kreisfläche ($r' < r$), somit nicht an einer mit entsprechendem Bundringe versehenen mittleren Stelle, sondern am Ende der Schneckenwelle stattfindet. Wenn z. B. wie in §. 75

$$\alpha = 5^0\,12',\ \varrho = 5^0\,43',\ r' = 0{,}57\,r,\ \mu' = 0{,}1$$

gesetzt wird und $\pi\mu = 0{,}4$ (§. 76), $z = 20$, $b = 0{,}1\,a$,
so findet man

$$\eta = 0{,}091\,\frac{1 - 0{,}02 - 0{,}01}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}35.$$

V. Walzenreibung.

§. 81. Wesen und Gesetze der Walzenreibung.

Während man sich bisher meistens damit begnügt hat, den Widerstand gegen die wälzende Bewegung dadurch zu erklären, dass in Folge theils der Rauhigkeit der Oberflächen, theils der Deformation von Walze und Unterlage durch die Wirkung des Normaldruckes P die wälzende Bewegung als eine Folge von Umkantungen, nämlich von Drehungen um Axen vorzustellen sei, die im Sinne ihrer Aufeinanderfolge etwas neben der jeweiligen Richtungslinie von P vorbei gehen, ist von Prof. Osborne Reynolds* 1875 eine mit Versuchen verbundene eingehendere Untersuchung über das Wesen dieses Bewegungswiderstandes angestellt und danach derselbe als hauptsächlich auf relativ gleitender Bewegung beruhend, somit auch dieser Widerstand als gleichartig mit der im engeren Sinne so genannten Reibung erkannt worden.

Auf das Vorhandensein von relativ gleitender Bewegung deutet schon der Umstand, dass bei der rollenden Bewegung einer Walze (eines Cylinders) auf einer horizontalen ebenen Unterlagsplatte die von jener längs dieser durchlaufene Strecke im Allgemeinen merklich von der geometrischen Wälzungsstrecke, d. h. von derjenigen (= Product aus Radius und

* Philosophical Transactions, Vol. 166, auszugsweise in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure für 1877, S. 417.

Drehungswinkel der Walze) verschieden und zwar meistens kleiner gefunden wird, die bei demselben Drehungswinkel die vollkommen starre Walze auf der vollkommen starren Unterlage bei rein rollender Bewegung durchlaufen hätte, eine Thatsache, die an und für sich von Interesse ist und von Reynolds zunächst einer näheren Prüfung unterworfen wurde. Erklärlich ist sie folgendermaassen. Wenn die schwere Walze auf der Unterlagsplatte ruht, so berühren sich beide Theile nicht nur in einer Linie, sondern in einer Fläche, längs welcher die Walze eine Verflachung, d. h. eine Verminderung ihrer convexen Krümmung, die Unterlage dagegen einen Eindruck, d. h. eine concave Krümmung erleidet. Da mit der Abflachung der Walze an und für sich eine Verkleinerung ihres Umfanges, mit dem Eindruck der Unterlage dagegen eine Vergrösserung ihrer Oberfläche verbunden ist, so würde daraus eine Verkleinerung der von der Walze rollend durchlaufenen Strecke im Vergleich mit der geometrischen Wälzungsstrecke folgen. Indem aber ferner, auch abgesehen von der Oberflächengestaltung beider Körper, durch ihre verticale Zusammendrückung eine horizontale Ausdehnung an und in der Nähe ihrer Berührungsfläche bedingt wird (verbunden mit theilweiser seitlicher Verdrängung ihrer materiellen Theile über die Ränder der Berührungsfläche hinaus), so wird dadurch jene Oberflächenvergrösserung der Unterlage noch vermehrt, die Verkleinerung der Walzenoberfläche aber vermindert und möglicher Weise auch in Vergrösserung verwandelt: jenes um so mehr, je weicher (zusammendrückbarer) das Material der Unterlage, dieses um so mehr, je weicher das Material der Walze ist. Die Folge beider Umstände wird sein, dass die von einer harten Walze auf einer weicheren ebenen Unterlage rollend durchlaufene Strecke stets kleiner ist als die geometrische Wälzungsstrecke, dass es dagegen beim Rollen einer Walze auf härterer Unterlage von dem Härteverhältnisse beider Körper und vom Durchmesser der Walze abhängt, ob die von ihr rollend durchlaufene Strecke kleiner oder grösser ist, als die geometrische Wälzungsstrecke.

Dem Verhalten, wie es nach diesen Erwägungen zu erwarten war, insbesondere voraussichtlich deutlich hervortretend bei der Wahl eines in hohem Grade dehnbaren Materials für den einen der betreffenden Körper, entsprachen durchaus die Ergebnisse von Versuchen. Indem dabei als Unterlage einer sorgfältig polirten, 14 Pfund schweren gusseisernen Walze von 6 Zoll Durchmesser auf Holz geleimte Kautschukstreifen verschiedener Dicke benutzt wurden, zeigte sich die thatsächlich durchlaufene stets kleiner als die geometrische Wälzungsstrecke, und zwar für je zwei Umdrehungen der Walze beziehungsweise um

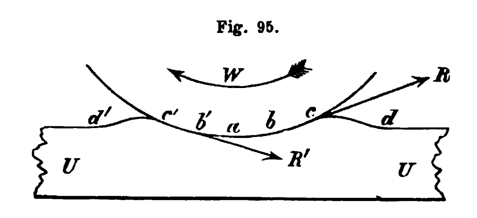


	0,44	0,84	0,49 Zoll
=	1,2	2,2	1,3 Procent der geom. Wälzungsstrecke
bei	0,015	0,08	0,36 Zoll Dicke des Kautschukbandes.

Das in diesen Zahlen sich aussprechende Abhängigkeitsgesetz ist dadurch erklärlich, dass, je dünner das Kautschukband ist, desto mehr seine seitliche Ausdehnung an der oberen Fläche durch die aufgeleimte untere Fläche gehindert wird, dass aber andererseits, je dicker das Band ist, desto beträchtlicher der Eindruck, desto grösser die Berührungsfläche, desto kleiner der specifische Druck und somit desto kleiner auch die seitliche Ausdehnung ausfällt. Wurde auf die Walze ringsum ein $^3/_4$ Zoll dicker Kautschukreif geleimt, so war die auf einer Stahlunterlage oder auf einem sehr dünnen (auf Holz geleimten) Kautschukbande abgerollte Strecke etwas grösser, als die geometrische Wälzungsstrecke, auf einem dickeren Kautschukbande dagegen wieder kleiner; doch blieb der Unterschied zwischen effectiver und geometrischer Wälzungsstrecke stets wesentlich geringer, als beim Rollen der harten Walze auf einer Kautschukunterlage.

Inwiefern nun aber mit der unter solchen Umständen stattfindenden wälzenden Bewegung ein partielles Gleiten und somit Reibung verbunden ist, trotzdem dass (gemäss dem Begriffe einer wälzenden Bewegung) wenigstens in der Mitte der Berührungsfläche zwischen Walze und Unterlage, wo der specifische Druck am grössten ist, kein Gleiten stattfinden, dass nämlich μP, unter μ den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, grösser als die auf relatives Gleiten der beiden Körper hin wirkende Kraft sein soll, wird am deutlichsten erkennbar aus der Betrachtung des Falles einer harten, z. B. eisernen Walze auf einer weichen, z. B. einer Unterlage von Kautschuk: siehe Fig. 95, entsprechend einer rollenden Bewegung der harten Walze W im Sinne des krummen Pfeils auf der weichen Unterlage UU. Letztere ist längs der Berührungsfläche cc' in verticaler Richtung comprimirt und seitlich entsprechend ausgedehnt, beides in abnehmendem Grade von der Mitte a gegen die Ränder c und c' hin. Der seitlichen Ausdehnung unterhalb der Berührungsfläche entspricht dann nothwendig ausserhalb derselben, etwa von c bis d und von c' bis d', eine seitliche Compression, verbunden mit verticaler Ausdehnung, also wulstförmiger Erhebung der hier convex nach oben gekrümmten Oberfläche der weichen Unterlage. Wenn nun etwa von b bis b' keine Gleitung

Fig. 95.



stattfindet, so nimmt, wenn die Walze, im Sinne des Pfeils W sich drehend, im Sinne $d'd$ weiter rollt, längs bc die verticale Compression und seitliche Ausdehnung zu, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung bc und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R; andererseits nimmt von b' bis c' die verticale Compression und seitliche Ausdehnung ab, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung $c'b'$ und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R'. In diesen beiden Kräften R und R', deren Momente in Bezug auf die Walzenaxe dem Drehungssinne der Walze entgegen wirken, besteht wenigstens in der Hauptsache die hier in Rede stehende Walzenreibung. Wenn auch mit Rücksicht auf die hier ausser Acht gelassene gleichzeitige Deformation der Walze die thatsächlich stattfindenden Verhältnisse modificirt werden mögen, so bleibt doch ihr Gesammtcharakter derselbe.

Wenn diese Erklärung der Walzenreibung als Widerstand gegen eine solche Gleitung, die, durch Deformation der betreffenden Körper verursacht, nur an einem Theil ihrer Berührungsfläche stattfindet, richtig ist, so muss zwischen ihr und den bisher besprochenen Reibungen, die als Widerstände gegen relative Gleitungen in allen Punkten der Berührungsfläche zugleich, nämlich der ganzen Körper sich darstellten, insofern ein wesentlicher Unterschied stattfinden, als sie durch Verminderung des Reibungscoefficienten, z. B. durch Fettung der Oberflächen, nicht auch, wenigstens nicht in gleichem Maasse vermindert zu werden braucht. Indem dadurch nämlich die Breite des gleitungslosen Theiles bb' der Berührungsfläche verkleinert wird, ist es jetzt ein grösserer Theil des Gesammtdruckes, der längs bc und $b'c'$ die Reibungen R und R' verursacht, so dass diese grösser werden können trotz der Abnahme des Reibungscoefficienten. Zur experimentalen Prüfung dieses Verhaltens benutzte Reynolds die oben erwähnte polirte gusseiserne Walze auf ebenfalls möglichst glatt hergerichteten ebenen Platten von Gusseisen, Glas, Messing, Buchsbaum (Hirnholz) und Kautschuk, die theils ganz rein, theils leicht gefettet (die drei ersten mit Oel, die anderen mit Graphit) angewendet wurden. Die Versuche selbst sind in allen Fällen auf zweierlei Weise angestellt worden. Erstens wurde die Walze auf die horizontale Platte gelegt und diese allmählig geneigt bis bei einer gewissen Neigung α die Walze zu rollen anfing; zweitens wurde der Walze ein Anstoss gegeben, so dass sie auf der etwas geneigten Platte bis zu einer gewissen Stelle aufwärts rollte, und wurde dabei die Neigung allmählig vergrössert bis bei einem gewissen Werthe β derselben die Walze nicht mehr an jener Stelle liegen blieb, sondern rückwärts rollte. Die so gefundenen Werthe von α

und β (100 000 α und 100 000 β) sind als Mittelwerthe vieler einzelner Versuche folgende:

Art der Platte	100 000 α		100 000 β	
	rein	gefettet	rein	gefettet
Gusseisen	57	56	26	24
Glas	63	60	19	26
Messing	77	65	21	26
Buchsbaum	100	92	57	23
Kautschuk	354	387	319	290

In der That sind diese Werthe von α und β nicht deutlich und wesentlich abhängig von der Fettigkeit der Oberfläche, also von der Grösse des Reibungscoefficienten, sie wachsen aber erheblich mit abnehmender Härte der Unterlage, womit die Grösse der Deformation, also auch die Grösse der Relativbewegung (längs bc und $b'c'$ in Fig. 95) und damit die Arbeit der Reibungskräfte R, R' zunimmt. Dass die Werthe von β so erheblich kleiner sind, als die von α, dürfte zumeist dadurch erklärlich sein, dass die vollständige Wiederausdehnung der comprimirten Substanz wegen ihrer Trägheit und besonders der inneren Reibung eine gewisse Zeit erfordert; in Folge dessen wird hinter der Mitte a der Berührungsfläche (Fig. 95) beim Rollen der Walze ihre eigene Compression und die der Unterlage stets etwas beträchtlicher sein als sie auf der vorderen Seite ist, somit der hintere Theil ac' des Berührungsbogens etwas kleiner als der vordere ac, wodurch die Umkehrung der in gewissem Sinne stattgefundenen Rollung erleichtert wird, verglichen mit der aus dem Zustande der Ruhe beginnenden Rollung, bei der die Compression auf beiden Seiten der Mitte a gleich ist und überhaupt etwas grösser sein mag, als die vorübergehende Compression während der Bewegung der Walze.

Dieser so eben erwähnte Umstand, dass beim Rollen der Walze stets der vordere Theil des Berührungsbogens etwas grösser ist, als der hintere, muss zur Folge haben, dass der resultirende Gegendruck P, den die Unterlage vertical aufwärts auf die Walze ausübt, etwas vor der Walzenaxe vorbeigeht und so den durch die Reibungskräfte R, R' verursachten Widerstand vergrössert um so mehr, je grösser die Geschwindigkeit der rollenden Bewegung ist, weil damit auch der Längenunterschied jener Bögen zunehmen wird. Ob diese Folgerung zutrifft, bleibt durch Versuche nachzuweisen. —

Uebrigens waren die Untersuchungen von **Reynolds** zunächst nur auf die Aufklärung des Wesens der Walzenreibung, nicht auf die Ermittelung



der Abhängigkeitsgesetze ihrer Grösse gerichtet; diese ist lediglich auf Versuche angewiesen, die freilich bisher nur in wenig befriedigender Weise angestellt wurden, so dass sie namentlich den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit von Walze und Unterlage sowie des Durchmessers der ersteren nicht mit Sicherheit erkennen lassen. Sofern diese Walzenreibung sich als ein Widerstandsmoment gegen die Drehung der Walze um die Polaxe (ideale Berührungslinie mit der Unterlagsplatte) darstellt, ist nur so viel durch die Versuche als constatirt zu betrachten, dass das fragliche Moment dem Normaldrucke P proportional ist; wird es aber somit $= mP$ gesetzt, unter m eine Länge verstanden, deren Zahlenwerth von der zu Grunde liegenden Längeneinheit abhängt und nach Coulomb, Rondelet, Poncelet, Pambour, Rittinger, Weisbach u. A.

1) für gusseiserne Walzen von ungefähr 0,5 Mtr. Durchmesser auf gusseisernen Schienen = 0,48 Millimeter,

2) für Eisenbahnwagenräder von ungefähr 1 Mtr. Durchmesser auf den Bahnschienen = 0,5 bis 0,55 Millimeter,

3) für gusseiserne Walzen auf Granitbahnen = 1 Millimeter,

4) für hölzerne Walzen auf gemeisselten Steinflächen = 1,3 Millimeter,

5) für hölzerne Walzen auf Unterlagen von Holz = 0,5 bis 1,5 Millimeter

gefunden wurde, so haben diese Zahlen kaum wissenschaftlichen Werth, so lange nicht ausser dem Walzendurchmesser namentlich die Oberflächenbeschaffenheit beider Theile genauer angegeben wird. Auf den erheblichen Einfluss der letzteren ist aus der Vergleichung dieser Zahlen mit den obigen Werthen von α nach den Versuchen von Reynolds zu schliessen, wenn von der ihnen anhaftenden Unsicherheit abgesehen wird. Zur Vergleichung des Winkels α mit dem Factor m kann man nämlich bemerken, dass, wenn eine Walze vom Gewichte G und Radius r auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten ebenen Fläche liegt, das auf Einleitung der Drehung um die Polaxe abzielende Kraftmoment $= G \sin\alpha \,.\, r$, der Normaldruck $P = G \cos\alpha$ und somit die beginnende Wälzung an die Gleichung gebunden ist:

$$m G \cos\alpha = G \sin\alpha \,.\, r, \text{ woraus } m = r \operatorname{tg}\alpha = r\alpha$$

mit Rücksicht auf die Kleinheit von α folgt. Da hier $r = 3$ Zoll engl. = 76 Millim. war, so würde sich z. B. für die polirte gusseiserne Walze auf eben solcher gusseiserner Platte

$$m = 76 \,.\, 0{,}00057 = 0{,}043$$

ergeben $= \frac{1}{11}$ des oben unter 1) angegebenen Werthes, der sich auf nicht

polirte Oberflächen bezieht. Auch wenn es sich bewahrheiten sollte, dass, wie aus neueren Versuchen von Dupuit sowie von Poirée und Sauvage geschlossen wurde, der Factor m proportional $\sqrt{r}$ zu setzen sei, so würde darin jener erhebliche Unterschied doch nur zum kleineren Theil seine Erklärung finden, indem danach der auf gleichen Radius $r = 250$ Millim. (genauer 262 Millim.) reducirte Werth des Reynolds'schen Versuches doch nur

$$m = 0{,}043 \sqrt{\frac{262}{76}} = 0{,}08$$

$= \frac{1}{6}$ des obigen Werthes unter 1) gefunden würde. Die nähere Aufklärung dieses Unterschiedes erscheint um so nöthiger, als er mit der sonst so wohlbegründeten Reynolds'schen Auffassung vom Wesen des Rollungswiderstandes und mit der Erfahrung in Widerspruch zu stehen scheint, derzufolge sich der Einfluss einer Verminderung des Reibungscoefficienten durch Fettung der Oberflächen als unerheblich ergeben hat.

§. 82. Beispiele.

Indem das Product aus dem in vorigem Paragraph besprochenen Factor m und dem Normaldrucke zwischen Walze und Unterlage als ein Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider Theile um ihre ideale Berührungslinie (die Polaxe) sich darstellte, ergiebt sich die Arbeit der betreffenden Walzenreibung für eine gewisse Bewegung durch Multiplication jenes Productes mit dem (in Bogenmaass ausgedrückten) entsprechenden relativen Drehungswinkel. Diese Vorbemerkung ist nützlich zur Behandlung von Aufgaben, bei denen die Walzenreibung in Betracht kommt.

1) Um einen schweren Körper K vom Gewichte Q auf einer horizontalen Bahn B leichter, als bei relativ gleitender Bewegung, nach einer gewissen Richtung AX längs B fortbewegen zu können, sei er auf Walzen W von gleichen Radien r gelegt, die selbst auf der Bahn B so liegen, dass ihre parallelen Axen rechtwinklig gegen AX gerichtet sind. Einem unendlich kleinen Wege dx von K gegen B entspricht dann eine Neigung $= \frac{dx}{2r}$ jedes vorher lothrechten Walzendurchmessers gegen die Lothrechte, also ein ebenso grosser relativer Drehungswinkel von W gegen K sowohl wie von W gegen B. Sind also m_1 und m_2 die Constanten der Walzen-



reibung für W und K resp. W und B, und ist ΔQ der auf eine Walze entfallende Theil von Q, so ist die Reibungsarbeit für dieselbe

$$=(m_1+m_2)\,\Delta Q\,\frac{dx}{2r}.$$

Indem die Summe dieser Arbeiten für alle Walzen = der Arbeit Pdx der Kraft P gesetzt wird, die am Körper K im Sinne AX angreifend zu seiner Fortbewegung erforderlich ist, ergiebt sich:

$$P=\frac{m_1+m_2}{2r}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Das Vertheilungsgesetz des Druckes auf die einzelnen Walzen ist in Folge der Voraussetzung gleicher Werthe von m_1 und m_2 für dieselben ohne Einfluss auf P, deshalb auch die Höhe des Angriffspunktes von P am Körper, die jenes Vertheilungsverhältniss insofern bedingt, als, je höher P angreift, desto mehr vorwiegend die vorderen Walzen belastet werden.

2) Wenn die den Körper K unterstützenden Walzen durch Rollen ersetzt werden, die mit Zapfen, deren Radien $= a$ seien, in festen Lagern drehbar sind, so entspricht dem elementaren Wege dx des Körpers K jetzt ein Drehungswinkel $=\frac{dx}{r}$ der Rollen. Ist also wieder ΔQ der Druck auf eine derselben, so ist die elementare Arbeit der Walzenreibung zwischen ihr und dem Körper K

$$=m\,\Delta Q\,\frac{dx}{r}.$$

Dazu kommt eine Zapfenreibungsarbeit

$$=\mu'\Delta Q\,.\,a\,\frac{dx}{r}$$

und wenn die Summe beider für alle Rollen zusammen wieder $= Pdx$ gesetzt wird, so folgt:

$$P=\frac{m+\mu' a}{r}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Indem hier die Rollen auch verschiedene Radien r und Zapfenradien a haben können, sofern sie nur oben von der horizontalen ebenen Unterfläche des Körpers K berührt werden, ist allgemein:

$$P=\Sigma\frac{m+\mu' a}{r}\,\Delta Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

3) Denkt man sich den aus dem Körper K, den n Rollen R und den unter sich zu einem Gliede L verbundenen Lagern dieser Rollen bestehenden Mechanismus in der Weise umgekehrt, dass K als nunmehr unterstes Glied festgestellt ist, so erscheint L als ein Wagen, der mit n Räderpaaren R

(deren jedes kinematisch als nur eine Rolle zu betrachten ist) auf der jetzt oberen horizontalen Fläche von K als Fahrbahn fortbewegt werden soll. Die dazu mit Rücksicht auf Zapfenreibung und Rollungswiderstand erforderliche horizontale Zugkraft P ergiebt sich aus Gl. (3), unter Q das Gewicht des Wagens verstanden. Insbesondere bei gleichen Durchmessern aller Räder und aller Zapfen (Axschenkel) ist nach Gl. (2):

$$P = \frac{m + \mu' a}{r} Q.$$

Wenn z. B. für Eisenbahnfahrzeuge im Durchschnitt $r = 500$ Millim., $a = 40$ Millim., ferner $m = 0,5$ Millim. (§. 81) und im Mittel nach den Bestimmungen von Kirchweger (§. 72) $\mu' = \frac{1}{80} = 0,0125$ gesetzt wird, so folgt:

$$P = \frac{0,5 + 0,5}{500} Q = \frac{Q}{500},$$

zu gleichen Theilen von der Reibung in den Axenlagern und vom Rollungswiderstande herrührend. (In Folge des Luftwiderstandes und des Anstreifens der Spurkränze an den Schienen ist, auch abgesehen von Krümmungen und Steigungen, das Verhältniss $P : Q$ in der That grösser und mit der Fahrgeschwindigkeit wachsend.)

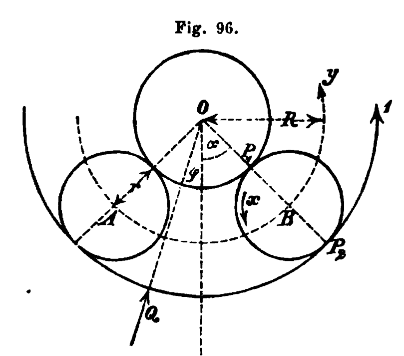
4) Während im Vorhergehenden immer nur ein solches besonderes Walzenpaar vorausgesetzt wurde, dessen eines Element ein ebenflächig begrenzter Körper ist, kann es im Allgemeinen aus zwei Cylindern bestehen, von denen der eine auch ein Hohlcylinder sein mag. Das Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider um ihre ideale Berührungslinie (Polaxe) ist dann = dem Product aus dem gegenseitigen Normaldrucke und einem Factor m, der ebenso von beiden Cylinderradien abhängig sein wird, wie er in dem bisher betrachteten besonderen Falle von dem einen Radius der Walze abhängt. Weil aber dieses letztere Abhängigkeitsgesetz noch nicht genügend bekannt ist und Versuche über die Walzenreibung im allgemeineren Falle von zwei sich berührenden Cylindern überhaupt nicht vorliegen, so bleibt nichts übrig, als auch auf ihn einstweilen dieselben Werthe von m zu übertragen, die unter sonst gleichen Umständen jenem besonderen Falle erfahrungsmässig entsprechen.

Als Beispiel diene das Rollenlager eines um eine fest stehende verticale Säule drehbaren Krahngerüstes. Während dieses oben mittels eines Spurzapfens von der Säule getragen wird, würde sich seiner Drehung um dieselbe ein sehr beträchtliches Widerstandsmoment entgegensetzen, wenn es die am unteren Ende cylindrisch abgedrehte Säule un-

mittelbar mit entsprechendem Hohlcylinder umschlösse, in Folge des hier stattfindenden, mit Belastung und Ausladung des Krahnes wachsenden bedeutenden horizontalen Druckes Q. Zur Verminderung dieses Widerstandsmomentes sei deshalb das drehbare Krahngerüst mit einem so viel grösseren Radius $= R + r$ hier hohlcylindrisch gestaltet, dass ein System von gleichmässig ringsum vertheilten Rollen, deren Radien $= r$ sind, in dem ringförmigen Raume zwischen diesem Hohlcylinder und der damit coaxialen Cylinderfläche der Krahnsäule, deren Radius $= R - r$ ist, gerade Platz findet. Die Zahl der Rollen sei $= \frac{\pi}{\alpha}$, nämlich 2α der Winkel, den zwei durch die Axe der Krahnsäule und durch die Axen auf einander folgender Rollen gehende Ebenen mit einander bilden.

Das Verhältniss, in welchem sich der Druck Q auf die Rollen vertheilt, ist streng genommen von ihrer Elasticität und von zufälligen Umständen, insbesondere z. B. von geringen Verschiedenheiten ihrer Durchmesser abhängig; hier genügt indessen die Annahme, dass jeweils nur solche zwei Rollen vom Drucke Q belastet werden, zwischen deren Axen A und B (Fig. 96) seine Richtungslinie hindurch geht. Bildet letztere dabei mit der Mittelebene des Winkels AOB (unter O die Axe der Krahnsäule verstanden) den Winkel φ, so sind die nach AO und BO gerichteten Componenten von Q

Fig. 96.



$$= Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin 2\alpha} \text{ und } = Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha},$$

ist somit die Gesammtbelastung der Rollen

$$= Q \frac{\sin(\alpha + \varphi) + \sin(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha} = Q \frac{2 \sin \alpha \cos \varphi}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = Q \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha}.$$

Ihr Mittelwerth ergiebt sich, da φ zwischen den Grenzen 0 und α veränderlich ist,

$$= \frac{Q}{\cos \alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \cos \varphi \, d\varphi = Q \frac{tg\, \alpha}{\alpha}$$

und folgt daraus weiter der entsprechende Mittelwerth M des Widerstandsmomentes = der Widerstandsarbeit für einen Drehungswinkel = 1 des Krahngerüstes:

$$M = (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2) \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q,$$

wenn die Constante der Walzenreibung für das aus einer Rolle und der convex-cylindrischen Krahnsäule bestehende Paar mit m_1, für das aus einer Rolle und dem concav-cylindrischen Krahngerüste bestehende Paar mit m_2 bezeichnet wird, und wenn ω_1, ω_2 die relativen Drehungswinkel der Elemente dieser Paare (beziehungsweise um die Berührungslinien wie P_1 und P_2, Fig. 96, als Polaxen) bedeuten, die einem Drehungswinkel $= 1$ des Krahngerüstes entsprechen.

Was letztere betrifft, so sei x der entsprechende Drehungswinkel einer Rolle um ihre Axe B in Bezug auf die Ebene OB, y der Drehungswinkel der Rollenaxen selbst um die Axe O; beide erfolgen (siehe die in Fig. 96 beigesetzten Pfeile) in gleichem Sinne wie die Drehung $= 1$ des Krahngerüstes. Denkt man dann dem ganzen System die gemeinschaftliche Drehung y im umgekehrten Sinne ertheilt, wodurch die relative Drehung x um B gegen OB unberührt bleibt, die Rollenaxen dagegen in Ruhe kommen und der Drehungswinkel des Krahngerüstes $= 1 - y$ wird, so entsprechen der Gleichheit der sich gleichzeitig auf einander abwälzenden Bögen der drei Querschnittskreise die Gleichungen:

$$(R - r)\,y = r x = (R + r)(1 - y),$$

woraus folgt:

$$y = \frac{R + r}{2R}, \quad x = \frac{R - r}{r} y$$

und damit:

$$\omega_1 = x + y = \left(\frac{R - r}{r} + 1\right) \frac{R + r}{2R} = \frac{R + r}{2r}$$

$$\omega_2 = x - (1 - y) = x + y - 1 = \frac{R - r}{2r}$$

$$M = \frac{m_1 (R + r) + m_2 (R - r)}{2r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Kraft P, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, zur Drehung des Krahngerüstes mit alleiniger Rücksicht auf den Widerstand des Rollenlagers erforderlich ist, ergiebt sich $= \frac{M}{R + h}$. Sie geht, wie es sein muss, in den durch Gl. (1) bestimmten Grenzwerth über, wenn R ins Unendliche wächst, wobei r und h als Summanden gegen R verschwinden, $\alpha = 0$ und somit $\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1$ wird.

Setzt man für ein solches Krahnlager im Durchschnitt

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{7} \text{ und } \frac{\pi}{\alpha} = 6, \text{ also } \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1{,}103,$$

entsprechend 6 Rollen, so wird nach Gl. (4):

$$M = 0{,}368\,(5\,m_1 + 2\,m_2)\,Q$$

und mit $m_1 = m_2 = m$: $\quad M = 2{,}58\,m\,Q$,

im Durchschnitt etwa $M = 1{,}2\ Q$ Millimeterkgr.,

entsprechend $m = \frac{1{,}2}{2{,}58} = 0{,}465$ Millimeter.

Wäre im Falle eines gewöhnlichen Zapfenlagers der Coefficient μ' (§. 72) auch nur $= 0{,}06$, so wäre doch das Reibungsmoment schon dann grösser, als $1{,}2\ Q$ Millimeterkgr., wenn der Radius der Krahnsäule im Lager nur $> \frac{1{,}2}{0{,}06}$, d. i. > 20 Millimeter wäre, während er in Wirklichkeit viel grösser sein wird. Zwar finden bei dem Rollenlager gewisse weitere Reibungen an den Stützflächen der Rollen auf dem Boden der sie aufnehmenden hohlcylindrischen Erweiterung des Krahngerüstes statt, sowie auch dergleichen durch die Hülfsmittel veranlasst werden können, die etwa angewendet werden, um die beständig gleichmässige Vertheilung der Rollen rings um die Krahnsäule herum zu sichern; doch sind solche zusätzliche Reibungen nur theils vom Gewichte der Rollen, theils von zufälligen Umständen abhängig, von Q aber unabhängig und überhaupt als verhältnissmässig klein zu vernachlässigen.

5) Wenn die Rollen des vorbesprochenen Rollenlagers durch Drehkörperpaare mit dem Krahngerüste gepaart sind (durch Zapfen, deren Radien $= a$ seien), ihre Axen A, B ... (Fig. 96) also unveränderliche Lagen im Krahngerüste haben, so tritt an die Stelle derjenigen Walzenreibung, der im vorigen Falle die Grössen m_2 und ω_2 entsprachen, jetzt Zapfenreibung, und wenn die Grössen m_1 und ω_1, die sich auf die aus der Krahnsäule und den Rollen bestehenden Walzenpaare beziehen, jetzt mit m und ω bezeichnet werden, so ist mit übrigens den vorigen Bedeutungen der Buchstaben der Mittelwerth des Widerstandsmomentes:

$$M = (m\omega + \mu' a x)\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q.$$

Indem aber jetzt die Rollenaxen dadurch zum Stillstande gebracht werden, dass die ihnen mit dem Krahngerüste gemeinschaftlich zukommende Drehung $= 1$ um die Axe O dem ganzen Systeme im umgekehrten Sinne ertheilt wird, ist

$$x = \frac{R - r}{r} \text{ und } \omega = x + 1 = \frac{R}{r},$$

also $$M = \frac{mR + \mu' a (R - r)}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Die Kraft $P = \frac{M}{R + h}$, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, mit den hier betrachteten Reibungswiderständen im Gleichgewichte ist, geht in den durch Gl. (2) bestimmten Grenzwerth über, wenn R unendlich gross und $\alpha =$ Null wird.

Uebrigens ist das hier zuletzt betrachtete Rollenlager mit einem grösseren Widerstandsmoment verbunden, als das unter 4) besprochene, für welches nach Gl. (4) insbesondere mit $m_2 = m_1 = m$ sich ergiebt:

$$M = \frac{mR}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q$$

$=$ dem von der Walzenreibung herrührenden Bestandtheile des Widerstandsmoments nach Gl. (5).

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen.

§. 83. Spannung von Zugkraftorganen bei Rollengetrieben.

Die üblichen Zugkraftorgane (§. 28), Riemen, Seile und Ketten, insbesondere die zwei ersteren pflegen zur Getriebebildung mit Rollen kraftschlüssig so gepaart zu werden, dass die Reibung, die dem gegenseitigen Drucke beider Theile, bedingt durch die Spannung des Zugkraftorgans, entspricht, ein relatives Gleiten verhindert, insoweit es nicht die unvermeidliche Folge der verschieden grossen Spannungen und somit auch verschieden grossen Dehnungen ist, die dem Zugkraftorgane beim Auflaufen auf die Rolle und beim Ablaufen von derselben wegen ihres Drehungswiderstandes zukomen. Ausser der Reibung, die bei solcher Paarung einer Rolle mit einem sich gleichzeitig an verschiedenen Stellen auf- und abwickelnden Zugkraftorgane dem durch die Spannungs- und Dehnungsänderung desselben längs dem Rollenumfange bedingten partiellen relativen Gleiten entspricht, kann noch ein weiterer Bewegungswiderstand durch die sogenannte Steifigkeit verursacht werden, nämlich als Widerstand gegen die Krümmung des gestreckten Zugkraftorgans bei seiner Aufwickelung auf eine Rolle oder Trommel resp. gegen die Streckung desselben bei der Abwickelung. Die quantitative Beurtheilung jener Reibung und dieses Steifigkeitswiderstandes erfordert die Kenntniss der Spannung, die das Zugkraftorgan unter gegebenen Umständen haben muss, damit

sein relatives Gleiten längs dem Umfange der Rolle, über die es hinweggeführt ist, auf das erwähnte partielle Gleiten beschränkt bleibe, nicht aber zu gleicher Zeit auf das ganze Zugkraftorgan sich erstrecke. Diese Spannung ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ein Band (unter welcher Bezeichnung hier der Kürze halber irgend ein Zugkraftorgan verstanden werde) sei längs der krummen Oberfläche eines starren Körpers K so ausgespannt, dass seine Mittellinie eine Curve bildet, deren Krümmungsradien normal zur Fläche sind; die Spannung des freien, d. h. ausser Berührung mit dem Körper K befindlichen und somit gerade gestreckten Bandes sei einerseits $= S_1$, andererseits $= S_2$, und es handle sich um die Beziehung, die zwischen S_1 und S_2 stattfinden muss, wenn ein Gleiten des Bandes im Sinne von S_1, also entgegen S_2 eben soll erfolgen können, während μ den betreffenden Reibungscoefficienten und α den gesammten Biegungswinkel, d. h. die Summe der Contingenzwinkel aller Bogenelemente des gekrümmten Theiles $B_1 B_2$ der Bandmittellinie bedeute. Indem bei fraglichem Grenzzustande die Spannung des Bandes von B_1 bis B_2 stetig von S_1 bis S_2 abnimmt, sei sie an irgend einer Stelle $= X$, an einer im Sinne gegen B_1 hin unendlich nahe benachbarten Stelle $= X + dX$, und $d\varphi$ der Contingenzwinkel des dazwischen liegenden Bogenelementes der Bandmittellinie. Der Normaldruck zwischen dem betreffenden Bandelemente und dem Körper K ist dann

$$= 2\,X \sin\frac{d\varphi}{2} = X\,d\varphi,$$

die Reibung $= \mu X\,d\varphi$, und da sie dem vorausgesetzten Grenzzustande entsprechend auch $= dX$ ist, ergiebt sich:

$$\frac{dX}{X} = \mu\,d\varphi;\quad ln\frac{S_1}{S_2} = \mu\alpha$$

oder

$$S_1 = m S_2 \text{ mit } m = e^{\mu\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden.

Ist nun bei einem offenen oder einfachen Rollengetriebe (Fig. 30, §. 30) S_1 die Spannung des ablaufenden, S_2 die des auflaufenden Bandes im Falle einer getriebenen, d. h. entgegen einem Widerstande umzutreibenden Rolle, oder umgekehrt S_1 die Spannung des auflaufenden, S_2 die des ablaufenden Bandes im Falle einer treibenden Rolle, d. h. einer solchen, die, durch eine treibende Kraft gedreht, das gespannte Band durch Reibung mitnehmen soll, so ist, wenn r den Radius der Rolle (bis zur Mittellinie des Bandes gerechnet) und Qr im ersten Falle das Widerstandsmoment der Rolle, im zweiten das sie umtreibende Kraftmoment bedeutet,

$$S_1 - S_2 = Q.$$

Damit also ein relatives Gleiten des Bandes auf der Rolle wenigstens im Ganzen, d. h. längs der ganzen Berührungsfläche nicht stattfinde, nach Gl. (1) somit $S_1 < m S_2$ sei, muss auch

$$Q + S_2 < m S_2, \quad S_2 > \frac{1}{m-1} Q, \quad S_1 > \frac{m}{m-1} Q \ldots\ldots (2)$$

sein, wenn m die durch Gl. (1) bestimmte Bedeutung hat, unter α den Mittelpunktswinkel des vom Bande umspannten Umfangsbogens der Rolle verstanden.

Bei dem geschlossenen oder doppelten Rollengetriebe (Fig. 31, §. 30) sind S_1 und S_2 von der Anfangsspannung S abhängig, die im Falle $Q = 0$ gleichmässig in der ganzen Länge $= 2\,l$ des endlosen Bandes stattfindet, und die somit einen gewissen Minimalwerth haben muss, um den Bedingungen (2) zu genügen. Wenn nämlich die Längen, die ein ungespanntes Bandstück von der Länge $= 1$

für die Spannungen $S \quad S_1 \quad S_2$
annimmt, beziehungsweise $= 1 + \varepsilon \quad 1 + \varepsilon_1 \quad 1 + \varepsilon_2$

sind, so verhält sich

$$S : S_1 : S_2 = \varepsilon : \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

und indem nun in Folge des am Umfange der getriebenen Rolle stattfindenden Widerstandes Q resp. in Folge der am Umfange der anderen Rolle stattfindenden gleich grossen treibenden Kraft Q ein Stück $= x$ der einen Bandhälfte, indem deren Spannung sich von S auf S_1 erhöht, zur anderen Seite hinüber gleitet, indem hier die Spannung sich auf S_2 vermindert, ändert sich die Gesammtlänge nicht, ist also (unter $2\,l$ die ganze Bandlänge im spannungslosen Zustande verstanden)

$$(l - x)(1 + \varepsilon_1) + (l + x)(1 + \varepsilon_2) = 2\,l(1 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{x}{l}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2\,\varepsilon.$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\,\varepsilon, \text{ also } S_1 + S_2 = 2\,S,$$

so dass gemäss den Bedingungen (2) sein muss:

$$S > \frac{1}{2} \frac{m+1}{m-1} Q \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da Q für beide Rollen denselben Werth $= S_1 - S_2$ hat und

$$\frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$$

um so grösser ist, je kleiner m, also je kleiner $\mu\alpha$, so muss die Bestimmung von S mit Rücksicht auf diejenige von beiden Rollen geschehen, für welche $\mu\alpha$ den kleineren Werth hat.

Für Lederriemen und für Drahtseile pflegt man im Durchschnitt $\mu = 0,25$ anzunehmen, während α wenig von π verschieden ist. Indem damit

$$m = e^{\mu\alpha} = 2,19 \text{ und } \frac{1}{2}\frac{m+1}{m-1} = 1,34$$

sich ergiebt, kann dann schliesslich etwa

$$S = 1,5\,Q, \quad S_1 = 2\,Q, \quad S_2 = Q$$

gesetzt werden, entsprechend einer Sicherheit der Spannung S im Betrage von etwa 12 % des erforderlichen Grenzwerthes.

Uebrigens ist der Reibungscoefficient μ in hohem Grade schwankend und besonders bei Riemengetrieben (Rollengetrieben mit Lederriemen als Zugkraftorganen) von verschiedenen Umständen in noch nicht genügend aufgeklärter Weise abhängig, nach Versuchen von Prof. Pinzger* z. B. wachsend mit der Wölbung der Rollenoberfläche und wesentlich (etwa im Verhältnisse 5 : 3) grösser für schmiedeiserne als für gusseiserne Rollen. Die Wölbung (entsprechend dem Ueberschusse des Rollendurchmessers in der Mitte über denselben an den Rändern) bedingt dabei nicht sowohl den Reibungscoefficienten selbst, als vielmehr die Riemenspannung, die bei gegebenem Reibungscoefficienten ein Gleiten des Riemens ermöglicht oder verhindert. Noch grösser wird die Unsicherheit in Betreff der zur Uebertragung einer gewissen Umfangskraft Q erforderlichen Riemenspannung S, wenn die nach Angaben von Prof. Radinger in Amerika den dort üblichen grossen Riemengetrieben zu Grunde liegende Anschauung zutreffend ist, derzufolge der Druck zwischen Riemen und Rolle nicht nur von der Riemenspannung, sondern auch wesentlich vom Atmosphärendrucke herrühren soll in Folge einer theilweisen Verdrängung der zwischen beiden Elementen befindlichen Luft, die bei ruhigem und gleichmässigem Auflegen des Riemens durch das stets stattfindende partielle Gleiten desselben längs der Rolle ermöglicht oder erleichtert werden mag. Auf Grund dieser Anschauung würde, wenn in Centimetern ausgedrückt b die Breite des Riemens und a die Länge des von ihm umspannten Bogens des Rollenumfanges bedeutet, und wenn am n^{ten} Theile der Berührungsfläche $= ab$ die Luft zwischen Rolle und Riemen vollständig verdrängt, somit der Atmosphärendruck mit etwa 1 Kgr. pro Quadratcentim. ausgeübt würde, dem eben beginnenden Gleiten des Riemens die Gleichung entsprechen:

$$S_1 = m S_2 + \mu \frac{ab}{n}$$

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1878, Nr. 14.

oder, wenn die höchstens zulässige Riemenspannung pro 1 Centim. Breite $= k$ Kgr., also $b = \frac{S_1}{k}$ gesetzt wird:

$$S_1 = \frac{m S_2}{1 - \frac{\mu a}{n k}}.$$

Aus der Gleichung $S_1 = S_2 + Q$ würde also folgen:

$$S_2 = \frac{Q}{\frac{m}{1 - \frac{\mu a}{n k}} - 1} = \frac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q,$$

demnächst $S_1 = S_2 + Q$ und $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Damit ein totales Gleiten nicht stattfinde, muss also sein:

$$\left.\begin{array}{l} S_2 > \dfrac{1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q; \quad S_1 > \dfrac{m}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \\ S > \dfrac{1}{2} \dfrac{m + 1 - \frac{\mu a}{n k}}{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}} Q \end{array}\right\} \ldots \ldots (4).$$

Mit $a = \pi r$, unter r den Rollenhalbmesser in Centimetern verstanden, und mit den Annahmen:

$$\mu = 0{,}25, \quad m = 2{,}19, \quad k = 10, \quad n = 10$$

ergiebt sich beispielsweise:

$$S > \frac{1}{2} \frac{3{,}19 - 0{,}00785\, r}{1{,}19 + 0{,}00785\, r} Q,$$

insbesondere z. B. für

	$r =$	20	40	60	80	100 Centim.
	$S >$	1,13	0,96	0,82	0,70	0,61 Q,
also	$S_2 = S - \frac{1}{2} Q >$	0,63	0,46	0,32	0,20	0,11 Q
und	$S_1 = S + \frac{1}{2} Q >$	1,63	1,46	1,32	1,20	1,11 Q.

Bei einem Rollenhalbmesser $r = \frac{1}{0{,}00785} = 127$ Centimeter

wäre $S = \frac{1}{2} Q, \quad S_2 = 0, \quad S_1 = Q$

schon ausreichend, würde also unter den hier zu Grunde liegenden (bezüglich auf n freilich ganz willkürlichen) Voraussetzungen der Atmosphärendruck allein genügen, um die zur Uebertragung der Kraft Q erforderliche Reibung zu vermitteln. —

Der hier besprochenen günstigen Wirkung des Atmosphärendruckes steht, und zwar bei allen Rollengetrieben, eine ungünstige gegenüber in dem Einflusse der Centrifugalkraft, die den Druck des Bandes auf die Rolle bei grosser Geschwindigkeit wesentlich verkleinern kann. Ist nämlich p das Gewicht der Längeneinheit des Bandes, v seine Geschwindigkeit $=$ der Peripheriegeschwindigkeit der Rolle, bezogen auf den bis zur Bandmittellinie gerechneten Halbmesser r, so ist die Centrifugalkraft eines dem Mittelpunktswinkel $d\varphi$ des umspannten Bogens entsprechenden Bandelementes

$$=\frac{p r\, d\varphi}{g}\frac{v^2}{r}=p\frac{v^2}{g}d\varphi,$$

und indem sie dem Normaldrucke $= X d\varphi$, der nach obiger Entwickelung durch die Bandspannung X verursacht wird, gerade entgegenwirkt, ist die betreffende Reibung nur

$$=\mu\left(X-p\frac{v^2}{g}\right)d\varphi.$$

Für den Grenzzustand bezüglich auf Rutschen des Bandes ist sie wieder $= dX$, und folgt dann aus der Gleichung:

$$\frac{dX}{X-p\frac{v^2}{g}}=\mu\, d\varphi$$

durch Integration zwischen den Grenzen S_2 und S_1 von X, 0 und α von φ:

$$ln\frac{S_1-p\frac{v^2}{g}}{S_2-p\frac{v^2}{g}}=\mu\alpha$$

$$S_1-p\frac{v^2}{g}=m\left(S_2-p\frac{v^2}{g}\right) \text{ mit } m=e^{\mu\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Diese Beziehung tritt an die Stelle von Gl. (1), und da die damit zu verbindende Gleichung $S_1-S_2=Q$ durch gleiche Abzüge von S_1 und S_2 nicht geändert wird, so erfahren auch die Bedingungen (2) für S_2 und S_1 sowie die Bedingung (3) für $S=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$ nur die Aenderung, dass auf der rechten Seite der Summand $p\frac{v^2}{g}$ hinzuzufügen ist. Dieselbe Bemerkung

gilt von den Gleichungen (4). Wenn dabei die Zahlenwerthe von v und g auf das Meter als Längeneinheit bezogen werden, so ist auch unter p das Bandgewicht pro 1 Mtr. Länge zu verstehen.

Für ein bestimmtes Band hat S_1 einen gewissen als höchstens zulässig gegebenen Werth. Aus der Bedingung:

$$S_1 > \frac{m}{m-1} Q + p \frac{v^2}{g}$$

folgt also die durch das Band bei gegebener Geschwindigkeit v höchstens übertragbare Umfangskraft:

$$max\, Q = \frac{m-1}{m}\left(S_1 - p \frac{v^2}{g}\right).$$

Sie wäre $= 0$ für $$v = v_0 = \sqrt{\frac{g S_1}{p}} \quad \ldots\ldots (6).$$

Indem aber die übertragbare Arbeitstärke $= Qv$ am grössten wird für

$$S_1 v - p \frac{v^3}{g} = max, \text{ also } S_1 - 3p \frac{v^2}{g} = 0,$$

also für $$v = v_1 = \sqrt{\frac{g S_1}{3p}} = 0{,}577\, v_0 \quad \ldots\ldots (7),$$

entsprechend $$max\,(Qv) = \frac{2}{3} \frac{m-1}{m} S_1 v_1 \quad \ldots\ldots (8),$$

ist es nicht nur nöthig, dass $v < v_0$, sondern auch rathsam, dass $v \overline{\gtrless} v_1$ sei. Die Berücksichtigung des Atmosphärendruckes bei Riemengetrieben hat eine Aenderung von v_0 und v_1 nicht zur Folge, nur eine solche von $max\,(Qv)$, indem nach Gl. (4) zu setzen ist:

$$\frac{m - 1 + \frac{\mu a}{n k}}{m} \text{ statt } \frac{m-1}{m}.$$

Wenn z. B. die Dichte eines Lederriemens $= 0{,}9$ angenommen wird, also das Gewicht eines Cubikcentimeters $= 0{,}0009$ Kgr. oder das Gewicht eines Lederprisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratcentim. Querschnitt $= 0{,}09$ Kgr., so ist für einen Riemen von b Centim. Breite und 0,45 Centim. Dicke das Gewicht pro 1 Mtr. Länge:

$$p = 0{,}09 \,.\, 0{,}45\, b = 0{,}0405\, b \text{ Kgr.}$$

Hiermit und mit obiger Annahme: $S_1 = 10\, b$ Kgr. folgt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81 \,.\, 10}{3 \,.\, 0{,}0405}} = 28{,}4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

Wenn ferner ein Drahtseil aus n Eisendrähten von je d Millim. Durchmesser besteht und in Folge der spiralförmigen Windungen der Drähte in

den Litzen und der Litzen im Seile die Länge des letzteren $= 0{,}9$ von der Drahtlänge angenommen wird, so ist bei einer zulässigen specifischen Spannung der Drähte von 6 Kgr. pro Quadratmillim. (abgesehen von der hinzukommenden Biegungsspannung beim Umlegen um eine Rolle):

$$S_1 = \frac{1}{0{,}9} \cdot 6\, n \frac{\pi d^2}{4},$$

indem dann auch der Cosinus des durchschnittlichen Neigungswinkels der Drahtmittellinien gegen die Seilmittellinie $= 0{,}9$ ist. Weil ferner die Dichte des Drahteisens $= 7{,}7$ gesetzt werden kann, also das Gewicht eines Prisma von 1 Mtr. Länge und 1 Quadratmillim. Querschnitt = dem Gewichte eines Cubikcentimeters $= 0{,}0077$ Kgr., ergiebt sich:

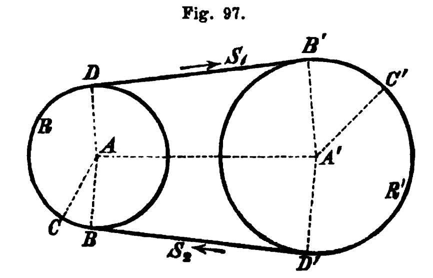
$$p = \frac{1}{0{,}9} \cdot 0{,}0077\, n \frac{\pi d^2}{4}$$

und somit $$v_1 = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 6}{3 \cdot 0{,}0077}} = 50{,}4 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

§. 84. Reibung in Folge partiellen Gleitens des Zugkraftorgans bei Rollengetrieben.

Wie schon im vorigen Paragraph bemerkt wurde, ist ein gewisses partielles Gleiten des mit einer Rolle gepaarten Zugkraftorgans unvermeidlich in Folge der verschiedenen Spannungen S_1 und S_2, somit auch der verschiedenen Dehnungen ε_1 und ε_2, womit es einerseits auf die Rolle aufläuft und andererseits von ihr abläuft. Bei doppelten Rollengetrieben ist in Folge dessen die (auf die Mittellinie des Zugkraftorgans bezogene) Peripheriegeschwindigkeit der treibenden Rolle $= v'$ etwas grösser, als die der getriebenen $= v$, und ist dann auch in demselben Verhältnisse die von der Umfangskraft $Q = S_1 - S_2$ der treibenden Rolle pro Secunde geleistete Arbeit Qv' grösser, als die auf die andere gleichzeitig übertragene Arbeit Qv.

Fig. 97.



Ist nämlich (Fig. 97) R die getriebene, R' die treibende Rolle, so muss das Band, da längs dem Bogen BD der getriebenen Rolle R seine Spannung von S_2 bis S_1, seine Dehnung von ε_2 bis ε_1 zunimmt, nothwendig im Sinne seiner Bewegung relativ gegen R gleiten

Indem dieses Gleiten den Grenzzustand des Gleichgewichtes bezüglich auf die Reibung voraussetzt, entsprechend der Gleichung

$$S_1 = S_2 \, . \, e^{\mu \alpha},$$

erstreckt es sich nicht längs dem ganzen umspannten Bogen BD, sondern nur längs dem Theile CD, dessen Mittelpunktswinkel α durch jene Gleichung bestimmt ist, während bis C die Spannung $= S_2$, die Dehnung $= \varepsilon_2$ bleibt. Ebenso bleibt auf der treibenden Rolle die Spannung des Bandes $= S_1$, seine Dehnung $= \varepsilon_1$ bis zu einer gewissen Stelle C' des umspannten Bogens $B'D'$, während es längs dem Bogen $C'D'$ in dem Maasse, wie die Spannung und Dehnung allmählig bis S_2 und ε_2 abnehmen, entgegen seinem Bewegungssinne relativ gegen R' gleitet. Indem nun die Peripheriegeschwindigkeiten der Rollen gleich den Geschwindigkeiten der sie ohne Gleitung berührenden Bandstücke $B'C'$ und BC, also proportional den Längen sind, die dasselbe Bandstück bei den Dehnungen ε_1 und ε_2 besitzt, ergiebt sich

$$\frac{v'}{v} = \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2}$$

und der verhältnissmässige Geschwindigkeitsverlust = dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste:

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2}$$

oder sehr nahe, wenn E der Elasticitätsmodul, F der Querschnitt des Bandes ist:

$$\frac{v' - v}{v} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{S_1 - S_2}{EF} = \frac{Q}{EF} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Wenn z. B. nach vorigem Paragraph für das Millimeter als Längeneinheit im Falle eines Lederriemens von b Millim. Breite und 4,5 Millim. Dicke, also $F = 4{,}5\, b$ Quadratmillim. Querschnitt

$$S_1 = b \text{ Kgr.} = \frac{1}{4{,}5} F \text{ Kgr. und } Q = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{9} F \text{ Kgr.}$$

gesetzt wird, so ergiebt sich nach Gl. (1) mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillimeter

$$\frac{v' - v}{v} = \frac{1}{9E} = \frac{1}{135} = 0{,}0074 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

entsprechend einem Arbeitsverlust von ungefähr $^3/_4$ Procent der übertragenen Arbeit. Bei Drahtseilgetrieben ist dieser Verlust stets so klein, dass er nicht in Betracht kommt; insbesondere mit

$$S_1 = \frac{1}{0{,}9} \, . \, 6\, n \frac{\pi d^2}{4} = 6F \text{ und } Q = \frac{1}{2} S_1 = 3F$$

nach vorigem Paragraph wäre mit $E = 20000$:

$$\frac{v'-v}{v} = \frac{3}{E} = \frac{3}{20000} = 0{,}00015 \qquad (3).$$

Mit dem Umstande, dass ein hinlänglich gespannter Riemen sich von der Stelle B resp. B' an, wo er auf eine Rolle R resp. R' (Fig. 97) aufläuft, zunächst bis zu einer gewissen Stelle C resp. C' ohne Gleitung auf die Rolle auflegt, hängt es auch zusammen, dass die Mittellinie des auf eine Rolle auflaufenden Riemenstücks in der Mittelebene dieser Rolle liegen muss, um Sicherheit gegen das Abfallen des Riemens zu gewähren, wogegen das ablaufende Riemenstück ohne Nachtheil unter einem ziemlich beträchtlichen Winkel gegen fragliche Mittelebene geneigt sein darf; wäre nämlich jene Bedingung für das auflaufende Riemenstück nicht erfüllt, so würde es sich spiralförmig auf die betreffende Rolle auflegen und somit unvermeidlich alsbald den Rand derselben erreichen, wenn nicht durch andere Umstände ein seitliches Gleiten des Riemens in solchem Sinne veranlasst wird, dass er sich mit seiner Mittellinie stets aufs Neue der Mittelebene der Rolle zuwendet. Ein solcher Umstand, der indessen auch nur sehr kleine Abweichungen von jener fundamentalen Regel einer Riemenführung unschädlich machen kann, ist, wie nebenbei hier bemerkt werden mag, die übliche convexe Wölbung einer Riemenrolle, die zur Folge hat, dass bei transversaler Bewegung des Riemens der in Beziehung darauf hintere Riemenrand mit seiner Annäherung an die Mittelebene verlängert wird. Mit solcher longitudinalen Dehnung ist aber eine transversale Contraction, somit ein seitliches Gleiten im Sinne von dem schwächer gespannten gegen den stärker gespannten Riemenrand verbunden.

In noch höherem Grade mag übrigens dem Abfallen des Riemens aus folgendem Grunde durch die Wölbung der Rollen entgegen gewirkt werden. Es seien $s_1 = \frac{S_1}{b}$ und $s_2 = \frac{S_2}{b}$ die den Riemenspannungen S_1 und S_2 entsprechenden specifischen, d. h. auf die Einheit der Riemenbreite bezogenen Spannungen. Wenn nun zunächst bei der getriebenen Rolle R, Fig. 97, das Riemenstück BC aus irgend einem Anlass eine seitliche Verschiebung erfährt, so wird dadurch die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_2$, am anderen $< s_2$, während sie bei D in der ganzen Breite gleichmässig $= s_1$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2\, e^{\mu\alpha}$ ergiebt sich somit α für den schwächer gespannten Rand (Spannung $< s_2$) grösser, so dass an diesem das longitudinale Gleiten im Sinne der Riemenbewegung früher beginnt und durch convexe Biegung eine seit-

liche Ablenkung gegen den stärker gespannten Rand hin zur Folge hat, wodurch die Mittellinie des Riemens sich gegen die Mittelebene der Rolle zurückbewegt. Ebenso wird in Folge einer seitlichen Verschiebung des Riemenstücks $B'C'$ auf der treibenden Rolle R' die specifische Spannung an dem der Mittelebene sich nähernden Riemenrande $> s_1$, am anderen $< s_1$, während sie bei D' in der ganzen Breite gleichmässig $= s_2$ ist. Entsprechend der Gleichung $s_1 = s_2 e^{\mu\alpha}$ ergiebt sich also hier α grösser für den stärker gespannten Rand (Spannung $> s_1$), so dass an ihm das longitudinale Gleiten entgegen dem Bewegungssinne des Riemens früher beginnt und dadurch jetzt mit concaver Biegung wieder eine seitliche Ablenkung gegen diesen stärker gespannten Rand hin zur Folge hat.

§. 85. Steifigkeit von Zugkraftorganen.

Die Steifigkeit eines Zugkraftorgans äussert sich dadurch, dass der Krümmungsradius desselben nur stetig sich ändern, dass er insbesondere nicht plötzlich von ∞ in r oder umgekehrt übergehen kann, unter r den um die halbe Dicke des Zugkraftorgans vergrösserten Radius einer mit ihm gepaarten Rolle verstanden. Ist dann S die Spannung des Zugkraftorgans an einer Stelle, wo es gerade gestreckt, also noch nicht oder nicht mehr mit der Rolle in Berührung ist, so ist in Bezug auf deren Axe der Hebelarm von S im Allgemeinen nicht $= r$, sondern $= r + s$, unter s eine Grösse verstanden, die positiv oder negativ sein kann, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und je nach den Ursachen, die der Steifigkeit zu Grunde liegen.

In letzterer Hinsicht ist namentlich zu unterscheiden, ob die Steifigkeit von der Elasticität des Materials herrührt oder von innerer Reibung bei discontinuirlicher Beschaffenheit des Zugkraftorgans, wie solche insbesondere bei Seilen und Ketten vorliegt. Im ersten Falle ist s stets positiv, einerlei ob es sich um Auf- oder Abwickelung des Zugkraftorgans handelt, und es wird die Arbeit, die zur Biegung des gestreckten Bandes bei seiner Aufwickelung auf die Rolle oder Trommel aufgewendet werden muss, bei der Abwickelung wieder gewonnen; im zweiten Falle aber ist s nur bei der Aufwickelung positiv, bei der Abwickelung dagegen negativ, indem die Streckung des gebogenen nicht minder wie die Biegung des gestreckten Bandes den Aufwand einer gewissen Arbeit erfordert. Wenn also, wie gewöhnlich, die Steifigkeit von beiden Ursachen zugleich herrührt, so findet bei der Aufwickelung jedenfalls eine Absperrung statt, einem



positiven s entsprechend, während bei der Abwickelung s positiv, Null oder negativ sein kann, jenachdem die Elasticität oder die innere Reibung von überwiegendem Einflusse ist.

Insofern die Steifigkeit von der Elasticität herrührt, kann sie als Bewegungswiderstand in Betracht kommen, wenn das durch einen Nutzwiderstand gespannte Zugkraftorgan, insbesondere z. B. ein Drahtseil auf eine Windetrommel aufzuwinden ist. Der Biegungswiderstand eines solchen Drahtseils ist wesentlich kleiner, als der eines homogenen Stabes von gleicher Dicke und gleichem Material; indem nämlich in Folge spiralförmiger Windung der Drähte in den Litzen und der Litzen im Seile jeder Draht periodisch in die kleinste und die grösste Entfernung von der Trommelaxe gelangt, ist damit wegen relativer Verschiebung der Drähte gegen einander keine wesentliche Aenderung ihrer mittleren Spannung verbunden. Abgesehen von der durch diese Verschiebung bedingten inneren Reibung kann somit die Arbeit, die ein aus n Drähten von je d Millim. Durchmesser bestehendes Seil pro Längeneinheit zur Aufwickelung auf eine Trommel von r Millim. Radius erfordert, dem n-fachen der betreffenden Biegungsarbeit A pro Längeneinheit eines einzelnen Drahtes gleich gesetzt werden. Letztere ist (siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit“, S. 394, Gl. 694):

$$A = \frac{EJ}{2\,r^2} = \frac{E}{2\,r^2}\,\frac{\pi d^4}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn also jeder Draht im Sinne der Seilmittellinie die Kraft

$$S = \frac{6}{0{,}9}\,\frac{\pi d^2}{4}$$

zu übertragen hätte, entsprechend einer specifischen Spannung = 6 Kgr. pro Quadratmillim. im Sinne der Drahtmittellinie, falls der Cosinus ihres durchschnittlichen Neigungswinkels gegen die Seilmittellinie (wie in §. 83) $= 0{,}9$ gesetzt wird, so wäre, da diese Kraft S bei der Aufwickelung eines Seilstücks von der Länge = 1 auch die Arbeit S verrichtet, der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die elastische Seilsteifigkeit:

$$\frac{A}{S} = \frac{0{,}3\,E}{64}\left(\frac{d}{r}\right)^2 = \frac{3000}{32}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

mit $E = 20000$ Kgr. pro Quadratmillimeter für Eisendraht. Bei $r > 800\,d$ ist er $< 0{,}00015$ und deshalb zu vernachlässigen.

Von Wichtigkeit dagegen, und zwar nicht nur bei Winden, sondern auch bei Rollengetrieben ist dieser elastische Biegungswiderstand von Zugkraftorganen insofern, als er mit erhöhter Anstrengung derselben verbunden

ist. Insbesondere wird dadurch die specifische Spannung der Drähte eines Drahtseils bei obiger Bedeutung der Buchstaben um

$$k = E\frac{d}{2r}$$

vergrössert, und wenn diese Vergrösserung z. B. für Eisendraht höchstens $= 12$ Kgr. pro Quadratmillim. sein soll, damit die Gesammtspannung < 18 Kgr. bleibe und somit höchstens etwa $^1/_3$ der Zugfestigkeit erreiche, so muss mit $E = 20000$:

$$r > \frac{20000}{24} d, \text{ d. i. } > 833\, d$$

sein. In dem gewöhnlichen Falle eines aus 36 Drähten (6 Litzen zu je 6 Drähten) bestehenden Seiles ist der äussere Durchmesser desselben ungefähr $= 8\, d$, und muss also der Rollenhalbmesser wenigstens 100 mal so gross sein, wie die Seildicke, wenn jene höchstens zulässige Anstrengung nicht überschritten werden soll.

Fast unbeschränkt ist die Wahl des Rollenhalbmessers bei einem Riemengetriebe, wenn auch die Riemenspannung höchstens $= {}^1/_3$ der Zugfestigkeit werden soll. Der Zuwachs k dieser Spannung eines Riemens von der Dicke d auf einer Rolle vom Halbmesser r ist jedenfalls

$$< E\frac{d}{2r},$$

da der Riemen sich nicht vollständig wie ein homogener elastischer Stab verhält, mit seiner Biegung vielmehr eine relative Verschiebung der Gewebefasern in um so höherem Grade verbunden ist, je stärker der Riemen gebogen wird. Mit $E = 15$ Kgr. pro Quadratmillim. und $d = 4{,}5$ Millim. ist also selbst für $r = 50$ Millim.

$$k < \frac{15 \,.\, 4{,}5}{100}, \text{ d. i. } < 0{,}68$$

und bleibt also die resultirende specifische Spannung, wenn sie im gestreckten und somit auch in der Mittelfläche des gebogenen Riemens (wie in den vorigen Paragraphen) $= \frac{1}{4{,}5} = 0{,}22$ Kgr. pro Quadratmillim. angenommen wird, wesentlich $< 0{,}9$ Kgr., während die Zugfestigkeit guten Rindsleders zu wenigstens 2,7 Kgr. pro Quadratmillim. anzunehmen ist. —

Die innere Reibung als Ursache der Steifigkeit eines Zugkraftorgans von discontinuirlicher Beschaffenheit, nämlich der Widerstand gegen die mit einer Krümmungsänderung seiner Mittellinie verbundene relative Bewegung seiner Bestandtheile (insbesondere der Fäden oder Drähte eines Seils, der Glieder einer Kette) ist sehr leicht zu beur-

theilen und in Rechnung zu bringen bei einer Kette, die in Folge ihrer Paarung mit einer Rolle oder Trommel sich auf- oder abwickelt. Ist r der Halbmesser der letzteren (gerechnet bis zur Mittellinie der Kette), d der Durchmesser des Rundeisens, woraus die Kettenglieder verfertigt sind, oder der Bolzendurchmesser bei sogenannten Gelenk- oder Laschenketten, und ist α der Mittelpunktswinkel des einem einzelnen Kettengliede entsprechenden Bogenstücks der von der Kette umspannten Rolle, so haben sich zwei auf einander folgende Kettenglieder um den Winkel α gegen einander zu drehen während die Rolle sich um denselben Winkel dreht, also ein Kettenstück $= r\alpha$ sich auf- oder abwickelt. Ist dann S die Kettenspannung an der Auf- oder Abwickelungsstelle und μ der Reibungscoefficient, so wirkt jener relativen Verdrehung der Kettenglieder eine Reibung $= \mu S$ mit einer Arbeit $= \mu S \frac{d}{2} \alpha$ entgegen, während die Zugkraft S der Kette die Arbeit $S r \alpha$ verbraucht oder verrichtet, jenachdem es sich um Auf- oder Abwickelung der Kette handelt. Somit ist die dem Gleichgewichtszustande entsprechende, am Hebelarme r wirkende Umfangskraft Q der Rolle für den Fall der Aufwickelung bestimmt durch die Gleichung:

$$Q r \alpha = S r \alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Q r = S\left(r + \frac{\mu d}{2}\right)$$

und für den Fall der Abwickelung durch die Gleichung:

$$S r \alpha = Q r \alpha + \mu S \frac{d}{2} \alpha \text{ oder } Q r = S\left(r - \frac{\mu d}{2}\right),$$

allgemein also $$Q r = S(r + s) \text{ mit } s = \pm \frac{\mu d}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

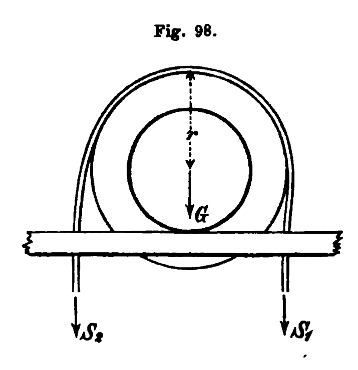
Der verhältnissmässige Arbeitsverlust ist $= + \frac{s}{r} = \frac{\mu d}{2 r}$.

Bei Seilen hängt die analoge Grösse s von sehr mannigfachen Umständen ab: von der Beschaffenheit des Materials der Fäden oder Drähte und von der Art, wie das Seil aus ihnen hergestellt ist, insbesondere von ihrer mehr oder weniger starken Drehung in den Litzen und der letzteren im Seile, ferner von Substanzen, die absichtlich und dauernd (Theer) oder unabsichtlich und zeitweilig (Wasser in feuchtem Medium) das Seil durchdringen, von der Seilspannung und vom Radius der Rolle, vielleicht auch von der Geschwindigkeit, sofern die der Krümmungsänderung entsprechende relative Verschiebung der Fäden und Drähte eine gewisse Zeit erfordert, überhaupt also von einer so grossen Zahl und von so gearteten Umständen, dass ein genügender Aufschluss über die Wirkung derselben nur von Ver-

suchen zu erwarten ist, die bisher nur in wenig umfassender Weise angestellt wurden.

Am meisten Vertrauen scheinen einige Versuche Weisbach's zu verdienen, bei denen, wie Fig. 98 andeutet, die Versuchsrollen mit zwei auf ihren Axen fest sitzenden und auf einer horizontalen Schienenbahn laufenden gleichen Rädern verbunden waren. Das zu prüfende Seil wurde über die Rolle gelegt, beiderseits mit gleichen Gewichten S_2 belastet, und dann zunächst auf der einen, demnächst auf der anderen Seite allmählig so lange weiter belastet bis der Apparat zu rollen anfing. Das dazu nöthige Zulagegewicht wäre in beiden Fällen ganz gleich, wenn die Schienenbahn genau horizontal wäre; setzt man aber $S_1 = S_2 +$ dem arithmetischen Mittel der beiden Fällen entsprechenden Zulagegewichte, so wird dadurch ein etwaiger kleiner Fehler der horizontalen Schienenlage eliminirt und ist, unter G das Gewicht des Apparates und unter m die Constante der Walzenreibung (§. 81) verstanden,

Fig. 98.



$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + m(S_1 + S_2 + G)$$

oder

$$(S_1 - S_2)r = S_2 s_2 - S_1 s_1 + m(S_1 + S_2 + G).$$

Dafür kann, da S_1 und S_2 hier nur sehr wenig verschieden sind, mit $S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ ohne in Betracht kommenden Fehler auch gesetzt werden:

$$(S_1 - S_2)r = S(s_2 - s_1) + m(2S + G)$$

und ergiebt sich daraus die Grösse $s_2 - s_1$, nachdem die Constante m durch einen zweiten Versuch bestimmt wurde, bei welchem unter übrigens gleichen Umständen statt des Versuchsseiles eine so biegsame Schnur benutzt wird, dass für dieselbe s_1 und s_2 = Null gesetzt werden können. Da ferner die von der Elasticität herrührenden Bestandtheile von s_1 und s_2 einander gleich zu setzen sind, so können in der gefundenen Differenz $s_2 - s_1$ unter s_1 und s_2 auch die von der Elasticität unabhängigen, nur von innerer Reibung herrührenden betreffenden Grössen verstanden werden. Von diesen ist s_1 hier negativ und absolut genommen dem positiven s_2 gleich zu setzen, allgemein also $s_2 - s_1 = \pm 2s$, unter $r + s$ den Hebelarm verstanden, mit welchem bei alleiniger Rücksicht auf die von innerer Reibung herrührende Steifigkeit sich das betreffende, durch die Kraft S gespannte Seil auf die

Rolle vom Radius r aufwickelt resp. davon abwickelt. Weisbach fand diese Grösse ziemlich entsprechend der empirischen Formel:

$$s_2 - s_1 = \pm 2s = a + b\frac{r}{S},$$

unter a und b Constante verstanden, die von der Dicke und sonstigen Beschaffenheit des Seiles abhängen. Insbesondere ergab sich, wenn r in Centimetern, S in Kilogrammen ausgedrückt wird, für ein getheertes Hanfseil von 4,18 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}565 + 1{,}5\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein neues ungetheertes Hanfseil von 1,96 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}164 + 0{,}086\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein Drahtseil von 1,74 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}238 + 0{,}49\frac{r}{S}\text{ Centim.},$$

für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile von 1,53 Centim. Durchmesser:

$$\pm 2s = 0{,}0694 + 0{,}57\frac{r}{S}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Grösse s von der Dicke und der Herstellungsart des Seiles, z. B. auch bei Drahtseilen von der Anzahl und Dicke der Drähte bei gegebener Seildicke abhängt, bleibt näherer Prüfung vorbehalten. Setzt man aber vorläufig den Absolutwerth von s proportional d^2, unter d hier den Seildurchmesser in Centimetern verstanden, eine Annahme, die insbesondere auch den Folgerungen Eytelwein's und Redtenbacher's aus älteren Versuchen Coulomb's mit Hanfseilen entspricht, so ergiebt sich aus obigen Resultaten der Weisbach'schen Versuche im Mittel:

$$\left.\begin{aligned}\text{für Hanfseile: } s &= \pm\left(0{,}019 + 0{,}027\frac{r}{S}\right)d^2\text{ Centim.}\\ \text{für Drahtseile: } s &= \pm\left(0{,}027 + 0{,}102\frac{r}{S}\right)d^2\text{ Centim.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots(4).$$

Hiernach ist u. A. der bei einem Seilgetriebe durch die Seilsteifigkeit verursachte Arbeitsverlust zu beurtheilen. Ist dabei S_1 die Spannung des straffen, S_2 die des schlaffen Seilstückes und Q die Umfangskraft, so ist mit Bezug auf die getriebene sowohl wie die treibende Rolle (vom Halbmesser r):

$$S_1(r + s_1) = S_2(r + s_2) + Qr,$$

indem dabei die Grössen s_1 und s_2, die hier nur mit ihren von der Elasticität unabhängigen Bestandtheilen in Betracht kommen, für die genannten zwei Fälle sich dadurch unterscheiden, dass für die getriebene Rolle s_2 positiv und s_1 negativ, für die treibende umgekehrt s_1 positiv und s_2 negativ ist. Indem also das obere Vorzeichen auf den ersten, das untere auf den zweiten Fall bezogen wird, ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \pm \frac{S_2 s_2 - S_1 s_1}{Qr}$$

oder, wenn nach Gl. (4) die Absolutwerthe von s_1 und s_2 beziehungsweise

$$= \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_1}\right) d^2 \text{ und } = \left(\alpha + \beta \frac{r}{S_2}\right) d^2$$

gesetzt werden, unter d die Seildicke verstanden, und mit $S_1 + S_2 = 3\,Q$ (§. 83):

$$\sigma = \frac{\alpha (S_1 + S_2) + 2\beta r}{Qr} d^2 = \left(\frac{3\,\alpha}{r} + \frac{2\,\beta}{Q}\right) d^2$$

$$= 3\,\alpha \frac{d^2}{r} + \frac{2\,\beta}{\gamma} \text{ mit } Q = \gamma d^2.$$

Für ein Seil von gegebener Art sind α, β, γ Constante, ist somit σ um so kleiner, je kleiner d und je grösser r ist. Setzt man insbesondere für ein Drahtseil nach Gl. (4) für das Centimeter als Längeneinheit

$$\alpha = 0{,}027 \text{ und } \beta = 0{,}102,$$

ferner im Falle von $n = 36$ Drähten zu je d_1 Millimeter $= \frac{10\,d}{8}$ Millimeter Durchmesser nach §. 83:

$$S_1 = 2\,Q = \frac{6}{0{,}9} n \frac{\pi d_1^2}{4} = 60\,\pi d_1^2 = \frac{6000}{64} \pi d^2,$$

also

$$\gamma = \frac{3000}{64} \pi = 147,$$

so ergiebt sich

$$\sigma = 0{,}08 \frac{d^2}{r} + 0{,}0014 \qquad (5)$$

Für Lederriemen fehlt es an bekannt gewordenen Versuchen über den Einfluss der Steifigkeit. Nimmt man aber etwa an, dass durch die bei der Streckung des von der Rolle ablaufenden Riemens verrichtete Elasticitätsarbeit die durch innere Reibung bei der Biegung des auflaufenden und bei der Streckung des ablaufenden Riemens verbrauchte Arbeit gerade aufgewogen wird, so besteht der ganze Arbeitsverlust für die getriebene oder für die treibende Rolle in derjenigen Arbeit, die zur Biegung des Riemens erfordert wird. Dieselbe ist nach Gl. (1) für ein Riemenstück von der Länge 1:

$$A = \frac{EJ}{2r^2} = \frac{E}{2r^2}\frac{bd^3}{12},$$

unter b die Breite, d die Dicke des Riemens verstanden, und da die gleichzeitige Arbeit der Umfangskraft Q selbst $= Q$ ist, so wäre der verhältnissmässige Arbeitsverlust:

$$\sigma = \frac{A}{Q} = \frac{Ebd^3}{24\,Qr^2}$$

oder für das Millimeter als Längeneinheit mit $E = 15$ und

$$S_1 = 2\,Q = \frac{1}{4{,}5}bd, \text{ also } \frac{bd}{Q} = 9:$$

$$\sigma = \frac{45}{8}\left(\frac{d}{r}\right)^2.$$

Insbesondere mit $d = 4{,}5$ Millim. wird $\sigma = \frac{114}{r^2}$ oder, wenn wie in Gl. (5) der Radius r in Centimetern ausgedrückt ist,

$$\sigma = \frac{1{,}14}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

ein Ausdruck, der freilich einstweilen nur als Nothbehelf zu betrachten ist in Ermangelung anderweitiger, besser begründeter Anhaltspunkte.

§. 86. Beispiele.

1) Der Arbeitsverlust bei Riemengetrieben rührt her von dem partiellen Gleiten des Riemens auf den Rollen, von der Steifigkeit desselben und von der durch die Riemenspannung vermehrten Zapfenreibung der die Rollen tragenden Wellen. Sind r und r' die Halbmesser der Rollen in Centimetern, so ist der durch die zwei ersten Umstände verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84, Gl. (2) und §. 85, Gl. (6)

$$= 0{,}0074 + 1{,}14\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)$$

z. B. =	0,030	0,013	0,009	0,008
für $r = r' =$	10	20	40	100 Centim.

Bei dem geringen Grade von Zuverlässigkeit dieser Werthe kann der betreffende Arbeitsverlust für Rollen von wenigstens 20 Centim. Radius allgemein zu 0,01 der übertragenen Arbeit geschätzt werden.

Sind ferner w und w' die Halbmesser der betreffenden Wellenzapfen, und ist μ' der Coefficient der Zapfenreibung im Sinne von §. 72, Q die Umfangskraft, so ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die den

Riemenspannungen S_1 und S_2 (§. 83) entsprechenden Zapfenreibungen, da jene Spannungen einen hinlänglich kleinen Winkel zu bilden pflegen, um ihre Resultante $= S_1 + S_2$ setzen zu können,

$$= \frac{\mu'(S_1 + S_2)\, w}{Q r} + \frac{\mu'(S_1 + S_2)\, w'}{Q r'}$$

$$= 3\, \mu' \left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } S_1 + S_2 = 3\, Q$$

$$= 0{,}2 \left(\frac{w}{r} + \frac{w'}{r'}\right) \text{ mit } \mu' = 0{,}067$$

$$= 0{,}03 \text{ bis } 0{,}06 \text{ mit } \frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075 \text{ bis } 0{,}15.$$

Bei liegenden Wellen stellt sich aber dieses Verhältniss wesentlich günstiger heraus mit Rücksicht auf das Gewicht G der Wellen, das in der Regel viel $> 3\, Q$ ist. Liegen dann die Wellen über einander, so hat die Riemenspannung lediglich die Wirkung, dass die untere Welle um den Betrag $3\, Q$ entlastet und dieser Theil ihres Gewichtes von den Lagern der oberen Welle getragen wird, so dass im Falle $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'}$ für beide zusammen gar keine Vermehrung der Zapfenreibung durch das Riemengetriebe bedingt wird. Je mehr freilich die durch die Wellenaxen gehende Ebene einer horizontalen Lage sich nähert, desto grösser wird der durch die Riemenspannung verursachte Zuwachs an Reibung, indem er bei gleicher Höhenlage beider Axen für die Welle vom Gewichte G bedingt wird durch den Druck:

$$\sqrt{G^2 + 9\, Q^2} - G, \text{ z. B.} = 3\, Q \quad Q \quad 0$$
$$\text{für } G = 0 \quad 4\, Q \quad \infty$$

Sofern aber thatsächlich $G > 4\, Q$ zu sein pflegt, ergiebt sich der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung, insoweit diese von der Riemenspannung herrührt, doch nur höchstens etwa $= 1/3$ des obigen ohne Rücksicht auf G ermittelten Werthes, d. h. höchstens $= 0{,}01$ bis $0{,}02$ für $\frac{w}{r} = \frac{w'}{r'} = 0{,}075$ bis $0{,}15$.

Bei Zahnrädergetrieben mit horizontalen Wellen findet ein Einfluss der Axenlage auf die Vergrösserung der Zapfenreibung durch den Theilrissdruck Q in umgekehrtem Sinne statt: liegen die Axen über einander, so findet eine solche Vermehrung derselben statt, die dem Druckzuwachse $\sqrt{G^2 + Q^2} - G$ entspricht; liegen sie aber in gleicher Höhe, so wird die eine Welle um Q entlastet und dieser Betrag des Zapfendruckes auf die andere Welle übertragen.

2) Bei **Drahtseilgetrieben** ist der vom Gleiten des Seiles auf den Rollen herrührende verhältnissmässige Arbeitsverlust nach §. 84 verschwindend klein. Der durch die Seilsteifigkeit verursachte ist für jede der beiden Triebrollen nach Gl. (5) in §. 85 zu beurtheilen, insbesondere mit $d = 0{,}01\, r$

$$= 0{,}0008\, d + 0{,}0014 = 0{,}002 \text{ bis } 0{,}003$$

zu setzen bei einem Seildurchmesser $d = {}^3/_4$ bis 2 Centimeter, für beide Triebrollen zusammen folglich $= 0{,}004$ bis $0{,}006$.

Die Verhältnisse $\frac{w}{r}$ und $\frac{w'}{r'}$ sind der grossen Rollendurchmesser wegen hier wesentlich kleiner, als bei Riemengetrieben, im Durchschnitt etwa $= 0{,}03$. Die durch die Seilspannung verursachte Vermehrung der Zapfenreibungsarbeit wird dann für das Seilgetriebe selten mehr als 0,005 der übertragenen Arbeit ausmachen, somit der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust kaum mehr als 0,01 abgesehen von den durch die Gewichte der Rollen sammt Wellen verursachten Zapfenreibungen, die je nach Umständen sehr verschieden sein können und in jedem Falle besonders beurtheilt werden müssen.

Liegen aber die beiden Triebrollen in so grosser Entfernung, dass das Seil an gewissen mittleren Stellen (in Abständen von etwa 100 Meter) der Unterstützung bedarf, so wird dadurch ein weiterer Arbeitsverlust bedingt, der für jede solche Zwischenstation, d. h. für je zwei über einander liegende Tragrollen (für das straffe und für das schlaffe Seilstück) oder für eine statt dessen eingeschaltete zweispurige, einerseits als getriebene, andererseits als treibende sich verhaltende Zwischenrolle mit Rücksicht auf die Seilsteifigkeit nach Obigem zu etwa 0,005 der übertragenen Arbeit veranschlagt werden kann ausser den Zapfenreibungsarbeiten, die den Eigengewichten und den von ihnen getragenen Seilgewichten dieser Zwischenrollen entsprechen.

Bei grosser, zuweilen bis 25 Mtr. pro Secunde betragender (nach §. 83 sogar bis 50 Mtr. zu erhöhender) Geschwindigkeit des langen Seiles mag schliesslich auch durch die dadurch mit in Bewegung versetzte adhärirende Luft ein merklicher Widerstand verursacht werden können.

3) Bei einem **Kettenrädergetriebe** sind die Verhältnisse vor Allem insofern abweichend von denen des Riemen- und des Seilgetriebes, als die Spannung S_2 des schlaffen Kettenstückes fast = Null sein darf und somit die Spannung S_1 des anderen nur wenig grösser als die Umfangskraft Q zu sein braucht. Die Glieder der in solchem Falle üblichen Gelenkkette sind durch Bolzen (Radius $= b$) drehbar verbunden, und indem die Zähne

des treibenden Rades in die Lücken zwischen diesen Kettenbolzen, letztere in die Zahnlücken des getriebenen Rades eingreifen, ist ein relatives Gleiten der Kette im Sinne ihrer Bewegung bezüglich auf die Räder ausgeschlossen. Dagegen findet eine relativ gleitende Bewegung der Kettenbolzen gegen die Zähne der Räder statt gleich als ob die Kette eine mit Triebstöcken statt der Zähne versehene Zahnstange wäre, die mit den Zahnrädern in Eingriff ist. Der dadurch verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, der somit hier an die Stelle des in §. 84 betrachteten tritt, ist nach §. 76, Gl. (5)

$$= \frac{\pi \mu}{z}$$

für das treibende oder getriebene Rad, wenn z die Zähnezahl desselben bedeutet. Die Steifigkeit äussert sich als Reibungswiderstand gegen die relative Drehung der Kettenglieder um die sie verbindenden Bolzen; er kommt wegen $S_2 = 0$ für das treibende Rad nur an der Aufwickelungsstelle, für das getriebene nur an der Abwickelungsstelle in Betracht und zwar nach §. 85, Gl. (3) mit einem verhältnissmässigen Arbeitsverlust

$$= \mu \frac{b}{r}$$

im einen oder anderen Falle, unter r den Theilrisshalbmesser des betreffenden Rades verstanden. Indem endlich dergleichen Kettenrädergetriebe zur Uebertragung grosser Kräfte Q dienen, die grösser, als die Gewichte der betreffenden Wellen zu sein pflegen, sind die Zapfenreibungen der letzteren hier dem Drucke Q entsprechend zu berechnen, da der entsprechende Zapfendruck für beide Wellen zusammen hier durch die Gewichte derselben in ähnlicher Weise nur wenig vergrössert wird wie bei Riemen- und Seilgetrieben umgekehrt die Spannung des Zugkraftorgans nur wenig den durch das überwiegende Wellengewicht bedingten Zapfendruck zu vergrössern pflegt. Unter w den Radius des betreffenden Wellzapfens verstanden, ist dann der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Zapfenreibung

$$= \mu' \frac{w}{r}.$$

Insbesondere mit $\pi \mu = 0{,}4$ (§. 76) und $\mu = \mu' = 0{,}08$ wäre also der ganze verhältnissmässige Arbeitsverlust für das einzelne Rad

$$= 0{,}08 \left(\frac{5}{z} + \frac{b + w}{r} \right)$$

und ebenso für das andere mit event. veränderten Werthen von z, w, r.

C. Theorie der Regulatoren.

§. 87. Einleitung.

Während in dem von der Kinematik handelnden ersten Theile dieses Abschnitts die Getriebe nur mit Rücksicht auf die von den Punkten ihrer beweglichen Glieder gleichzeitig durchlaufenen Bahnen und somit auch nur mit Rücksicht auf die Verhältnisse der gleichzeitigen Geschwindigkeiten dieser Punkte untersucht wurden, dagegen die Grössen der bewegenden Kräfte, der bewegten Massen und somit auch der dadurch bedingten Geschwindigkeiten selbst ausser Betracht blieben, sind von jenen Kräften, die im Allgemeinen in treibende Kräfte, Nutzwiderstände und Bewegungswiderstände unterschieden werden konnten, die letzteren im vorhergehenden zweiten Theile in beschränktem Umfange, nämlich als allgemeine Bewegungswiderstände besprochen worden mit Bezug auf Getriebe allgemeineren Charakters und Vorkommens im Gegensatze zu besonderen Bewegungswiderständen, die ebenso wie die Triebkräfte und Nutzwiderstände erst später bei besonderen Arten von Kraft- und Arbeitsmaschinen zu besprechen sein werden. Hier bleibt somit noch übrig die Berücksichtigung des Einflusses der bewegten Massen und der bewegenden Kräfte auf den Gang des Getriebes (resp. der im Allgemeinen als eine Verbindung von elementaren Getrieben sich darstellenden Maschine), d. h. auf die absoluten Grössen der Geschwindigkeiten, womit die Punkte der beweglichen Glieder sich zwangläufig bewegen. Ausgedrückt wird jener Einfluss durch die Gleichung der lebendigen Kraft, d. h. durch die Gleichung, welche die Aenderung der lebendigen Kraft der Maschine in irgend einer Zeit der algebraischen Summe der gleichzeitigen Arbeiten aller ihrer äusseren Kräfte gleich setzt.

Dem Zwecke einer Maschine entsprechend sollen in der Regel die Punkte gewisser ihrer Glieder mit möglichst unveränderlichen Geschwindigkeiten sich bewegen; ein solcher Punkt sei A, seine Geschwindigkeit $= v$. Indem dann die Glieder der Maschine in zweierlei Arten unterschieden werden können, jenachdem die Geschwindigkeiten ihrer Punkte constante oder variable Verhältnisse zu v haben, seien $M\frac{v^2}{2}$ und $m\frac{v^2}{2}$ die der Geschwindigkeit v des Punktes A entsprechenden lebendigen Kräfte beziehungsweise aller Glieder der ersten und der zweiten Art; M und m heissen die auf den Punkt A reducirten Massen der betreffenden Glieder, und es ist

M constant, m periodisch variabel, nämlich abhängig von den periodisch veränderlichen relativen Lagen der betreffenden Glieder. Ist andererseits P eine Triebkraft, Q ein Nutzwiderstand, R ein Bewegungswiderstand, S die Schwerkraft eines Gliedes von periodisch veränderlicher Höhenlage seines Schwerpunktes, und sind dp, dq, dr, ds die Absolutwerthe gleichzeitiger elementarer Wege dieser Kräfte (die auf die Richtungslinien der Kräfte projicirten Wege ihrer Angriffspunkte), so ist die Gleichung der lebendigen Kraft der Maschine, bezogen auf ein Zeitelement:

$$d\left[(M+m)\frac{v^2}{2}\right] = \Sigma P dp - \Sigma Q dq - \Sigma R dr + \Sigma S ds \quad \ldots \quad (1),$$

wobei die Summenzeichen Σ dem Umstande entsprechen, dass im Allgemeinen mehrere Kräfte von jeder der unterschiedenen Arten vorhanden sein können.

Indem diese Gleichung die Umstände gesondert darstellt, von denen die Geschwindigkeit v und somit der Gang einer Maschine abhängt, lässt sie insbesondere auch die Ursachen der Veränderlichkeit von v erkennen, nach denen die Hülfsmittel sich richten, die anzuwenden sind, um diese Veränderlichkeit auf ein möglichst geringes Maass zu reduciren. Solche und zwar selbstthätig wirkende Hülfsmittel oder Vorrichtungen, die selbst Getriebe sein können (dem Hauptgetriebe resp. der Maschine als Hülfsgetriebe hinzugefügt), heissen Regulatoren.

Jene Ursachen eines ungleichförmigen Ganges der Maschine sind theils solche, die eine periodische, theils solche, die eine nicht periodische Veränderlichkeit von v zur Folge haben. Erstere sind insbesondere periodische Aenderungen von m, $\Sigma P dp$ und $\Sigma Q dq$, bedingt durch die Configurationsänderungen der geschlossenen kinematischen Kette der betreffenden Maschine, indem dabei eine Periode der Zeitraum ist, in welchem die Kette ihre sämmtlichen Configurationen in stetiger Folge durchläuft. Das allgemeinste Hülfsmittel, um die von diesen Ursachen herrührenden periodischen Schwankungen von v in engere Grenzen einzuschliessen, besteht in der Vergrösserung von M, deren entsprechender Erfolg ohne Weiteres aus Gl. (1) ersichtlich ist. Insbesondere ist dieses als Massenregulator allgemein zu bezeichnende Hülfsmittel dann zweckmässig und gebräuchlich, wenn der Punkt A, dessen Geschwindigkeit v möglichst constant sein soll, einem rotirenden Gliede angehört, und besteht es dann in einem Schwungrade, das coaxial mit diesem oder mit einem anderen, mit proportionaler Winkelgeschwindigkeit gleichfalls rotirenden Gliede fest verbunden wird. Während in diesem Falle durch Anhäufung der Masse des Schwungrades in grosser Entfernung von der Axe die entsprechende reducirte Masse M beliebig

vergrössert werden kann ohne die effective Masse, somit die Kosten und die Reibung in den Lagern in gleichem Maasse vergrössern zu müssen, ist das weniger allgemein thunlich, wenn der Punkt A einem nicht um eine feste Axe rotirenden Gliede, z. B. einem geradlinig bewegten Gliede angehört, und kann es dann zweckmässiger sein, das auf Vergrösserung von v abzielende überschüssige Arbeitsvermögen (anstatt wie beim Schwungrade als freies) als gebundenes Arbeitsvermögen periodisch anzusammeln, insbesondere durch Hebung eines Gewichtes als äusseres oder durch Deformation eines elastischen Körpers (z. B. durch Compression von Luft in einem Windkessel) als inneres gebundenes Arbeitsvermögen, um demnächst als Vorrath zur Unterstützung von ΣPdp bei überschüssiger Grösse von ΣQdq zur Verwendung zu kommen. Dieselben Hülfsmittel, die als **Gewichtsregulatoren** oder **Federregulatoren** zu bezeichnen sind, jenachdem ihre regulirende Wirkung in der Verticalbewegung eines Gewichtes oder in der Deformationsänderung eines elastischen Körpers besteht, können auch neben einem Schwungrade oder anstatt eines solchen Anwendung finden. Die periodische Veränderlichkeit des Gliedes $\pm \Sigma Sds$ in Gl. (1) kann in der Regel durch Gewichtsregulatoren am einfachsten beseitigt oder vermindert werden, nämlich durch Gegengewichte, die sich periodisch in stets entgegengesetztem Sinne, wie die betreffenden Maschinenglieder von der Schwere S, so auf und ab bewegen, dass der Gesammtschwerpunkt auf nahe unveränderlicher Höhe bleibt. Das Glied ΣRdr bedarf hier keiner besonderen Rücksichtnahme, da die Bewegungswiderstände als secundäre Kräfte nebst ihren Arbeiten durch die besprochenen selbstständig veränderlichen Grössen bedingt werden.

Nicht periodische und dann meistens auch auf längere Dauer sich erstreckende (viele auf einander folgende Perioden hinsichtlich der Configurationsänderungen der kinematischen Kette umfassende) Aenderungen des Ganges werden durch zufällige oder willkürlich herbeigeführte Aenderungen theils der elementaren Arbeit ΣPdp der Triebkräfte, theils und vorzugsweise der elementaren Nutzarbeit ΣQdq verursacht, z. B. durch Ein- oder Ausrückung einzelner von mehreren Arbeitsmaschinen, die von einer gemeinsamen Kraftmaschine betrieben werden, oder bei intermittirend (mit mehr oder weniger langen Pausen) zu leistender Nutzarbeit, wie bei Krahnen und anderen Hebevorrichtungen. Die Regulirung pflegt dann durch entsprechende Aenderung entweder der Triebarbeit oder der Nutzarbeit zu geschehen, somit durch Mechanismen, die als **Regulatoren für Kraftmaschinen** und als **Regulatoren für Arbeitsmaschinen** unterschieden werden können. Erstere pflegen so zu wirken, dass dadurch die Arbeits-



flüssigkeit (motorische Substanz), die als Träger des zum Betriebe disponiblen Arbeitsvermögens dient (insbesondere Wasser, Wasserdampf, Luft) in veränderter Menge zugelassen wird. In ähnlicher Weise können zwar auch Regulatoren für Arbeitsmaschinen die Regelung der Geschwindigkeit durch eine Regelung der Quantität der jeweils durch die Maschine zu leistenden besonderen Art von Arbeit bewirken, sind dann aber von so mannigfach verschiedener Einrichtung wie die Arbeitsmaschinen selbst und deshalb einer zusammenfassenden allgemeinen theoretischen Besprechung, um die es sich hier handelt, kaum fähig. Dagegen kann die Ausgleichung einer variablen Nutzarbeit auch so geschehen, dass, jenachdem sie kleiner oder grösser, als der Mittelwerth für die betreffende Zeit ist, sie selbst oder die Arbeit der Triebkraft durch die Arbeit eines fremden Widerstandes, beziehungsweise einer fremden Triebkraft zeitweilig und selbstthätig unterstützt wird. Indem als solche Ergänzungskraft vorzugsweise die Schwerkraft oder Federkraft (Elasticität) geeignete Verwendung findet, sind die betreffenden Regulatoren im Princip von derselben Art wie die oben besprochenen Gewichts- und Federregulatoren zur Ausgleichung periodischer Ungleichförmigkeiten des Ganges, pflegen aber zusammen im vorliegenden allgemeineren Falle als Accumulatoren (Arbeitsammler) bezeichnet zu werden, indem sie dazu dienen, die Betriebsarbeit zur Zeit ihres augenblicklichen Ueberschusses als ein zur Deckung späteren Mangels disponibles Arbeitsvermögen anzusammeln.

Endlich kann die in Rede stehende Regulirung auch durch Aenderung, insbesondere durch Vergrösserung der Arbeit des Bewegungswiderstandes, dem Gliede $\Sigma R dr$ in Gl. (1) entsprechend, erzielt werden und trotz der damit verbundenen Verwandlung von Arbeitsvermögen in eine zu technischen Arbeitszwecken nicht weiter verwendbare Form von innerem gebundenem oder freiem Arbeitsvermögen (durch Abnutzung und Erwärmung in Folge von Reibung) doch u. U. gerechtfertigt sein, z. B. wenn es sich darum handelt, eine Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit niederzulassen, also die beschleunigende Wirkung der Schwere als Triebkraft durch eine hier als Nutzwiderstand zu betrachtende absichtlich hervorgerufene Reibung zu verhindern, oder wenn nicht sowohl die Erhaltung eines möglichst gleichförmigen Ganges, als vielmehr die Ermässigung desselben oder gar der Stillstand der Maschine bezweckt wird und anderweitige, hinlänglich einfache und schnell wirkende mehr ökonomische Hülfsmittel dazu nicht vorhanden sind. Getriebe solcher Art heissen Bremswerke. Sind sie auch nicht als Regulatoren im engeren Sinne zu betrachten, insofern sie theils nicht selbstthätig wirken, theils nicht zur Minderung von Geschwindigkeits-



änderungen, sondern gerade umgekehrt zur Bewirkung solcher Aenderungen im Sinne einer Geschwindigkeitsverkleinerung dienen, so mögen sie doch als verwandte Getriebe allgemeineren Charakters an dieser Stelle mit besprochen werden, und zwar in erster Reihe, da ihre Wirkung am unmittelbarsten auf den im vorigen Theile untersuchten Wirkungsgesetzen der allgemeinen Bewegungswiderstände beruht.

Hiernach wird im Folgenden der Reihe nach gehandelt werden von der Theorie der Bremswerke, der Schwungräder (als üblichster Form von Massenregulatoren), der Accumulatoren (die Gewichts- und Federregulatoren mit periodischer Wirkung als besondere Formen in sich begreifend) und der Regulatoren für Kraftmaschinen.

I. Bremswerke.

§. 88. Uebersicht.

Bremswerke oder Bremsen sind nach vorigem Paragraph Mechanismen, die dazu dienen, die Geschwindigkeit einer Maschine oder überhaupt einer bewegten Masse mit Hülfe eines Bewegungswiderstandes von regulirbarer Grösse möglichst constant zu erhalten oder zu vermindern, event. bis auf Null zu reduciren. Als jener Bewegungswiderstand wird meistens die Reibung, und zwar die Reibung zwischen festen Körpern verwendet, deren Grösse am unmittelbarsten durch den gegenseitigen Druck der betreffenden Körper regulirt werden kann, und wenn dann ausserdem die zu bremsende Maschine, wie es meistens der Fall ist, rotirende Wellen enthält oder zum Zwecke des Bremsens mit einer solchen Welle versehen wird, so besteht das Bremswerk im Allgemeinen aus einem Bremsrade, d. i. einem auf einer rotirenden Welle befestigten, theilweise von einer mit ihr coaxialen Umdrehungsfläche begrenzten Körper, ferner aus dem Bremskörper und endlich dem Mechanismus, der dazu dient, den Bremskörper relativ gegen das Bremsrad so zu verschieben, dass beide sich in jener Umdrehungsfläche mit einem gewissen Druck berühren, während sie wie die Elemente eines Drehkörperpaares (mit jener Umdrehungsfläche als Elementenfläche) in relativer Bewegung sind.

In Betreff des Sinnes, in welchem der Druck des Bremskörpers gegen das Bremsrad behufs des Bremsens verändert wird, können zwei Fälle stattfinden: entweder wird dabei dieser Druck überhaupt erst bis zu gewisser Grösse herbeigeführt, indem beide Körper, vorher ausser Berührung, durch

den betreffenden Mechanismus einander bis zur Berührung genähert werden, oder es wird der Druck zum Zwecke des Bremsens vermindert, indem er vorher so gross war, dass eine relative Bewegung beider Körper nicht stattfinden konnte, dieselben vielmehr wie ein einziger fester Körper sich verhielten. Im ersten Falle wird das aus dem Bremsrade und Bremskörper bestehende Elementenpaar als solches zum Zwecke des Bremsens erst hergestellt oder geschlossen, im zweiten wird es zwar nicht aufgehoben oder geöffnet, aber doch gelöst, d. h. die Berührung zu einer loseren (mit geringerem Drucke stattfindenden) gemacht, weshalb die Bremsen der ersten Art als Schliessungsbremsen, die der zweiten als Lösungsbremsen bezeichnet werden mögen. Den meistens angewendeten ersteren können letztere zu grösserer Sicherheit zuweilen vorgezogen werden. Wenn es sich z. B. darum handelt, eine Last von einer gewissen Höhe mit constanter Geschwindigkeit niederzulassen, so bedarf eine dazu dienende Schliessungsbremse einer gewissen äusseren Kraft, um die ohne sie eintretende Beschleunigung des Niederfallens zu hindern, während bei Anwendung einer Lösungsbremse die äussere Kraft das Niedersinken erst möglich macht, so dass, wenn es aus irgend einem Grunde an der nöthigen Grösse solcher Kraft fehlen sollte, die Last im ersten Falle beschleunigt herunter fiele, im zweiten nur schwebend erhalten würde.

Hauptregeln für die Anordnung einer Bremse sind: möglichst gleiche Vertheilung des die Reibung erzeugenden Druckes an diametral gegenüber liegenden Stellen des Bremsrades oder rings um dasselbe herum, damit nicht durch einseitigen Druck eine nachtheilige Wirkung auf die gebremste Welle, deren Zapfen und Lager ausgeübt werde; Anbringung des Bremsrades auf einer möglichst schnell umlaufenden Welle und grosser Durchmesser desselben, damit einer kleinen Reibung eine grosse Reibungsarbeit entspreche; Anordnung des Bremsrades an einer solchen Stelle, dass die zwischen ihm und dem Angriffspunkte der bewegenden Kraft resp. der zu verzögernden Masse von grösster lebendiger Kraft befindlichen Maschinentheile, die durch das Bremsen vorzugsweise deformirt und angestrengt werden, solche Einwirkung ohne Schaden vertragen können.

Je nach Form und Beschaffenheit des Bremskörpers sind namentlich folgende Hauptarten von Bremswerken zu unterscheiden:

1. Backenbremse. Der Bremskörper ist ein meistens hölzerner Klotz, der cylindrischen Umfläche des Bremsrades entsprechend cylindrisch begrenzt, oder besser ein System von zwei solchen Klötzen, die dann an diametral gegenüber liegenden Stellen radial gegen das Bremsrad anzudrücken sind.



2. **Bandbremse.** Der Bremskörper ist ein stetiges oder gegliedertes Band von verschiedener Beschaffenheit, das Bremsrad längs einem möglichst grossen Theile seines Umfangs umschliessend; der gegenseitige Druck wird durch Anspannung dieses Bandes bewirkt.

3. **Kegelbremse.** Der Bremskörper und das Bremsrad sind als Kegel und entsprechender Hohlkegel gestaltet, gegen einander gepresst durch eine axial gerichtete Kraft. —

Bei der Anordnung einer Bremse handelt es sich vor Allem um die den Umständen entsprechende **Grösse R der am Umfange des Bremsrades hervorzurufenden Reibung.** Zu dem Ende sei:

M die auf diesen Umfang reducirte gesammte bewegte Masse, also die Grösse $M+m$ der Gleichung (1) in §. 87, wenn der daselbst mit A bezeichnete Reductionspunkt im Umfange des Bremsrades liegend gedacht wird, ferner

P der auf dieselbe Stelle reducirte etwaige Ueberschuss der treibenden Kräfte über alle Widerstände vor dem Bremsen, d. i. die am Umfange des Bremsrades angreifende Tangentialkraft, deren elementare Arbeit gleich der rechten Seite jener Gleichung (1), §. 87, ist.

Durch das Bremsen wird diese überschüssige Triebkraft P in einen überschüssigen Widerstand $=R-P$ verwandelt, und erfährt dadurch der Umfang des Bremsrades eine Verzögerung

$$=\frac{R-P}{M},$$

in deren Folge, wenn diese Verzögerung constant ist oder näherungsweise mit einem constanten Mittelwerthe in Rechnung gebracht wird, die Peripheriegeschwindigkeit v des Bremsrades sich in t Sekunden um

$$\Delta v=\frac{R-P}{M}t$$

vermindert. Soll also durch das Bremsen v constant erhalten werden, so ist einfach

$$R=P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zu machen; soll aber in t Sekunden v um Δv vermindert werden, so muss

$$R=P+M\frac{\Delta v}{t}, \text{ insbesondere } =P+\frac{Mv}{t} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

sein, wenn in t Sekunden Stillstand herbeigeführt werden soll. Wäre statt der Zeit t der Weg s des Bremsradumfanges gegeben, nach dessen Durchlaufung v um Δv abgenommen resp. die Bewegung ganz aufgehört haben soll, so ergäbe sich mit

$$s = \left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) t$$

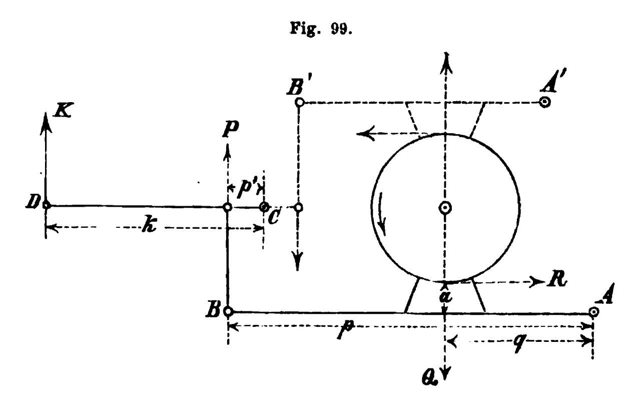
$$R = P + M \frac{\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) \Delta v}{s} \text{ resp. } = P + \frac{M v^2}{2 s} \cdots\cdots (3).$$

Die Beziehung zwischen R und der Kraft, die zum Zwecke des Bremsens am Angriffspunkte des betreffenden Mechanismus ausgeübt werden muss, ist von der Beschaffenheit dieses Mechanismus und von der Art der Bremse abhängig. Beispiele enthalten die folgenden Paragraphen.

§. 89. Backenbremse.

Wie Fig. 99 andeutet, werde der Bremskörper gegen das Bremsrad durch einen Hebel AB angedrückt, der um die feste Axe A drehbar ist und bei B von der Kraft P so angegriffen wird, dass p ihr Hebelarm in Bezug auf die Axe A ist. Der dadurch verursachte Druck zwischen Bremskörper und

Fig. 99.



Bremsrad sei $= Q$, angreifend gedacht im Mittelpunkte der Reibungsfläche, so dass sein Hebelarm in Bezug auf die Axe $A = q$ ist; ebenso verstanden sei R die entsprechende Reibung mit dem Hebelarme a für die Axe A. In Fig. 99 sind die Kräfte P, Q, R bezüglich ihrer Richtungen durch Pfeile so angedeutet wie sie auf den Hebel AB wirken bei Voraussetzung des durch den krummen Pfeil angedeuteten Drehungssinnes des Bremsrades. Dem Gleichgewichte dieser Kräfte entspricht dann die Gleichung:

$$Pp - Qq + Ra = 0$$

und folgt daraus mit $Q = \frac{R}{\mu}$, unter μ den Reibungscoefficienten verstanden:

$$P = \frac{R}{p}\left(\frac{q}{\mu} - a\right) = \frac{R}{\mu}\frac{q}{p}\left(1 - \mu\frac{a}{q}\right) \cdots\cdots (1).$$

Bei entgegengesetztem Drehungssinne des Bremsrades hätte auch R die entgegengesetzte Richtung, entsprechend dem Ersatze von a durch $-a$ in Gl. (1). Dieselbe Aenderung von Gl. (1) hätte bei unverändertem Drehungssinne des Bremsrades mit Bezug auf den entgegengesetzt liegenden Bremshebel $A'B'$, Fig. 99, stattzufinden, so dass, wenn beide Hebel AB, $A'B'$ mit gleichen absoluten oder auch nur verhältnissmässigen Grössen ihrer Hebelarme a, p, q zugleich angewendet werden, um die Bremsklötze von entgegengesetzten Seiten gegen das Rad zu drücken, indem nun ihre Enden B, B' mit den Kräften $\frac{1}{2}P$ angezogen werden, die entsprechende Reibung an beiden Stellen zusammen sein würde:

$$R = \frac{1}{2}\mu P\frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-\mu\frac{a}{q}} + \frac{1}{1+\mu\frac{a}{q}}\right) = \mu P\frac{p}{q}\,\frac{1}{1-\left(\mu\frac{a}{q}\right)^2}$$

oder sehr nahe, wenn $\frac{a}{q}$ ein ziemlich kleiner Bruch ist:

$$R = \mu P\frac{p}{q}, \text{ woraus } P = \frac{R}{\mu}\frac{q}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

folgt. Würden die beiden Bremshebel an den Enden B, B' nicht durch gleiche Kräfte angezogen (indem sie z. B. im Falle $A'B' = AB$ durch eine Schraube gegen einander bewegt werden), hätte vielmehr nur die Summe dieser Kräfte eine gegebene Grösse P, während ihre Vertheilung unter die zwei Angriffspunkte durch das Verhältniss der Reibungen beider Bremsklötze bedingt wird (wie es z. B. in Fig. 99 bei dem Antrieb durch die Kraft K an dem um die feste Axe C drehbaren Hebel CD der Fall ist), so würde jenes Vertheilungsverhältniss sich so lange ändern bis durch die Abnutzung der gleichen Bremsklötze auch die Reibungen zwischen ihnen und dem Rade gleich gross geworden wären, entsprechend der Gleichung:

$$P = \frac{1}{2}\frac{R}{\mu}\frac{q}{p}\left(1-\mu\frac{a}{q}+1+\mu\frac{a}{q}\right) = \frac{R}{\mu}\frac{q}{p},$$

d. h. der dann in aller Strenge gültigen Gleichung (2).

Ist $\frac{a}{q}$ ein sehr kleiner Bruch, so kann diese einfachere Gleichung (2) statt Gl. (1) selbst dann zu Grunde gelegt werden, wenn der Bremshebel nur einfach vorhanden ist, um so mehr, wenn nicht gleichzeitig auf die in solchem Falle stattfindende Aenderung des Zapfendruckes und somit der Zapfenreibung der Bremsradwelle Rücksicht genommen wird.

Nebenbei mag bemerkt werden, dass, wenn umgekehrt $\frac{a}{q}$ so gross ge-

macht würde, dass $\mu\frac{a}{q} \overline{\overline{>}} 1$ ist, dadurch die Drehung des Bremsrades in einem Sinne schon durch eine verschwindend kleine Kraft P verhindert werden und somit der Mechanismus als Gesperre (§. 58) Verwendung finden könnte. —

Beispielsweise stelle Fig. 99 die Disposition der Dampfbremse einer Schachtförderung dar. Es sei also K der Dampfdruck auf die untere Kolbenfläche eines vertical stehenden Dampfcylinders, k der Hebelarm, an dem diese Kraft K den Hebel CD um seine feste Axe C dreht, um dadurch am Hebelarme p' (bezüglich auf dieselbe Axe C) die grössere Kraft P auf den Bremshebel AB auszuüben; die horizontale Welle des Bremsrades (Radius $= b$) trage zugleich zwei Fördertrommeln (Radius $= r$), auf deren einer sich das die zu hebende Förderschale mit den beladenen Wagen tragende Seil aufwickelt, während das die niedergehende Schale mit den leeren Wagen tragende Seil sich von der anderen abwickelt. Ist

F das Gewicht einer Förderschale,
W das Gewicht der darauf stehenden (zwei) leeren Wagen,
L das Gewicht von deren Ladung,

so hängt also an dem einen Seile die Last $F + W + L$, am anderen $F + W$, so dass nur L durch die Fördermaschine zu heben ist.

Von solchen Fällen, in denen die Bremse in Thätigkeit zu setzen ist, mag als ungünstigster angenommen werden, dass die Förderschale mit den leeren Wagen durch Seilbruch oder aus sonstigem Anlasse in Wegfall gekommen sei, und dass nun die andere Schale unabhängig von der Maschine (die zu ihrem Schutze ausgerückt worden sein oder in welcher durch die plötzliche Vergrösserung der Last vielleicht schon ein Bruch stattgefunden haben mag) mit Hülfe der Bremse ohne Beschleunigung niedergelassen werden soll. Die dazu nöthige Reibung am Umfange des Bremsrades ist

$$R = (F + W + L)\frac{r}{b}$$

und damit die erforderliche Kolbenkraft nach Gl. (2), unter H die allein zum Anheben des Hebelwerkes nöthige Grösse von K verstanden,

$$K = \frac{p'}{k} P + H = \frac{p'}{k} \frac{q}{p} \frac{R}{\mu} + H \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

Z. B. für $F = 1000$, $W = 500$, $L = 1000$ Kgr.,

$$\frac{q}{p} = 0{,}4; \quad \frac{p'}{k} = 0{,}1; \quad \frac{r}{b} = 0{,}8; \quad \mu = 0{,}4$$

ergiebt sich $R = 2500 \,.\, 0{,}8 = 2000$ Kgr.

$$K = 0{,}1 \, . \, 0{,}4 \, \frac{2000}{0{,}4} + H = 200 + H \text{ Kgr.}$$

und daraus mit dem betreffenden Werthe von H (hier etwa 100 bis 150 Kgr.) bei gegebener Dampfspannung die erforderliche Grösse der Kolbenfläche. Die Annäherung des Bremsklotzes an das Bremsrad aus einer Entfernung $= e$ Mtr. erfordert einen Kolbenhub

$$= \frac{e}{0{,}4 \, . \, 0{,}1} = 25\, e \text{ Mtr.}$$

und mit Rücksicht auf Abnutzung des Bremsklotzes im Betrage $= \Delta e$ eine Länge des oben offenen Dampfcylinders

$$= 25\,(e + \Delta e), \text{ z. B. } = 0{,}75 \text{ Mtr.}$$

$$\text{für } e = 0{,}02 \text{ Mtr. und } \Delta e = 0{,}01 \text{ Mtr. —}$$

Eine wichtige Anwendung findet die Backenbremse bei **Eisenbahnfahrzeugen**. In Beziehung darauf werde angenommen, der betreffende Eisenbahnzug sei ausser der Tenderbremse mit so vielen Bremsen versehen, dass dadurch der m^{te} Theil aller Wagenaxen gebremst werden kann, und sie seien kräftig genug construirt, um die bezüglichen Räder vollkommen gegen die Fahrzeuge feststellen zu können. Wenn dann ein solcher Zug auf einer längeren im Verhältnisse $1 : n$ geneigten Strecke (1 Mtr. Steigung für n Mtr. Bahnlänge) mit der Geschwindigkeit v (Meter pro Secunde) abwärts fährt, so ist die Frage, eine wie grosse Strecke $= s$ derselbe bis zum Stillstande noch durchläuft von dem Augenblicke an gerechnet, in welchem sämmtliche Wagenbremsen bis zur Feststellung der betreffenden Axen angezogen wurden, vorausgesetzt dass Tender und Locomotive (unter gleichzeitiger Abstellung des Dampfes) durch die Tenderbremse so gehemmt werden, dass der angehängte Zug sich unabhängig von ihnen bewegt. Dabei werde der Zugwiderstand, insoweit er von der durch das Bremsen verursachten Reibung unabhängig ist,

$$= \alpha + \beta v^2 \text{ Kgr. pro 1 Kgr. Zuggewicht}$$

angenommen und der Coefficient der Reibung zwischen Rädern und Schienen $= \mu$ gesetzt.

Ist nun A die Belastung incl. Eigengewicht einer Axe, so ist der Gesammtwiderstand für je m Axen, von denen eine gebremst ist,

$$= \left(\alpha + \beta v^2 - \frac{1}{n}\right) m A + \mu A,$$

folglich die Verzögerung:

$$-\frac{dv}{dt} = \frac{\left(\alpha + \beta v^2 - \frac{1}{n}\right) m A + \mu A}{m A} - g$$

$$= \left(\alpha - \frac{1}{n} + \frac{\mu}{m}\right) g + \beta g v^2 = f\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)$$

mit $f = \left(\alpha - \frac{1}{n} + \frac{\mu}{m}\right) g$ und $k^2 = \frac{1}{\beta}\left(\alpha - \frac{1}{n} + \frac{\mu}{m}\right)$.

Daraus folgt:

$$f\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{2 v\, dv}{v\, dt} = -\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds}$$

$$ds = -\frac{1}{2f} \frac{d(v^2)}{1 + \frac{v^2}{k^2}} = -\frac{k^2}{2f} d\, ln\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)$$

$$s = \frac{k^2}{2f} ln\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2\beta g} ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \frac{1}{n} + \frac{\mu}{m}} v^2\right) \quad \ldots . (4).$$

Mit den durchschnittlich nahe zutreffenden Annahmen:

$\alpha = 0{,}002 \quad \beta = 0{,}000015 \quad \mu = 0{,}15$

findet man z. B. für $v = 15$, $n = 200$, $m = 5$:

$s = 400$ Mtr.

In Wirklichkeit sollen freilich die Bremsen, ausser wenn erhebliche Gefahr im Verzuge ist, nicht bis zum Schleifen der Räder auf den Schienen (verbunden mit nachtheiliger ungleichförmiger Abnutzung der Radreifen) angezogen werden, und wird dann auch der Weg s unter den angenommenen Umständen entsprechend grösser ausfallen. Zu diesem Anziehen der Bremsen dient meistens ein Schraubengetriebe von der Art, wie es im §. 75 unter 1) bezüglich seiner Reibungswiderstände und seines Wirkungsgrades beispielsweise berechnet wurde. Indem aber dabei die Schraube mit der Hand gedreht wird, ist die ausgeübte Kraft, somit der Druck der Bremsklötze gegen die Räder und die Grösse der erzeugten Reibung dem unsicheren Gefühle des Bremsers anheimgegeben; noch grössere Mängel solcher Handbremsen von Eisenbahnfahrzeugen liegen darin, dass von dem Augenblicke, in welchem der Locomotivführer die Nothwendigkeit, den Zug zum Stillstand zu bringen, erkennt, bis zu dem Augenblicke, in welchem die von ihm aufgeforderten Bremser zum Anziehen der Bremsen bereit sind, oft eine zu lange Zeit verfliesst und somit eine zu grosse Strecke vom Zuge noch durchlaufen wird, als dass einem Unfalle vorgebeugt werden könnte, ferner darin, dass die Mannschaft nicht immer ausreichend vorhanden ist,

um alle Bremsen gleichzeitig bedienen zu können. Nach dem Vorgange amerikanischer und englischer Eisenbahnbetriebs-Verwaltungen sind deshalb in neuerer Zeit auch in Deutschland die Bestrebungen dahin gerichtet, solche Bremsvorrichtungen allgemeiner in Anwendung zu bringen, die vom Locomotivführerstande aus gleichzeitig für alle Bremswagen des ganzen Zuges in Thätigkeit gesetzt werden können und zwar durch eine Kraft von bestimmter, nicht von der Schätzung eines Bremsers abhängiger Grösse. Die u. A. dazu dienende, in Deutschland vereinzelt bisher zur Anwendung gekommene Heberlein-Bremse wirkt in der Weise, dass durch Gewichte, welche, von drehbaren Hebeln getragen, vom Führerstande aus vermittels einer nachzulassenden Schnur gleichzeitig an allen Bremswagen des Zuges niedergelassen werden, je zwei auf den zu bremsenden Axen festgekeilte hölzerne Rollen mit anderen, von drehbaren Hebeln getragenen Holzrollen unter bestimmtem Drucke so in Berührung kommen, dass die durch entsprechende Reibung veranlasste Drehung der letzteren die Aufwickelung von Ketten zum Anziehen der Bremsklötze zur Folge hat. Bei den in England und Amerika schon seit längerer Zeit angewendeten Bremsen von Smith, von Westinghouse und von Steel ist es Luft, die statt jener Schnur der Heberlein-Bremse die Uebertragung der bremsenden Kraft vom Führerstande auf die verschiedenen Bremsen des Zuges mit Hülfe einer entsprechenden Rohrleitung vermittelt, und zwar verdünnte Luft bei der Bremse von Smith, comprimirte Luft bei den zwei anderen. Die Luftverdünnung bei jener wird durch einen Dampfstrahl-Aspirator bewirkt, die Compression bei diesen durch eine mit der Locomotive verbundene Druckpumpe. Im letzteren Falle wird die comprimirte Luft beständig vorräthig gehalten in einem Hauptbehälter unter der Locomotive und in Hülfsbehältern unter den einzelnen Bremswagen; indem dabei die Anordnung so getroffen ist, dass die Bremsen bei Druckverminderung in der Rohrleitung durch den Ueberdruck in den Hülfsbehältern in Thätigkeit kommen, tritt letztere u. A. von selbst ein, wenn etwa eine Kuppelung und damit auch die fragliche Rohrleitung zerrissen werden sollte, während unter normalen Umständen ein Entweichen gepresster Luft aus der Rohrleitung und damit die zur Einleitung des Bremsens nöthige Druckverminderung in derselben durch Drehung eines Hahns willkürlich herbeizuführen ist.*

---

* Näheres über die Construction der erwähnten vier sogenannten „continuirlichen Bremsen“ und über vergleichende Versuche, die damit im August 1877 auf einer Strecke der Main-Weser-Bahn zwischen Guntershausen und

§. 90. Bandbremse.

Wenn die hervorzurufende Reibung R von mässiger Grösse ist, pflegt als Bremskörper ein schmiedeisernes, in Folge seiner geringen Dicke (von höchstens etwa 4 Millimeter) hinlänglich biegsames stetiges Band benutzt zu werden, das um ein gusseisernes Bremsrad (längs etwa $^3/_4$ seines Umfanges) herumgelegt ist und durch einen Hebel, an dessen längerem Arme die Kraft K (meistens mit der Hand oder auch mit dem Fusse ausgeübt) angreift, angespannt wird. Ist dann in Beziehung auf die relative Bewegung des Bandes gegen das Bremsrad (entgegengesetzt gerichtet der Drehung des letzteren in dem ruhenden Bande)

S_1 die Spannung des relativ ablaufenden,

S_2 die Spannung des relativ auflaufenden Bandstückes, und ist

α das Verhältniss des umspannten Bogens zum Radius des Bremsrades,

μ der Reibungscoefficient,

e die Basis der natürlichen Logarithmen,

so ist nach §. 83, Gl. (1) bei Abstraction vom Biegungswiderstande des Bandes:

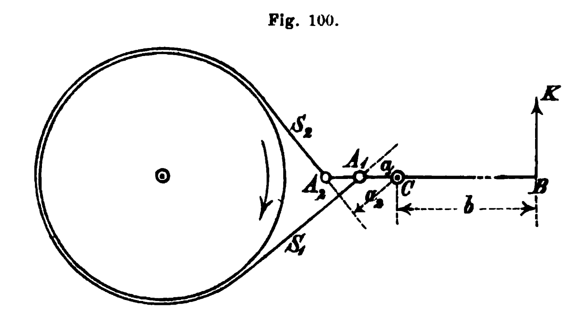
$$S_1 = m S_2 \text{ mit } m = e^{\mu\alpha}$$

und somit die Reibung am Umfange des Rades:

$$R = S_1 - S_2 = (m - 1) S_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Was die Beziehung zwischen S_2 und der Kraft K betrifft, so werde im Allgemeinen angenommen, dass der um die feste Axe C drehbare und bei B am Hebelarme $BC = b$ von der Kraft K angegriffene Bremshebel (Fig. 100) an verschiedenen Stellen A_1 und A_2 gelenkartig mit den beiden Bandenden verbunden ist, bei A_1 mit dem stärker (mit S_1), bei A_2 mit dem schwächer

Fig. 100.



Gensungen angestellt wurden, enthält ein Aufsatz von C. Schneider in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1878, S. 353. Ueber die fraglichen Versuche berichtet auch die Wochenschrift des genannten Vereins für 1878, S. 68.

(mit S_2) gespannten Bandende; a_1 und a_2 seien die Hebelarme der Momente, mit denen diese Kräfte S_1 und S_2 drehend auf den Bremshebel wirken, und zwar algebraisch verstanden in der Weise, dass sie positiv gesetzt werden, wenn, wie in Fig. 100, der Drehungssinn des Momentes $S_1 a_1$ mit demjenigen des Momentes Kb der bremsenden Kraft übereinstimmt, der Drehungssinn des Momentes $S_2 a_2$ aber entgegengesetzt ist. Dem Gleichgewicht der Kräfte am Bremshebel entspricht dann die Gleichung:

$$Kb = S_2 a_2 - S_1 a_1 = S_2(a_2 - m a_1)$$

und folgt daraus mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$K = \frac{a_2 - m a_1}{(m-1) b} R \quad \ldots\ldots (2),$$

wozu noch die Kraft hinzuzufügen ist, die, bei B im Sinne von K angreifend, der Schwere des Hebels Gleichgewicht hält. Ist k die höchstens zugelassene specifische Spannung des Bremsbandes, so ist sein erforderlicher Querschnitt:

$$F = \frac{S_1}{k} = \frac{m S_2}{k} = \frac{m}{m-1} \frac{R}{k} \quad \ldots\ldots (3).$$

Im Durchschnitt kann hier etwa $\mu = 0{,}18$ (Band von Schmiedeisen, Bremsrad von Gusseisen) gesetzt werden, so dass mit $\alpha = 3\frac{\pi}{2}$ sich m nahe $= \frac{7}{3}$ und

$$K = \frac{3 a_2 - 7 a_1}{4 b} R; \quad F = \frac{7}{4} \frac{R}{k} \quad \ldots\ldots (4)$$

ergiebt. Durch passende Wahl von a_1 und a_2 kann K beliebig klein gemacht werden. Ein allzu kleiner Werth von K gestattet indessen keine hinlänglich feine Regulirung von R, und ist insbesondere dann, wenn diese Kraft K unmittelbar mit der Hand ausgeübt werden soll, 10 bis 20 Kgr. eine angemessene Grösse derselben. Meistens ist zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, dass $a_1 = 0$ ist, indem etwa das mit S_1 gespannte Bandende unabhängig vom Bremshebel an einen festen Bolzen angehängt wird. —

Wenn z. B. bei der in §. 78 besprochenen Winde (Fig. 94) auf der Vorgelegewelle V ein Bremsrad von gleichem Durchmesser mit der Windetrommel sich befindet, so ist mit den dort gebrauchten Bezeichnungen und angegebenen Zähnezahlen der betreffenden Räder die Reibung R, die am Umfange des Bremsrades hervorgerufen werden muss, um die Maximallast $Q = 2500$ Kgr. mit gleichförmiger Geschwindigkeit niederlassen zu können:

$$R = Q \frac{q}{r} \frac{r'}{q} = Q \frac{z'}{z} = 2500 \cdot \frac{12}{74} = 400 \text{ Kgr.}$$

sehr nahe, bei Abstraction von der Beihülfe durch die dem Getriebe ohne Bremse eigenthümlichen Reibungswiderstände. Im Falle einer Bandbremse mit $a_1 = 0$ und mit

$$\frac{a_2}{b} = \frac{1}{15},\ k = 5 \text{ Kgr. pro Quadratmillim.}$$

ergiebt sich dann nach Gl. (4):

$$K = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{15} \cdot 400 = 20 \text{ Kgr.},$$

$$F = \frac{7}{4} \cdot \frac{400}{5} = 140 \text{ Quadratmillim.},$$

entsprechend bei 2,5 Millim. Dicke einer Breite des eisernen Bandes = 56 Millimeter. —

Wenn die im vorigen Paragraph beispielsweise berechnete Dampfbremse einer Schachtförderung als Bandbremse ausgeführt werden sollte. so würde sich mit $R = 2000$ Kgr. der Querschnitt des Bandes unter obigen Voraussetzungen

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{2000}{5} = 700 \text{ Quadratmillim.}$$

ergeben und damit die Biegsamkeit desselben schon allzu gering werden. In solchen Fällen und überhaupt, wenn F grösser als etwa 300 Quadratmillim. sein müsste, ist im Allgemeinen ein gegliedertes an Stelle des stetigen Eisenbandes vorzuziehen, nämlich eine Kette, deren Glieder durch Bolzen

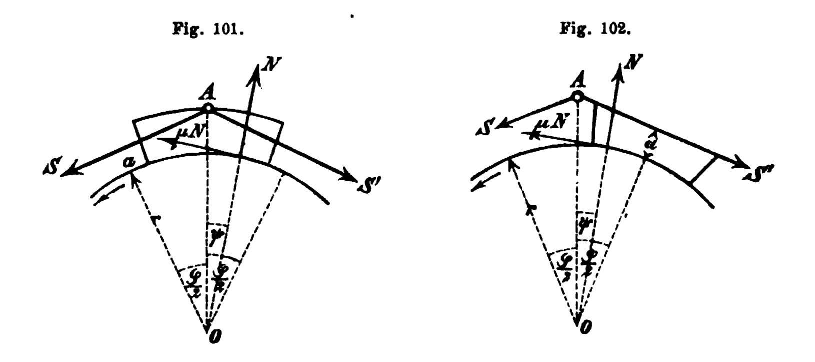


Fig. 101. Fig. 102.

zusammenhängen und zur Ausübung der Reibung mit Holzklötzen ausgerüstet werden. Ist dann auch der Winkel α des umspannten Bogens einer solchen Gliederbremse meistens nur $= \pi$, so ist doch wegen des grösseren Reibungscoefficienten μ (etwa $= 0{,}4$) das Verhältniss $m = \frac{S_1}{S_2}$

und somit auch das mit $(m - 1)$ proportional wachsende Verhältniss $\frac{R}{S_2}$ noch grösser, als im vorigen Falle. Mögen dabei die Holzklötze nach Fig. 101 mit den Bolzen oder nach Fig. 102 mit den Gliedern der Kette verbunden sein, so ergiebt sich im einen wie im anderen Falle die Beziehung zwischen S_1, S_2 und R durch folgende Erwägung. Es seien

S und S' $(S' > S)$ die Spannungen zweier auf einander folgender Kettenglieder,

φ der spitze Winkel, unter dem sie resp. die Mittellinien der betreffenden Kettenglieder gegen einander geneigt sind,

$\alpha = n\varphi$, also n die Anzahl der Ecken des von den Mittellinien der Kettenglieder auf dem Bremsrade gebildeten Polygons,

$r + a$ der Radius des diesem Polygon einbeschriebenen Kreises,

r der Radius des Bremsrades,

N der resultirende radiale Druck des letzteren auf einen Bremsklotz,

μN die dazu senkrechte betreffende Reibung,

ψ der Winkel, unter welchem die Richtungslinie von N gegen die Halbirungslinie OA des Winkels SAS' (Fig. 101 und 102) im Sinne gegen S' hin geneigt ist.

Dem Gleichgewicht der Kräfte S, S', N und μN entsprechen die Gleichungen:

$$(S' - S)(r + a) = \mu N r \quad \ldots \quad (5)$$

$$(S' - S)\cos\frac{\varphi}{2} = N(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$(S' + S)\sin\frac{\varphi}{2} = N(\cos\psi + \mu\sin\psi),$$

von denen die zwei letzten mit $\mu = tg\,\varrho$ auch geschrieben werden können:

$$(S' - S)\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varrho = N\sin(\varrho - \psi) \quad \ldots \quad (6)$$

$$(S' + S)\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varrho = N\cos(\varrho - \psi) \quad \ldots \quad (7).$$

Diese 3 Gleichungen bestimmen ψ, S' und N, wenn die übrigen Grössen gegeben sind. Für ψ erhält man aus (5) und (6) die Bestimmungsgleichung:

$$\sin(\varrho - \psi) = \frac{r}{r + a}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varrho \quad \ldots \quad (8);$$

dann folgt aus (6) und (7):

$$\frac{S' - S}{S' + S} = tg\frac{\varphi}{2}\,tg(\varrho - \psi)$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{1 + tg\frac{\varphi}{2}\,tg(\varrho - \psi)}{1 - tg\frac{\varphi}{2}\,tg(\varrho - \psi)} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \varrho + \psi\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \varrho - \psi\right)}$$

$$m = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{S'}{S}\right)^n = \left(\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \varrho + \psi\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \varrho - \psi\right)}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Mit Rücksicht auf (5) und (9) ist endlich die ganze am Umfange des Bremsrades erzeugte Reibung:

$$R = \Sigma(\mu N) = \frac{r+a}{r}\Sigma(S' - S)$$

$$= \frac{r+a}{r}(S_1 - S_2) = \frac{r+a}{r}(m-1)\,S_2 \quad \ldots\ldots (10).$$

Nach Gl. (8) ist ψ um so kleiner, nämlich $\varrho - \psi$ um so weniger $< \varrho$, je kleiner a im Vergleich mit r und je kleiner φ ist. Setzt man $\psi = 0$, so wird

$$m = \left(\frac{S'}{S}\right)^n = \left(\frac{1 + \mu\,tg\frac{\varphi}{2}}{1 - \mu\,tg\frac{\varphi}{2}}\right)^n$$

oder auch mit weiterer Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$m = \left(1 + 2\mu\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Je grösser endlich n und je kleiner also $\varphi = \frac{\alpha}{n}$ ist, desto mehr nähert sich dieser letzte Ausdruck von m, wie es sein muss, dem für ein stetiges Band genau gültigen Grenzwerthe:

$$\lim(1 + \mu\varphi)^n = \lim\left(1 + \frac{\mu\alpha}{n}\right)^n = e^{\mu\alpha}.$$

Ist z. B. $a = 0{,}05\,r$, $\alpha = 180^0$, $\mu = 0{,}4$ ($\varrho = 21^0\,48'$), so findet man

für $n =$	3	4	5	6	
$\varphi =$	60^0	45^0	36^0	30^0	
$\psi =$	$3^0\,58'$	$2^0\,44'$	$2^0\,9'$	$1^0\,49'$	nach (8),
$m =$	3,088	3,168	3,207	3,232	nach (9),
	3,124	3,142	3,175	3,207	nach (11).

Der Fehler von Gl. (11) ist also unerheblich; dagegen ist

$$e^{\mu\alpha} = e^{0{,}4\,\pi} = 3{,}513$$

wesentlich $> m$, sofern nicht n sehr gross ist.

§. 91. Kegelbremse.

Die im vorigen Paragraph besprochene Bandbremse ist nur in solchen Fällen vortheilhaft zu gebrauchen, in denen das Bedürfniss des Bremsens einer gewissen Welle nur bei einem bestimmten Drehungssinne derselben vorhanden ist; denn anderen Falles müsste (Fig. 100) $a_1 = -a_2$ gemacht werden, wodurch nach Gl. (2) im vorigen Paragraph eine bei Vertauschung von S_1 mit S_2, also von a_1 mit a_2 zwar gleich grosse, aber wesentlich grössere Kraft K zur Erzeugung der Reibung R nöthig würde. Auch bei der Backenbremse ist der Drehungssinn der zu bremsenden Welle nur näherungsweise und um so mehr gleichgültig, je kleiner die Dimension a (Fig. 99 und §. 89, Gl. 1) ist. Ganz unabhängig von diesem Drehungssinne ist dagegen die Wirksamkeit einer Kegelbremse. Sind bei einer solchen

a und b die Radien der Begrenzungskreise der Kegelfläche, in welcher sich der Kegel und der entsprechende Hohlkegel berühren, von denen nur einer um die zu bremsende Welle drehbar und ebenso nur einer längs ihr verschieblich ist, ist ferner

α der Winkel zwischen Seitenlinie und Axe dieser Kegelfläche,

P der axiale Druck, womit der verschiebliche gegen den anderen Kegel angedrückt wird, so kann das Reibungsmoment M wie bei einem kegelförmigen Spurzapfen berechnet, also, jenachdem derselbe als neu oder eingelaufen betrachtet wird, nach §. 70, Gl. (2) resp. Gl. (12) gesetzt werden:

$$M = \frac{2}{3}\mu P \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\frac{1}{\sin\alpha} \text{ resp. } \frac{1}{2}\mu P \frac{a+b}{\sin\alpha}.$$

Indem das Verhältniss beider Werthe

$$= 1 : \frac{3}{4}\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$$

sich um so mehr der Grenze 1 nähert, je weniger a und b verschieden sind, hier aber der Unterschied dieser zwei Radien immer sehr klein ist, so kann ohne wesentlichen Fehler hier immer der einfachere Ausdruck zu Grunde gelegt, also

$$M = \frac{1}{2}\mu P \frac{a+b}{\sin\alpha}$$

gesetzt werden, so dass sich die auf den mittleren Radius $r = \frac{a+b}{2}$ reducirte Reibung

$$R = \frac{\mu P}{\sin\alpha} \text{ und daraus } P = \frac{\sin\alpha}{\mu} R \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ergiebt. Die Beziehung zwischen P und der unmittelbar ausgeübten bremsenden Kraft ist wieder in jedem einzelnen Falle je nach der Art und den Dimensionsverhältnissen des zur Verschiebung des einen Kegels dienenden Mechanismus zu beurtheilen.

Um es zu vermeiden, dass die Welle durch die axiale Kraft P verschoben oder gegen ihre Lager gedrängt wird, kann der als Bremsrad dienende, längs der Welle unverschiebliche Kegel verdoppelt, nämlich aus zwei gleichen abgestumpften Kegeln so zusammengesetzt werden, dass dieselben als Hohlkegel mit ihren kleineren, als Vollkegel mit ihren grösseren Endflächen zusammenstossen, während im ersten Falle zwei entsprechende Vollkegel, im zweiten zwei Hohlkegel von entgegengesetzten Seiten her je mit der axialen Kraft $\frac{1}{2}P$ in den doppelten Hohlkegel resp. auf den doppelten Vollkegel geschoben werden, um die Reibung R (je $\frac{1}{2}R$ im mittleren Umfange jeder einzelnen Kegelfläche) zu bewirken.

Gegen die obige Gleichung (1) als Ausdruck der Beziehung zwischen den Kräften P und R liesse sich einwenden (und ist eingewendet worden), dass ausser der Reibung im Sinne des Umfanges auch eine solche in der Richtung der Seiten der kegelförmigen Reibungsfläche stattfinde. Indessen würde dann weder die eine noch die andere Reibung für sich, sondern nur ihre Resultante in jedem Flächenelemente eine vollständig entwickelte, d. h. $= \mu$ mal dem Normaldrucke sein können, so dass, wenn der ganze Normaldruck Q im mittleren Kreise mit dem Radius $r = \frac{a+b}{2}$ concentrirt gedacht wird, die Reibung

im Sinne des Umfanges: $R = \mu_1 Q$,

im Sinne der Kegelseiten: $S = \mu_2 Q$

zu setzen wäre, unter μ_1 und μ_2 Coefficienten verstanden, die $< \mu$ sind gemäss der Gleichung:

$$\sqrt{R^2 + S^2} = \mu Q, \text{ also } \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} = \mu.$$

Dem Gleichgewicht der Kräfte an dem verschieblichen Kegel entspricht dann die Gleichung:

$$P = Q \sin\alpha + S \cos\alpha = Q(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha) = \frac{\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha}{\mu_1} R \quad . (2).$$

Ist auch dieser Auffassung ihre Berechtigung nicht abzusprechen, so ist es doch unrichtig, dabei (wie geschehen ist) $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ zu setzen. Indessen auch abgesehen hiervon wird die Reibung μQ, die der resultirenden relativen Bewegung stets gerade entgegengesetzt gerichtet ist, nur im

ersten Augenblicke des Bremsens bei Beginn der Berührung beider Kegel in die Componenten $R = \mu_1 Q$ und $S = \mu_2 Q$ zerlegbar sein entsprechend der relativen Schraubenbewegung, womit beide Kegel zusammentreffen, indem das Verhältniss $R : S = \mu_1 : \mu_2$ durch das Steigungsverhältniss dieser relativen Schraubenbewegung, nämlich durch das Verhältniss der relativen Peripheriegeschwindigkeit des mittleren Kreises und der relativen Schiebungsgeschwindigkeit im Sinne der Axe bedingt wird. Sobald aber der verschiebliche Kegel nicht mehr axial bewegt ist, wird $\mu_2 = 0$, also $\mu_1 = \mu$ und somit Gl. (2) übereinstimmend mit Gl. (1).

Soll die Bremse durch eine im entgegengesetzten Sinne von P ausgeübte axiale Kraft P_1 wieder gelöst werden, so ist in der obigen Gleichgewichtsbedingung:

$$P = Q \sin \alpha + S \cos \alpha$$

P durch $-P_1$ und somit S durch $-S = -\mu_2 Q$ zu ersetzen, entsprechend dem entgegengesetzten Sinne auch dieser Kraft S. Die Lösung der Bremse erfordert also die Kraft:

$$P_1 = Q(\mu_2 \cos \alpha - \sin \alpha) \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

die beliebig klein, selbst Null und negativ sein darf, so lange die Kegel in relativ drehender Bewegung begriffen sind, indem dann die Reibung $S = \mu_2 Q$ in dem hier in Rede stehenden Sinne nur in beliebig kleiner Grösse entwickelt zu sein braucht, um durch relative Schraubenbewegung entgegen der resultirenden Reibung $= \sqrt{R^2 + S^2}$ das Lösen der Bremse zu bewirken. Indessen muss letzteres mit genügender Leichtigkeit auch dann geschehen können, wenn durch Ausübung des axialen Druckes P auf den verschieblichen Kegel bis zum Stillstand gebremst wurde, so dass dann die Lösung nicht durch relative Schraubenbewegung geschehen kann, sondern durch relative Axialverschiebung geschehen muss, entsprechend $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \mu$. Die dazu nöthige Kraft ist nach Gl. (3):

$$P_1 = Q(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Soll sie nicht grösser sein, als die zum Bremsen ausgeübte Kraft $P = Q \sin \alpha$, so muss

$$\mu - tg\, \alpha \overline{<} tg\, \alpha, \text{ also } tg\, \alpha \overline{>} \frac{\mu}{2}$$

sein, z. B. für $\mu = 0{,}18 : tg\, \alpha \overline{>} 0{,}09$ oder $\alpha \overline{>} 5^0\, 9'$.

Wenn z. B. bei der in §. 78 besprochenen Winde (Fig. 94) auf der Vorgelegewelle V statt der im vorigen Paragraph vorausgesetzten Bandbremse eine Kegelbremse angebracht wäre, so würde, wenn der mittlere Radius ihrer Reibungsfläche $\frac{2}{3}$ so gross angenommen wird wie der Radius

des Bremsrades im vorigen Paragraph, die zum Bremsen nöthige Reibung R im umgekehrten Verhältnisse grösser sein, als dort, also $= \frac{3}{2} \cdot 400 = 600$ Kgr. Mit $\mu = 0,18$ und $tg\,\alpha = 0,1$ wäre dann auch $\sin\alpha$ ohne in Betracht kommenden Fehler $= 0,1$ zu setzen, also

$$P = \frac{0,1}{0,18} 600 = 333 \text{ Kgr. nach Gl. (1).}$$

Bei der Verwendung dieser Bremse als Schliessungsbremse (§. 88) wäre der als Bremsrad dienende Kegel K' auf der Welle V zu befestigen, der als Bremskörper dienende andere Kegel K folglich cylindrisch mit V zu paaren entsprechend einer relativen axialen Verschiebbarkeit und relativen Drehbarkeit beider Elemente; die axiale Verschiebung des Kegels K durch die Kraft P hätte so zu geschehen, dass seine absolute Drehung um die geometrische Axe von V (Drehung gegen das Lagergestell) durch den betreffenden Verschiebungsmechanismus verhindert wird. Es könnte aber auch die Bremse als Lösungsbremse angeordnet werden, indem K' in fester Verbindung mit dem Rade B' (Fig. 94) durch ein Drehkörperpaar, dagegen K durch ein Prismenpaar (Feder und Nuth) mit V gepaart und ausserdem diese Welle beim Niederlassen der Last Q an rückläufiger Drehung durch ein Gesperre verhindert wird. Indem dann K gegen K', z. B. in Folge dauernder Belastung eines Bremshebels durch ein Gewicht G, einen axialen Druck $> P$ ausübt, wird dadurch V mit K, sowie K mit dem Gliede $K'B'$ zu einem einzigen Körper gekuppelt, so dass die Drehung von V in dem durch das Gesperre zugelassenen Sinne die Aufwindung von Q ermöglicht. Hört das die Welle V drehende Kraftmoment auf zu wirken, so bleibt die Last Q in der erreichten Höhe schweben, indem das Gesperre die rückläufige Drehung von V, die Reibung zwischen K und K' die rückläufige Drehung des Gliedes $K'B'$ ohne V verhindert. Das Niederlassen der Last erfordert dann den Angriff des Bremshebels in entgegengesetztem Sinne seines Belastungsgewichtes G, um davon nur einen solchen Theil wirksam bleiben zu lassen, dass der axiale Druck von K gegen K' auf P reducirt wird. Uebrigens ist leicht zu erkennen, dass der Vortheil grösserer Sicherheit einer solchen Lösungsbremse (gegen beschleunigtes Niederfallen der Last bei unzureichender Grösse der bremsenden Kraft) von dem Nachtheile begleitet wird, dass die Erhaltung der Kuppelung beim Aufwinden der Last nicht ohne beträchtlichen Arbeitsverlust durch Reibung zu ermöglichen ist, indem der axiale Druck, der dazu auf den mit V rotirenden Kegel K ausgeübt werden muss, durch einen Mechanismus vermittelt wird, der an dieser Drehung selbst nicht Theil nimmt; ohne Verdoppelung des Bremskegelpaares

würde dazu noch eine weitere Reibung wegen des axialen Druckes der ganzen Welle gegen ihre Lager hinzukommen, die bei der Schliessungsbremse wenigstens nur durch das Niederlassen der Last, also dann verursacht würde, wenn sie weniger schädlich, in Bezug auf die bremsende Wirkung sogar förderlich ist.

II. Schwungräder.

§. 92. Allgemeine Untersuchung der Beziehung zwischen der auf einen gewissen Punkt der Schwungradwelle reducirten Masse einer Maschine und dem Ungleichförmigkeitsgrade der Bewegung dieses Punktes.

Der in §. 87 mit A bezeichnete Punkt, auf welchen die ganze Masse einer Maschine reducirt wurde, befinde sich in der Entfernung r von der Axe der Schwungradwelle; der constante Theil $= M$ dieser reducirten Masse rührt dann hauptsächlich her von den Maschinentheilen, die um feste Axen so rotiren, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten zu derjenigen der Schwungradwelle constante Verhältnisse haben, insbesondere also vom Schwungrade selbst, wogegen der veränderliche Theil $= m$ jener reducirten Masse von solchen Maschinentheilen herzurühren pflegt, die, wie z. B. die Kolbenmasse einer Dampfmaschine, hin und hergehende oder auch, wie z. B. die Koppel eines Schubkurbelmechanismus, weniger einfache Bewegungen haben, die dann in der Regel als Drehungen mit veränderlichen Winkelgeschwindigkeiten um Axen von veränderlichen Lagen aufzufassen sind. Die Bewegung der Maschine sei gleichförmig periodisch (die Maschine befinde sich in periodischem Beharrungszustande), d. h. die Geschwindigkeit v des Reductionspunktes erfahre in gewissen gleichen auf einander folgenden Zeiten (Perioden) stets dieselben Aenderungen. Ist dann v' das Maximum, v'' das Minimum, c der Mittelwerth von v in jeder Periode, so heisst

$$\delta = \frac{v' - v''}{c}$$

der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung des Reductionspunktes resp. der Schwungradwelle oder überhaupt aller mit proportionalen Winkelgeschwindigkeiten rotirenden Maschinentheile, deren reducirte Masse M ist, und handelt es sich um die Beziehung zwischen M und δ, während die mittlere Geschwindigkeit c des Reductionspunktes eine gegebene Constante ist und m sowie die vom Anfange der Periode an gerechnete algebraische

Summe $= A$ der Arbeiten aller auf die Maschine wirkenden Kräfte gegebene Functionen des Winkels φ sind, um den sich die Schwungradwelle seit dem Beginne der betreffenden Periode gedreht hat. Diese Beziehung ist bedingt durch die Gleichung der lebendigen Kraft, also, unter m_0 und v_0 die Werthe von m und v für den Anfang der Periode, d. h. für $\varphi = 0$ verstanden, durch die Gleichung:

$$(M + m)\frac{v^2}{2} - (M + m_0)\frac{v_0^2}{2} = A \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ihrzufolge erfordert die vorausgesetzte Periodicität der Bewegung vor Allem, dass auch m und A periodische Functionen von φ und ihre Perioden derjenigen von v gleich oder aliquote Theile derselben sind, so dass jedenfalls

$$m = m_0 \text{ und } A = 0 \text{ ist für } \varphi = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn α (gewöhnlich $= 2\pi$) den Drehungswinkel der Schwungradwelle in jeder Periode bedeutet. Aus Gl. (1) folgt:

$$v^2 = \frac{2A + (M + m_0)v_0^2}{M + m} = F(M, v_0, \varphi) \ldots\ldots\ldots (3)$$

$=$ einer Function von φ, die ausser M und gegebenen Constanten die Unbekannte v_0 enthält. Um letztere zu eliminiren, kann man bemerken, dass die Winkelgeschwindigkeit der Schwungradwelle

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$$

und somit die Dauer einer Periode:

$$\frac{r\alpha}{c} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} dt = r\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{v}$$

ist, woraus mit Rücksicht auf Gl. (3) folgt:

$$\frac{\alpha}{c} = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{v} = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{F(M, v_0, \varphi)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Durch Elimination von v_0 zwischen dieser Gleichung und Gl. (3) ergebe sich:

$$v = f(M, \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$=$ einer Function von φ, die ausser M nur gegebene Constante enthält. Die relativen Maxima und Minima von v in irgend einer Periode entsprechen dann den zwischen 0 und α liegenden Wurzelwerthen der Gleichung:

$$\frac{df(M, \varphi)}{d\varphi} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

und wenn insbesondere φ' der dem absoluten Maximum v' und φ'' der dem absoluten Minimem v'' entsprechende Werth von φ ist, so folgt aus

$$v' = f(M, \varphi') \text{ und } v'' = f(M, \varphi'')$$

der Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = \frac{v' - v''}{c} = \frac{f(M, \varphi') - f(M, \varphi'')}{c}$ . . (7).

Ist δ gegeben, so kann hieraus M und somit durch Subtraction der reducirten Massen der übrigen rotirenden Maschinentheile die erforderliche Grösse der reducirten Masse des Schwungrades bestimmt werden, der alsdann die Dimensionen desselben anzupassen sind. —

Die vorstehend angedeutete Rechnung würde ohne wesentliche Vereinfachung durch Vernachlässigung untergeordneter Umstände und durch nur näherungsweise zutreffende Annahmen meistens nicht durchführbar sein, wenigstens nicht in hinlänglich einfacher, praktisch brauchbarer Form. Indem es aber nie darauf ankommt, einen gewissen Ungleichförmigkeitsgrad δ genau zu realisiren, kann man sich stets darauf beschränken, in M und m nur die hauptsächlichsten bewegten Massen der Maschine und auch diese nur näherungsweise zu berücksichtigen. Auch kann von den Bewegungswiderständen hier meistens ganz abgesehen, unter A folglich die Summe der Arbeiten der treibenden Kräfte und der Nutzwiderstände verstanden werden. Handelt es sich dann um das Schwungrad einer Kraftmaschine von gegebener Arbeit A_1 der treibenden Kräfte in jeder Periode oder um das Schwungrad einer Arbeitsmaschine von gegebener Arbeit A_2 der Nutzwiderstände in jeder Periode, so ist im ersten Falle A_2, im zweiten A_1 so in Rechnung zu bringen, dass die Bedingung $A_1 = A_2$ des periodischen Beharrungszustandes erfüllt wird, indem erst nachträglich und unabhängig von der Schwungradbestimmung darauf Rücksicht zu nehmen ist, dass die Bewegungswiderstände thatsächlich im ersten Falle nur eine kleinere Arbeit A_2 der Nutzwiderstände zulassen, im zweiten dagegen eine grössere Arbeit A_1 der treibenden Kräfte erfordern.

Eine weitere Vereinfachung gestattet der Umstand, dass δ ein kleiner Bruch und dass überhaupt das Verhältniss irgend zweier Werthe von v höchstens um einen kleinen Bruch von einerlei Grössenordnung mit δ von der Einheit verschieden, während es bei dieser Rechnung immer zulässig ist, kleine Grössen zweiter Ordnung, die also mit δ^2 vergleichbar sind, zu vernachlässigen. Endlich ist m meistens so klein im Vergleich mit M, dass das Verhältniss $\frac{m}{M}$ höchstens von einerlei Grössenordnung mit δ oder gar $=$ Null zu setzen ist. In diesem letzten Falle ($m = m_0 = 0$) folgt aus Gl. (3):

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 + \frac{2A}{Mv_0^2} \quad \text{. . . . . (8),}$$

also auch mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung:

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{A}{M v_0^2} = 1 + \frac{A}{M c^2}$$

und, wenn $\frac{v_0}{c} = 1 + \gamma$ gesetzt wird, wo γ wieder ein kleiner Bruch ist:

$$\frac{v}{c} = (1+\gamma)\left(1 + \frac{A}{M c^2}\right) = 1 + \gamma + \frac{A}{M c^2}.$$

Das Maximum und Minimum (v' resp. v'') von v entspricht dem Maximum und Minimum (A' resp. A'') von A, und folgt also

$$\frac{v' - v''}{c} = \delta = \frac{A' - A''}{M c^2}$$

$$M = \frac{A' - A''}{\delta c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Die Kenntniss von v_0 war hierbei unnöthig, die unbequeme Gleichung (4) also entbehrlich.

Dieselbe Gleichung (9) entspricht im vorliegenden Falle $m = 0$ der Annahme:

$$v' + v'' = 2\,c.$$

Denn indem hieraus und aus $v' - v'' = \delta c$

$$\frac{v'^2 - v''^2}{2} = \delta c^2$$

folgt, ergiebt sich aus Gl. (8) unmittelbar:

$$\frac{v'^2 - v''^2}{2} = \frac{A' - A''}{M} = \delta c^2.$$

Ist m zwar nicht klein genug, um gegen M ganz ausser Acht bleiben zu dürfen, aber doch so klein, dass $\frac{m}{M}$ ein höchstens mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist, so folgt aus Gl. (3) mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\frac{2A}{M v_0^2} + 1 + \frac{m_0}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = 1 + \frac{2A}{M v_0^2} - \frac{m - m_0}{M}$$

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{A}{M c^2} - \frac{1}{2}\,\frac{m - m_0}{M}$$

$$\frac{v}{c} = 1 + \gamma + \frac{A}{M c^2} - \frac{1}{2}\,\frac{m - m_0}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

wenn wieder $\frac{v_0}{c} = 1 + \gamma$ gesetzt wird. Hiernach ist v am grössten und am kleinsten zugleich mit

$$A - \frac{mc^2}{2},$$

also für Wurzelwerthe der Gleichung:

$$\frac{dA}{d\varphi} - \frac{c^2}{2} \frac{dm}{d\varphi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

die insbesondere für das absolute Maximum und das absolute Minimum wieder mit φ' und φ'' bezeichnet seien. Sind dann

A' und m' die Werthe von A und m für $\varphi = \varphi'$,
A'' und m'' die Werthe von A und m für $\varphi = \varphi''$,

so folgt aus Gl. (10):

$$\frac{v' - v''}{c} = \delta = \frac{A' - A''}{Mc^2} - \frac{1}{2} \frac{m' - m''}{M}$$

$$M = \frac{1}{\delta}\left(\frac{A' - A''}{c^2} - \frac{m' - m''}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Kenntniss von v_0 war wieder unnöthig, weil γ ebenso wie m_0 aus dem Ausdrucke der Differenz irgend zweier Werthe von v verschwindet, falls letztere durch die auf der Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung beruhende Gleichung (10), δ und $\frac{m}{M}$ als kleine Grössen erster Ordnung vorausgesetzt, bestimmt werden.

Uebrigens ist zu bemerken, dass die durch Gleichung (11) bestimmten Winkel φ' und φ'' nicht nur mit kleinen Fehlern zweiter Ordnung, sondern schon mit solchen erster Ordnung behaftet sein können. Denn mit den abgekürzten Bezeichnungen:

$$\frac{2A}{Mc^2} = x, \quad \frac{m}{M} = y, \quad \frac{m_0}{M} = y_0$$

und mit $v_0 = (1 + \gamma)c$ ist streng genommen:

$$\frac{v}{c} = (1 + \gamma) \sqrt{\frac{1 + \frac{x}{(1+\gamma)^2} + y_0}{1 + y}}$$

und es entsprechen also das Maximum und Minimum von v der Gleichung:

$$(1 + y)\frac{dx}{(1+\gamma)^2} - \left(1 + \frac{x}{(1+\gamma)^2} + y_0\right) dy = 0,$$

woraus, indem γ, x, y, y_0 kleine Grössen erster Ordnung sind, mit Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung folgt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1+\gamma)^2(1+y_0)+x}{1+y} = 1 + 2\gamma + x + y_0 - y.$$

Wenn nun auch aus der Gleichung für $\frac{v}{c}$ mit einem nur kleinen Fehler zweiter Ordnung gefolgert werden kann:

$$\frac{v}{c} = (1+\gamma)\left(1 + \frac{x+y_0-y}{2}\right) = 1 + \gamma + \frac{x+y_0-y}{2},$$

so ist doch die daraus weiter als den eminenten Werthen von v entsprechend gefolgerte Gleichung:

$$dx - dy = 0 \text{ oder } \frac{dx}{dy} = 1$$

mit obiger Gleichung für $\frac{dx}{dy}$ erst bei Vernachlässigung kleiner Grössen erster Ordnung identisch. Dieser der Gleichung (11) als Bestimmungsgleichung von φ' und φ'' anhaftende Mangel ist indessen hier unschädlich, weil die Function v von φ sich um so langsamer mit φ ändert, je mehr sie sich einem Maximum oder Minimum nähert, so dass ein bei Bestimmung von φ' oder φ'' begangener kleiner Fehler nur einen solchen Fehler von v' resp. v'' zur Folge hat, der eine kleine Grösse höherer Ordnung ist, und weil es hier nicht sowohl darauf ankommt, die dem Maximum und Minimum von v entsprechenden Configurationen der Maschine, als vielmehr nur diese eminenten Werthe von v selbst mit hinlänglicher Annäherung zu finden.

Aus demselben Grunde kann sogar Gl. (11) durch die auch der Gleichung (9) zu Grunde liegende einfachere Bestimmungsgleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0$$

für φ' und φ'' ersetzt werden, wenn $\frac{mc^2}{2}$ klein im Vergleich mit A, wenn also $\frac{mc^2}{2A}$ oder auch $\frac{mc^2}{A'-A''}$ ein mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist, was aber, da

$$\frac{Mc^2}{A'-A''} = \frac{1}{\delta} \text{ nach Gl. (9)}$$

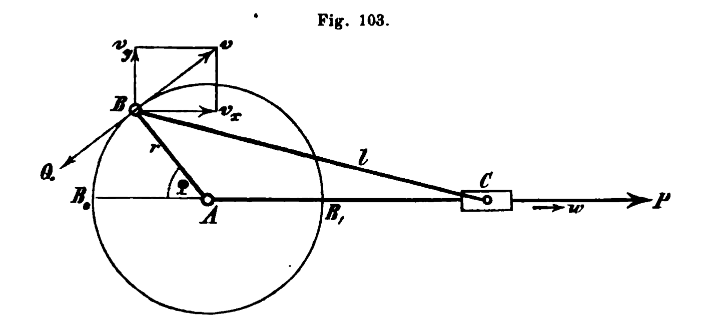
und wenigstens von derselben Grössenordnung, wie $\frac{1}{\delta}$, nach Gl. (12) ist, im Allgemeinen vorausgesetzt, dass $\frac{m}{M}$ ein selbst im Vergleich mit δ kleiner, nämlich ein Bruch von einerlei Grössenordnung mit δ^2 sei.

§. 93. Anwendung auf Schubkurbelmechanismen.

Von besonderem Interesse ist die Anwendung des im vorigen Paragraph erklärten Verfahrens auf den Schubkurbelmechanismus (§. 39 und §. 40), dessen Kurbelwelle zugleich Schwungradwelle ist, z. B. mit Rücksicht auf die (später im dritten Bande dieses Werkes weiter zu besprechende) Schwungradbestimmung für Dampfmaschinen, wobei dieser Mechanismus als Schubkurbelgetriebe, d. h. so zur Verwendung kommt, dass die Bewegung vom Schieber ausgeht, wie auch im Folgenden vorausgesetzt werden soll.

Ist r die Kurbellänge AB (Fig. 103), l die Koppellänge BC und $\lambda = \frac{r}{l}$, ferner φ der Drehungswinkel der Kurbel seit dem letzten Durchgange des Punktes B durch einen der beiden Todpunkte B_0 und B_1, x der

Fig. 103.



entsprechende Schieberweg, v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens (des Punktes B), w die Geschwindigkeit des Schiebers (des Punktes C), so ist nach §. 40 bei Vernachlässigung der Glieder mit λ^3 und höheren Potenzen von λ:

$$x = r\left(1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$w = v\sin\varphi\,(1 \mp \lambda\cos\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und gelten dabei vor den Gliedern mit λ die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem die zuletzt vom Getriebe passirte Todlage eine obere oder untere war, der Winkel φ folglich von der Kurbelrichtung AB_0 oder AB_1 an gerechnet wird.

Die treibende Kraft eines solchen Schubkurbelgetriebes, angreifend im Punkte C im Sinne AC oder CA, jenachdem der Kurbelzapfen B sich vom oberen Todpunkte B_0 zum unteren B_1 oder umgekehrt bewegt, sei be-

zeichnet mit P; wenn sie nicht constant ist, sei sie für die Bewegung des Schiebers im einen Sinne nach demselben Gesetze veränderlich wie für den umgekehrten Bewegungssinn. Q sei der auf den Kurbelzapfen reducirte gesammte Widerstand, d. h. die in B angreifende und entgegen der Geschwindigkeit v dieses Punktes gerichtete Kraft, deren Arbeit in jedem Zeitelement der Arbeitssumme aller Widerstände gleich ist; im Folgenden wird Q stets als Constante angenommen. Die algebraische Summe der von irgend einem Augenblicke an geleisteten Arbeiten der Kräfte P und Q ist unter diesen Umständen eine periodische Function, deren Periode einer ganzen Kurbelumdrehung entspricht, weil, wenn auch die Aenderungen von P schon nach je einer halben Umdrehung der Kurbel in gleicher Weise wiederkehren, doch das Verhältniss entsprechender Wege der Angriffspunkte C und B der Kräfte P und Q nach Gl. (1) erst nach je einer ganzen Umdrehung immer denselben Werth wieder annimmt, sofern nicht $\lambda = 0$ ist, wie im Falle der Kreuzschieberkurbel (§. 42, Fig. 56).

Die auf den Punkt B reducirte Masse $= M + m$ des Getriebes rührt mit ihrem veränderlichen Bestandtheile m her von den Massen des Schiebers $= M_1$ (z. B. des Kolbens, der Kolbenstange und des Kreuzkopfes im Falle einer Dampfmaschine) und der Koppel $= M_2$. Indem die Reduction dieser Massen auf den Punkt B durch das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v}$ bedingt wird, dessen Periode nach Gl. (2) ebenso wie die der Arbeitssumme A der Kräfte eine ganze Umdrehung der Kurbel umfasst, sofern nicht $\lambda = 0$ ist (Kreuzschieberkurbel), so gilt nun dasselbe auch von der Periode der Kurbeldrehung, also der Geschwindigkeit v. Sie werde von der oberen Todlage aus gerechnet unbeschadet dessen, dass der Winkel φ in oben erklärter Weise für jede halbe Periode besonders von 0 bis 180° gerechnet wird.

Die Koppelmasse M_2 kann dadurch genügend berücksichtigt werden, dass sie ganz in die Schiebermasse M_1 und allenfalls ausserdem noch mit einem gewissen Theile in die auf den Kurbelzapfen reducirte rotirende Masse M eingerechnet wird. Sind nämlich v_x und v_y (Fig. 103) die Componenten der Geschwindigkeit v beziehungsweise im Sinne von w und senkrecht dazu, wird ferner die Koppel als prismatische Stange betrachtet und mit $\mu = \frac{1}{l} M_2$ ihre Masse pro Längeneinheit, mit z die Entfernung ihres Massenelementes μdz vom Punkte C bezeichnet, so ist ihre doppelte lebendige Kraft

$$=\int_0^l \mu\, dz \left\{\left[w + \frac{z}{l}(v_x - w)\right]^2 + \frac{z^2}{l^2} v_y^2\right\}$$

$$=\mu \int_0^l dz \left[w^2 + \frac{z^2}{l^2} v_y^2 + 2 w \frac{z}{l}(v_x - w) + \frac{z^2}{l^2}(v_x - w)^2\right]$$

$$= M_2 \left[w^2 + \frac{1}{3} v_y^2 + \frac{2 w + v_x}{3}(v_x - w)\right].$$

Nun ist $\qquad v_x = v \sin\varphi, \quad v_y = \pm v \cos\varphi,$

$$w = v_x (1 \mp \lambda \cos\varphi) \text{ nach Gl. (2), also}$$

$$\frac{2 w + v_x}{3}(v_x - w) = v_x^2 \frac{2(1 \pm \lambda \cos\varphi) + 1}{3}(\pm \lambda \cos\varphi)$$

$$= \pm v_x^2 \left(1 + \frac{2}{3} \lambda \cos\varphi\right) \lambda \cos\varphi = \pm v_x^2 \lambda \cos\varphi$$

bei Vernachlässigung des Gliedes mit λ^2. Mithin ist die zweifache lebendige Kraft der Koppel

$$= M_2 \left[w^2 + \frac{v^2}{3}(\cos^2\varphi \pm 3 \lambda \sin^2\varphi \cos\varphi)\right]$$

im Mittel $= M_2 \left(w^2 + \frac{v^2}{6}\right)$,

$$\text{da der Mittelwerth von } \cos^2\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}$$

und von $\pm \sin^2\varphi \cos\varphi =$ Null ist. Die Masse der Koppel ist also näherungsweise dadurch zu berücksichtigen, dass sie mit ihrem vollen Werthe in M_1 und ausserdem (worauf übrigens meistens wenig ankommen wird) mit $\frac{1}{6}$ desselben in M eingerechnet wird, nämlich beziehungsweise in den Punkten C und B mit den Geschwindigkeiten w und v concentrirt gedacht wird. Bei solcher Bedeutung von M_1 ist dann:

$$m = M_1 \left(\frac{w}{v}\right)^2 = M_1 \sin^2\varphi (1 \mp \lambda \cos\varphi)^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

oder bei Vernachlässigung des Gliedes mit λ^2:

$$m = M_1 \sin^2\varphi (1 \mp 2 \lambda \cos\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Was die vom Anfange einer Periode an gerechnete Arbeitssumme $= A$ der Kräfte P und Q betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass, da den Annahmen zufolge die Arbeiten dieser einzelnen Kräfte für

beide Hälften der Periode gleich gross sind, A schon für jede Hälfte = Null sein muss, um es gemäss der Forderung des Beharrungszustandes für die ganze Periode sein zu können. Hiernach kann unter A auch die vom Anfange der betreffenden halben Periode, also vom Durchgange durch die letzte Todlage an gerechnete Arbeit der Kräfte verstanden werden. Um sie auszudrücken, werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\left.\begin{aligned} x = r\Phi \text{ mit } \Phi &= 1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi \\ &= 1 \mp \frac{\lambda}{4} - \cos\varphi \pm \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (5)$$

nach Gl. (1). Bei constanter Schubkraft P ist dann wegen

$$A = Px - Qr\varphi$$

die Bedingung des Beharrungszustandes:

$$0 = P.2r - Qr\pi \text{ oder } P = \frac{\pi}{2}Q \dots\dots\dots\dots (6)$$

und mit Rücksicht hierauf sowie auf Gl. (5):

$$A = \left(\frac{Pr\Phi}{P.2r} - \frac{\varphi}{\pi}\right)Q\pi r = \left(\frac{\Phi}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\right)Q\pi r \dots\dots\dots (7).$$

Der Fall einer veränderlichen Schubkraft ist wegen später zu besprechender Anwendungen unter der Voraussetzung von Interesse, dass, unter x_1 eine Länge $< 2r$ und unter P_1, P_2 constante Kräfte verstanden,

für $x < x_1$: $$P = P_1 - P_2,$$

also $$A = (P_1 - P_2)x - Qr\varphi = P_1 x_1 \frac{x}{x_1} - P_2 x - Qr\varphi,$$

dagegen für $x > x_1$: $$P = P_1 \frac{x_1}{x} - P_2,$$

also $$A = P_1 x_1 + \int_{x_1}^{x} P_1 \frac{x_1}{x}\,dx - P_2 x - Qr\varphi$$

$$= P_1 x_1 \left(1 + ln\frac{x}{x_1}\right) - P_2 x - Qr\varphi$$

ist. Beide Ausdrücke von A mögen zusammengefasst werden in der Gleichung:

$$A = P_1 x_1 \left([1 + ln]\frac{x}{x_1}\right) - P_2 x - Qr\varphi,$$

worin das Zeichen $[1 + ln]$ nur die Bedeutung hat, dass

$$[1 + ln]\frac{x}{x_1} = \frac{x}{x_1} \text{ oder } = 1 + ln\frac{x}{x_1}$$

zu setzen ist, jenachdem $x < x_1$ oder $x > x_1$ ist. Mit $x_1 = \varepsilon . 2r$ folgt daraus die Bedingung des Beharrungszustandes:

$$0 = P_1 \varepsilon . 2r\left(1 + ln\frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 . 2r - Qr\pi$$

$$P_1 \varepsilon\left(1 + ln\frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 = \frac{\pi}{2} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und mit Rücksicht hierauf sowie auf Gl. (5):

$$A = \left(\frac{P_1 \varepsilon . 2r\left([1 + ln]\frac{\Phi}{2\varepsilon}\right) - P_2 r \Phi}{P_1 \varepsilon . 2r\left(1 + ln\frac{1}{\varepsilon}\right) - P_2 . 2r} - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r$$

oder mit $P_2 = \beta P_1$:

$$A = \left(\frac{[1 + ln]\frac{\Phi}{2\varepsilon} - \beta\frac{\Phi}{2\varepsilon}}{1 + ln\frac{1}{\varepsilon} - \beta\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Im Falle $\varepsilon = 1$ geht dieser Ausdruck, wie es sein muss, in den Ausdruck (7) über.

Mit Rücksicht auf Gl. (5) hat man schliesslich für den Cosinus des Winkels $\varphi = \varphi_1$, welcher $x = x_1 = \varepsilon . 2r$ entspricht, die quadratische Gleichung:

$$\frac{x_1}{r} = 2\varepsilon = 1 - \cos\varphi_1 + \frac{\lambda}{2}(1 - \cos^2\varphi_1).$$

Daraus folgt:
$$\cos\varphi_1 = \pm\frac{1}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)^2 \pm \frac{4\varepsilon}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

worin sämmtliche obere Vorzeichen für die erste, die unteren für die zweite Hälfte der Periode gelten, indem auch das Zeichen der Wurzelgrösse demjenigen des ersten Summanden $\frac{1}{\lambda}$ entgegengesetzt genommen werden muss, weil der Absolutwerth von $\cos\varphi_1 < 1$, dagegen $\frac{1}{\lambda} > 1$ ist. Z. B. mit $\lambda = \frac{1}{5}$ wird

$$\cos\varphi_1 = \begin{cases} 5 - \sqrt{16 + 20\varepsilon} \text{ für die erste Hälfte,} \\ -5 + \sqrt{36 - 20\varepsilon} \text{ für die zweite Hälfte} \end{cases}$$

der Periode, wonach beide Werthe von φ_1 um mehr als 10^0 verschieden sein können, z. B. $= 95^0 41'$ und $84^0 19'$ für $\varepsilon = 0{,}5$.

Ausser den hier erwähnten zwei Fällen einer constanten und einer veränderlichen Schubkraft sind ferner einfache und mehrfache Schub-

kurbelmechanismen zu unterscheiden. Letztere werden durch passende Verbindung von 2 oder 3 gleichen einfachen solchen Mechanismen mit einer gemeinschaftlichen Kurbel- und Schwungradwelle erhalten und gewähren, abgesehen von dem durch das Schwungrad vermittelten Massenkraftschluss, den in §. 32 besprochenen Kraftkettenschluss zu zwangläufiger Ueberschreitung der den einfachen Schubkurbelgetrieben eigenthümlichen Todlagen; zugleich bedürfen sie bei gegebenem Ungleichförmigkeitsgrade δ und unter sonst gleichen Umständen eines weniger schweren Schwungrades, als die isolirten einfachen Getriebe zusammen.

Endlich ist zu bemerken, dass bei der Verwendung des in Rede stehenden Mechanismus als Kurbelschubgetriebe, indem dabei Q die treibende Kraft und P der Widerstand ist, jetzt offenbar dieselben Maximal- und Minimalwerthe von v bei denselben Configurationen des Mechanismus, wie zuvor, stattfinden würden, wenn gleichzeitig auch der Bewegungssinn der umgekehrte wäre. Eine besondere Untersuchung dieses Falles eines Kurbelschubgetriebes ist deshalb nicht erforderlich.

§. 94. Einfache Schubkurbel mit constanter Schubkraft.

Es werde zunächst angenommen, dass das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der auf den Kurbelzapfen reducirten rotirenden Masse M selbst in Vergleich mit dem Ungleichförmigkeitsgrade δ klein, nämlich ein höchstens mit δ^2 vergleichbarer Bruch ist. Die den grössten und kleinsten Werthen der Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens (des Punktes B, Fig. 103) entsprechenden Winkel φ ($= B_0AB$ oder B_1AB beziehungsweise für die erste oder zweite Hälfte der Periode) können dann nach §. 92 gemäss der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0,$$

also nach §. 93, Gl. (5) und (7) gemäss der Gleichung:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sin\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi = \frac{2}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

bestimmt werden, worin sich das obere Vorzeichen des Gliedes mit λ auf die erste, das untere auf die zweite Hälfte der Periode bezieht. In beiden Fällen entsprechen ihr zwei Wurzelwerthe φ zwischen 0 und 180°, die bei Voraussetzung eines Schubkurbelgetriebes bezeichnet seien mit

φ_1'' und φ_1' für die erste,

φ_2'' und φ_2' für die zweite

Hälfte der Periode, da in jeder dann zuerst ein Minimum von v erreicht wird, weil in jeder Todlage die elementare Arbeit der treibenden Kraft P = Null und somit die Geschwindigkeit v in der Abnahme begriffen ist. Die der zweiten Hälfte der Periode angehörigen dieser ausgezeichneten Kurbelstellungen sind den der ersten Hälfte angehörigen symmetrisch gegenüber liegend in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$, Fig. 104, des Kurbelkreises, d. h. es ist

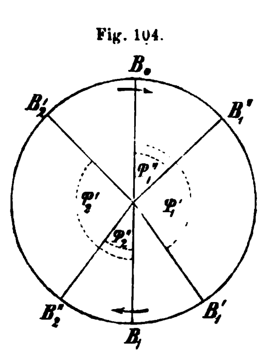


Fig. 104.

$$\varphi_2'' = 180^0 - \varphi_1' \text{ und } \varphi_2' = 180^0 - \varphi_1'',$$

weil durch die Substitution von $180^0 - \varphi$ für φ in Gl. (1) nur $\sin 2\varphi$ entgegengesetzt wird, während $\sin \varphi$ ungeändert bleibt. Es ist deshalb auch nur nöthig, die Winkel φ_1'' und φ_1' als Wurzeln der Gleichung

$$\sin \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi = \frac{2}{\pi}$$

zu ermitteln, was durch allmählige Näherung zu geschehen hat, da diese Gleichung mit

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \pm 2 \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

vom vierten Grade in Bezug auf $\sin \varphi$ wird.

Setzt man ferner $\qquad A = f(\varphi) \,.\, Q\pi r \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$

so ist nach Gl. (5) und (7) im vorigen Paragraph:

$$f(\varphi) = \frac{\Phi}{2} - \frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \ldots\ldots (3),$$

insbesondere also für die zweite Hälfte der Periode:

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$f(\pi - \varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi\right) - 1 + \frac{\varphi}{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi\right) + \frac{\varphi}{\pi}$$

$= -f(\varphi)$ für die erste Hälfte. Daraus folgt, dass für solche Kurbelstellungen, die einander in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$ symmetrisch gegenüber liegen, die Werthe von $f(\varphi)$ und somit von A entgegengesetzt gleich sind, dass also auch, wenn

$$A' - A'' = a\, Q\pi r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gesetzt wird, a = dem Doppelten des grösseren Absolutwerthes von

$f(\varphi_1'')$ und $f(\varphi_1')$ ist, indem dann das absolute Maximum v' und das absolute Minimum v'' der Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens in solchen bezüglich auf $B_0 B_1$ symmetrischen Lagen stattfinden. Weil übrigens für je zwei solche Lagen m nach Gl. (3) oder (4) im vorigen Paragraph gleich gross, also $m' = m''$ ist, so wird Gl. (12) im §. 92 identisch mit Gl. (9) daselbst und folgt:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

unabhängig von der Schiebermasse M_1. Hiernach findet man z. B.

für $\lambda = 0$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\varphi_1'' = 180^0 - \varphi_2' =$	$39^0\,32'$	$44^0\,21'$	$46^0\,3'$	$47^0\,25'$	$49^0\,29'$
$\varphi_1' = 180^0 - \varphi_2'' =$	$140^0\,28'$	$144^0\,43'$	$145^0\,59'$	$146^0\,57'$	$148^0\,20'$
$\alpha =$	0,2105	0,2384	0,2489	0,2577	0,2717

In allen diesen Fällen entspricht dem Winkel $\varphi = \varphi_1''$ das absolute Minimum und dem Winkel $\varphi = \varphi_2'$ das absolute Maximum von v, abgesehen vom Falle $\lambda = 0$, in welchem die zwei Maxima und ebenso die zwei Minima von v gleich gross sind, während dann auch die 4 ausgezeichneten Kurbelstellungen gemäss der Beziehung:

$$\varphi_1'' + \varphi_1' = \varphi_2'' + \varphi_2' = 180^0$$

zugleich in Beziehung auf den zu $B_0 B_1$ senkrechten Durchmesser des Kurbelkreises symmetrisch liegen. Die Werthe von α $\left(\text{für } \lambda < \frac{1}{4}\right)$ können mit einer Genauigkeit von 4 Decimalstellen zusammengefasst werden in der empirischen Formel:

$$\alpha = 0{,}2105\,(1 + 0{,}96\,\lambda + 0{,}81\,\lambda^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Wenn mit μ das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der nach Gl. (5) bestimmten Masse M bezeichnet, also

$$M_1 = \mu \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

gesetzt und dieses Verhältniss μ nicht viel $< \delta$ gefunden wird, so ist die obige Bestimmung von M einer Correctur bedürftig. Setzt man zu dem Ende:

$$m = M_1 f_1(\varphi) \text{ mit } f_1(\varphi) = \sin^2\varphi\,(1 + 2\lambda \cos\varphi)$$
$$= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \lambda \sin\varphi \sin 2\varphi \quad \ldots\ldots (8)$$

nach Gl. (4) im vorigen Paragraph, so sind die den eminenten Werthen

von v entsprechenden Winkel φ bestimmt durch die Gleichung (11) in §. 92, also hier durch die Gleichung:

$$Q\pi r \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{M_1 c^2}{2} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = 0$$

$$2 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} - \frac{\alpha\mu}{\delta} \frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = 0,$$

die wegen $\frac{df_1(\varphi)}{d\varphi} = \sin 2\varphi + \lambda (2 \sin\varphi \cos 2\varphi + \cos\varphi \sin 2\varphi)$

$$= \sin 2\varphi \mp \lambda \sin\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (3) die Form erhält:

$$\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi - \frac{\alpha\mu}{\delta} [\sin 2\varphi \mp \lambda \sin\varphi (1 + 3 \cos 2\varphi)] = \frac{2}{\pi} \quad \cdot (9).$$

Sie tritt an die Stelle von Gl. (1) und lässt erkennen, dass jetzt die ihren 4 Wurzelwerthen φ_1'', φ_1', φ_2'', φ_2' entsprechenden ausgezeichneten Kurbelstellungen nicht in Bezug auf den Durchmesser $B_0 B_1$ des Kurbelkreises symmetrisch sind. Um zu erkennen, für welche von ihnen $v = v'$ und für welche $v = v''$, ob nämlich $\varphi' = \varphi_1'$ oder $= \varphi_2'$, sowie ob $\varphi'' = \varphi_1''$ oder $= \varphi_2''$ ist, handelt es sich nach §. 92 um die betreffenden Werthe von

$$A - \frac{mc^2}{2} = Q\pi r f(\varphi) - \frac{M_1 c^2}{2} f_1(\varphi)$$

$$= \left[f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi)\right] Q\pi r,$$

also um die Function $F(\varphi) = f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi)$ . . . . (10),

deren 4 ausgezeichneten Werthen $F(\varphi_1'')$, $F(\varphi_1')$, $F(\varphi_2'')$ und $F(\varphi_2')$ der grösste $= F(\varphi')$ und der kleinste $= F(\varphi'')$ zu entnehmen ist, um damit schliesslich nach §. 92, Gl. (12) einen corrigirten Werth von M zu finden:

$$M = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} = \frac{\alpha_1}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \quad \cdots\cdots (11).$$

So findet man z. B. für $\lambda = 0$ und $\mu = \frac{1}{5}\delta$:

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = 42^0 44'; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 143^0 24'$$

$$F(\varphi'') = -0{,}11436; \; F(\varphi') = 0{,}09726$$

$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2116 = 1{,}005\,\alpha;$$

dagegen für $\lambda = 0$ und $\mu = \delta$:

$$\varphi_1'' = \varphi_2'' = 56^0\,13'; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = 152^0\,23'$$
$$F(\varphi'') = -0{,}16304; \; F(\varphi') = 0{,}07383$$
$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2369 = 1{,}125\,\alpha.$$

Die Schiebermasse M_1 hat also eine Verdrehung der ausgezeichneten Kurbelstellungen im Sinne der Kurbeldrehung zur Folge, sowie eine Vergrösserung des Ungleichförmigkeitsgrades δ oder der rotirenden Masse, die einem gegebenen Werthe von δ entspricht. Die Resultate obiger zwei Beispiele entsprechen der Formel:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^2 \dots\dots\dots\dots\dots (12),$$

die mit hinlänglicher Annäherung als allgemein gültig betrachtet werden kann, wenn λ sehr klein und μ nicht viel $> \delta$ ist.

Wird aber zur Prüfung des Einflusses eines grösseren Werthes von λ auf dieses Verhältniss der Coefficienten α_1 und α z. B. $\lambda = \frac{1}{5}$ angenommen nebst $\mu = \delta$, so findet man:

$$\varphi_1'' = 69^0\,8'; \quad \varphi_1' = 159^0\,46'; \quad \varphi_2'' = 52^0\,48'; \quad \varphi_2' = 146^0\,26'$$
$$F(\varphi_1'') = -0{,}20229; \; F(\varphi_1') = 0{,}04760; \; F(\varphi_2'') = -0{,}16543; \; F(\varphi_2') = 0{,}09212$$
$$= F(\varphi'') \qquad\qquad = F(\varphi')$$
$$\alpha_1 = F(\varphi') - F(\varphi'') = 0{,}2944 = 1{,}142\,\alpha$$

entsprechend der folgenden Verallgemeinerung von Gl. (12):

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 + \frac{1 + 0{,}68\,\lambda}{8}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^2 \dots\dots\dots\dots (13).$$

§. 95. Zweifache Schubkurbel mit gleichen constanten Schubkräften.

Zwei gleiche Schubkurbelgetriebe seien mit einer gemeinschaftlichen Kurbel- und Schwungradwelle so verbunden, dass, wenn das erste sich in einer Todlage befindet, die Kurbel des zweiten sich seit dem letzten Durchgange durch die entsprechende Todlage (d. h. durch die obere, wenn jene eine obere, durch die untere, wenn jene eine untere ist) um den Winkel ω ($< \pi$) gedreht hat; dieser Winkel heisse der Voreilungswinkel des zweiten Getriebes vor dem ersten. Fallen die Schubrichtungen AC (Fig. 103) der beiden Getriebe zusammen, so bilden die Kurbelrichtungen AB selbst diesen Winkel ω; fallen die Kurbeln zusammen, so sind die Schubrichtungen unter dem Winkel ω gegen einander geneigt. Im Allgemeinen können sowohl die Kurbeln wie die Schubrichtungen gegen einander geneigt sein, so dass die Summe dieser Neigungswinkel $= \omega$ ist.

Für jedes der beiden Getriebe gelten die im Vorhergehenden für die einfache Schubkurbel gebrauchten Bezeichnungen r, l, λ, v, P, Q, M_1; dagegen sei M die gesammte auf den Abstand r von der Axe der gemeinsamen Kurbelwelle reducirte rotirende Masse und A die Arbeitsumme aller Kräfte, gerechnet vom Anfange einer Periode, der hier mit dem Durchgange des ersten Getriebes durch eine obere Todlage (der Kurbelrichtung AB_0, Fig. 103, entsprechend) zusammenfalle. Ist dann in irgend einem Augenblicke der Drehungswinkel seit dem letzten Durchgange durch eine Todlage für die erste Kurbel $=\varphi$, für die zweite $=\psi$, also

$$\psi = \omega + \varphi \quad \text{oder} \quad \psi = \omega + \varphi - \pi,$$

jenachdem

$$\omega + \varphi < \pi \quad \text{oder} \quad > \pi$$

ist, so ergiebt sich nach Gl. (2) und (3) im vorigen Paragraph und mit Rücksicht darauf, dass für die Bewegung von einer zur folgenden Todlage die Arbeitsumme der Kräfte für jede einzelne der beiden Schubkurbeln = Null ist:

$$A = [f(\varphi) + f(\psi) - f(\omega)]\, Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mit

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2} \sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$f(\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\psi \mp \frac{\lambda}{2} \sin^2\psi\right) - \frac{\psi}{\pi}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\omega - \frac{\lambda}{2} \sin^2\omega\right) - \frac{\omega}{\pi}.$$

Dabei gilt das obere oder untere Vorzeichen des Gliedes mit λ im Ausdrucke von $f(\varphi)$, jenachdem das erste Getriebe, im Ausdrucke von $f(\psi)$ aber, jenachdem das zweite Getriebe zuletzt in einer oberen oder unteren Todlage sich befunden hat.

Unter der Voraussetzung, dass das Verhältniss von M_1 zu M ein höchstens mit δ^2 vergleichbarer kleiner Bruch ist, können nach §. 92 die Maxima und Minima von v als der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0$$

entsprechend betrachtet werden, sofern es hier nur auf die möglichst zutreffende Kenntniss dieser Maxima und Minima selbst und nicht der Configurationen des Getriebes ankommt, in denen sie stattfinden, somit auch als entsprechend der Gleichung:

$$\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} = 0 \text{ mit } F(\varphi) = f(\varphi) + f(\psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Ist hiernach das grösste Maximum von $F(\varphi) = F(\varphi')$, das kleinste Minimum $= F(\varphi'')$ gefunden, so ist, da $f(\omega)$ constant,

$$A' - A'' = [F(\varphi') - F(\varphi'')]\, Q\pi r$$

und ergiebt sich damit der dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende Werth von M nach Gl. (12) in §. 92, wenn darin ausserdem m' und m'' als die den Winkeln φ' und φ'' entsprechenden Werthe von

$$m = M_1 [\sin^2\varphi\,(1 \mp 2\lambda\cos\varphi) + \sin^2\psi\,(1 + 2\lambda\cos\psi)] \quad \ldots\ldots (3)$$

nach Gl. (4) in §. 93 eingesetzt werden. In diesem Ausdrucke von m ist das erste Glied mit λ mit demselben Vorzeichen wie in $f(\varphi)$, das zweite mit demselben Zeichen wie in $f(\psi)$ zu nehmen. Bei Vernachlässigung von M_1 wird einfach:

$$M = \frac{\alpha'}{\delta}\,\frac{2Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Gewöhnlich ist der Voreilungswinkel ω ein rechter, und wenn dann die Periode in 4 Theile getheilt wird, Drehungswinkeln von je 90° entsprechend, so ist für das erste und dritte Viertel:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$f(\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\psi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\psi\right) - \frac{\psi}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\cos^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\right) - 2\,\frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

mit dem oberen Zeichen für das erste, dem unteren für das dritte Viertel.

Für das zweite und vierte Viertel ist:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi - \pi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$f(\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\psi \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\psi\right) - \frac{\psi}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \sin\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\cos^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\left(3 - \sin\varphi - \cos\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi\right) - 2\,\frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots (6)$$

mit dem oberen Zeichen für das zweite, dem unteren für das vierte Viertel.

Ein Maximum oder Minimum von $F(\varphi)$ entspricht also im ersten und dritten Viertel der Periode denjenigen spitzen Winkeln φ, für welche nach Gl. (5):

$$\sin\varphi - \cos\varphi - 4\frac{\varphi}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, also

$$\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{4}{\pi} = 0$$

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1 = \sin 2\varphi = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

ist. Diese Winkel sind: $\varphi = 19^0\,12'$ und $\varphi = 70^0\,48'$.

Im zweiten resp. vierten Viertel der Periode entsprechen dagegen einem Maximum oder Minimum von $F(\varphi)$ die stumpfen Winkel φ, für welche nach Gl. (6):

$$-\sin\varphi - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi - 4\frac{\varphi}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, oder den spitzen Winkeln $\varphi' = \pi - \varphi$, für welche

$$-\sin\varphi' + \cos\varphi' \mp \frac{\lambda}{2}\cos 2\varphi' + 4\frac{\varphi'}{\pi}$$

ein Maximum oder Minimum, also

$$-\cos\varphi' - \sin\varphi' \pm \lambda\sin 2\varphi' + \frac{4}{\pi} = 0$$

$$(\cos\varphi' + \sin\varphi')^2 = \left(\frac{4}{\pi} \pm \lambda\sin 2\varphi'\right)^2$$

$$1 + \sin 2\varphi' = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \pm \frac{8}{\pi}\lambda\sin 2\varphi' + \lambda^2\sin^2 2\varphi'$$

$$\sin 2\varphi'\left(1 \mp \frac{8}{\pi}\lambda - \lambda^2\sin 2\varphi'\right) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ist, indem dabei das obere Zeichen des Gliedes mit λ sich auf das zweite, das untere auf das vierte Viertel der Periode bezieht.

Die Rechnungsresultate gemäss diesen Gleichungen (5)—(8) für verschiedene Werthe von λ enthält die folgende Zusammenstellung, in der mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 die Werthe von φ beziehungsweise für das 1te, 2te, 3te, 4te Viertel der Periode bezeichnet sind, insbesondere mit den Bezeichnungen φ_1', φ_2'... einem Maximum, mit den Bezeichnungen φ_1'', φ_2''... einem Minimum von $F(\varphi)$, also von A und von v entsprechend.

$\lambda = 0$	$\lambda = \frac{1}{8}$	$\lambda = \frac{1}{6}$	$\lambda = \frac{1}{5}$	$\lambda = \frac{1}{4}$
$\varphi_1'' = 19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$
$\varphi_1' = 70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$
$\varphi_2'' = 109^\circ 12'$	$104^\circ 8'$	$103^\circ 3'$	$102^\circ 18'$	$101^\circ 20'$
$\varphi_2' = 160^\circ 48'$	$165^\circ 52'$	$166^\circ 57'$	$167^\circ 42'$	$168^\circ 40'$
$\varphi_3'' = 19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$	$19^\circ 12'$
$\varphi_3' = 70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$	$70^\circ 48'$
$\varphi_4'' = 109^\circ 12'$	$123^\circ 38'$	—	—	—
$\varphi_4' = 160^\circ 48'$	$146^\circ 22'$	—	—	—
$F(\varphi_1'') = -0{,}0211$	$-0{,}0523$	$-0{,}0628$	$-0{,}0711$	$-0{,}0836$
$F(\varphi_1') = 0{,}0211$	$-0{,}0102$	$-0{,}0206$	$-0{,}0289$	$-0{,}0414$
$F(\varphi_2'') = -0{,}0211$	$-0{,}0473$	$-0{,}0566$	$-0{,}0641$	$-0{,}0756$
$F(\varphi_2') = 0{,}0211$	$0{,}0473$	$0{,}0566$	$0{,}0641$	$0{,}0756$
$F(\varphi_3'') = -0{,}0211$	$0{,}0102$	$0{,}0206$	$0{,}0289$	$0{,}0414$
$F(\varphi_3') = 0{,}0211$	$0{,}0523$	$0{,}0628$	$0{,}0711$	$0{,}0836$
$F(\varphi_4'') = -0{,}0211$	$-0{,}0010$	—	—	—
$F(\varphi_4') = 0{,}0211$	$0{,}0010$	—	—	—

Das Fehlen von Angaben an einigen Stellen dieser Tabelle wird dadurch veranlasst, dass es im letzten Viertel der Periode ein Maximum und Minimum von $F(\varphi)$ nicht giebt, wenn der mit dem unteren Zeichen genommenen Gleichung (8) ein unmöglicher Werth von $\sin 2\varphi' > 1$ entsprechen würde; das ist der Fall für

$$\lambda > -\frac{4}{\pi} + \sqrt{2}, \text{ d. i. } \lambda > 0{,}141.$$

Uebrigens ist in allen Fällen:

$$F(\varphi_1'') = -F(\varphi_3'); \; F(\varphi_1') = -F(\varphi_3''); \; F(\varphi_2'') = -F(\varphi_2');$$

ferner das kleinste Minimum dasjenige, welches im ersten Viertel, das grösste Maximum das jenem Minimum absolut genommen gleiche, welches im dritten Viertel der Periode stattfindet, also

$$\varphi'' = \varphi_1'' \text{ und } \varphi' = \varphi_3'$$

$$\alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} = F(\varphi_3').$$

Indem endlich der den Minimal- und Maximalwerthen von $F(\varphi)$ im ersten und dritten Viertel entsprechende Winkel φ nach Gl. (7) von λ unabhängig ist, ergiebt sich das Maximum von $F(\varphi) = F(\varphi_3') = \alpha'$ nach Gl. (5) um $\frac{\lambda}{4}$ grösser, als derjenige Werth, welcher $\lambda = 0$ entspricht, nämlich

$$\alpha' = 0{,}0211 + \frac{\lambda}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

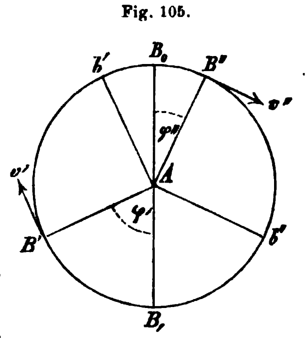
Die Vergleichung dieser Coefficienten α' von Gl. (4) mit den Coefficienten α von Gl. (5) im vorigen Paragraph ergiebt

für $\lambda = 0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\alpha' = 0{,}0211$	0,0523	0,0628	0,0711	0,0836
$\alpha = 0{,}2105$	0,2384	0,2489	0,2577	0,2717
$\frac{\alpha'}{\alpha} = 0{,}100$	0,219	0,252	0,276	0,308.

Die Werthe von $\frac{\alpha'}{\alpha}$ lassen erkennen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse der zweifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als diese Masse für die zwei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn sie unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden; wie man sieht, nimmt der auf diesem Umstande beruhende Vortheil der zweifachen Schubkurbel mit wachsender Grösse von λ erheblich ab.

Zu bemerken ist schliesslich, dass die zwei Schiebermassen M_1 eine Correction von Gl. (4) nicht nöthig machen, weil auch hier, wie bei der einfachen Schubkurbel, $m' = m''$ und deshalb Gl. (12) in §. 92 mit Gl. (9) daselbst identisch ist. Indem nämlich $\varphi'' = 19^0\,12'$ und $\varphi' = 70^0\,48'$ sich zu 90^0 ergänzen, ist die dem Maximum v' von v entsprechende Kurbellage $B'Ab'$ (Fig. 105) der dem Minimum v'' entsprechenden Lage $B''Ab''$ symmetrisch gegenüber liegend in Bezug auf die Verbindungsgerade B_0B_1 der Todpunkte, so dass der von der ersten oder zweiten Schiebermasse M_1 herrührende Bestandtheil von m in der einen Lage dem von der zweiten resp. ersten Masse M_1 herrührenden Bestandtheile in der anderen Lage gleich ist. Anders wird es sich verhalten, wenn schon bei der Bestimmung von φ' und φ'' auf die Schiebermassen M_1 Rücksicht genommen wird gemäss Gl. (11) in §. 92, was dann zu geschehen hätte, wenn das Verhältniss von M_1 zu M ein nicht erst mit δ^2, sondern schon mit δ vergleichbarer Bruch wäre; hier mag indessen von einem solchen Falle abgesehen werden. —

Fig. 105.



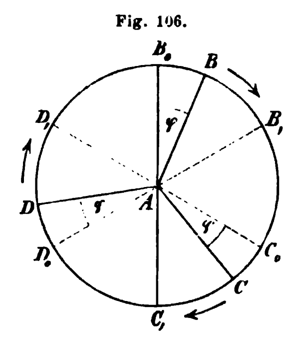
Aus dem Umstande, dass im Falle $\lambda = 0$ sich die relativen Minima sowohl wie die relativen Maxima von $F(\varphi)$ einander gleich und die einen

absolut genommen gleich den anderen ergeben haben, kann gefolgert werden, dass der dabei zu Grunde liegende Voreilungswinkel $\omega = 90^0$ in diesem Falle der vortheilhafteste ist, indem jede Aenderung desselben eine solche Verschiebung jenes gleichmässigen Wechsels von Minimal- und Maximalwerthen voraussichtlich zur Folge haben würde, wodurch das absolute Minimum verkleinert, das absolute Maximum vergrössert, also auch α' vergrössert wird. In anderen Fällen ist es aber denkbar, dass ein von 90^0 etwas verschiedener Voreilungswinkel ω einem kleineren Coefficienten α' entsprechen und somit vortheilhafter sein würde; ein erheblicher Gewinn ist indessen nicht davon zu erwarten, und mag auf die Untersuchung auch dieser Frage hier verzichtet werden.

§. 96. Dreifache Schubkurbel mit gleichen constanten Schubkräften.

Wenn n gleiche Schubkurbelgetriebe mit einer gemeinschaftlichen Kurbelwelle so verbunden sind, dass die Durchgänge der einzelnen Getriebe durch entsprechende Todlagen nach Drehungen jener Welle um je $\frac{2\pi}{n}$ auf einander folgen, wie es insbesondere bei übereinstimmenden Schubrichtungen aller Einzelgetriebe dann der Fall ist, wenn ihre Kurbeln unter gleichen Winkeln $= \frac{2\pi}{n}$ gegen einander geneigt, somit symmetrisch rings um die Welle gruppirt sind, so umfasst die Periode auch nur einen solchen Drehungswinkel $= \frac{2\pi}{n}$ der Kurbelwelle, nach welchem dieselbe Configuration des zusammengesetzten Getriebes wiederkehrt, indem nun die 1te, 2te, 3te ... Kurbel an die vorher von der 2ten, 3ten, 4ten ... Kurbel eingenommene Stelle gelangt ist. Anwendung findet eine solche Anordnung zuweilen im Falle $n = 3$, der hier vorausgesetzt wird. Dabei seien (Fig. 106) die Lagen des 1ten, 2ten, 3ten Kurbelzapfens

Fig. 106.



zu Anfang der Periode:		B_0	C_0	D_0
in der Mitte „	„	B_1	C_1	D_1
zu Ende „	„	C_0	D_0	B_0,

indem die Winkel $B_0AB_1 = B_1AC_0 = C_0AC_1 = C_1AD_0 = D_0AD_1 = D_1AB_0 = \frac{\pi}{3}$ sind. Der Drehungswinkel φ wird in der ersten Hälfte der Periode von den Anfangslagen, in der zweiten Hälfte von den Mittellagen der Kurbeln an gerechnet.

im einen und anderen Falle folglich bis $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Unter diesen Umständen ist, wenn wieder r, λ, Q für jede einzelne der drei Schubkurbeln dieselben Bedeutungen haben, wie nach §. 94 für die einfache Schubkurbel, und wenn die durch Gl. (3) in §. 94 bestimmte Function $f(\varphi)$ zur Abkürzung mit $f_0(\varphi)$ oder $f_1(\varphi)$ bezeichnet wird, jenachdem sie mit dem oberen oder unteren Zeichen des Gliedes mit λ verstanden, der betreffende Winkel nämlich von der oberen oder unteren Todlage (AB_0 oder AC_1 in Fig. 106) an gerechnet ist, die Arbeitssumme aller Kräfte für die erste Hälfte der Periode:

$$A = \left[f_0(\varphi) + f_0\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f_1\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] Q\pi r$$

oder, weil allgemein

$$f_0(\varphi) + f_1(\pi - \varphi) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \\ + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\pi - \varphi}{\pi} \end{array}\right\} = 0 \text{ ist,}$$

$$A = \left[f_0(\varphi) + f_1\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] Q\pi r.$$

Für die Mitte der Periode $\left(\varphi = \frac{\pi}{3}\right)$ ist danach:

$$A = \left[f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_1\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] Q\pi r = 0,$$

und deshalb für die zweite Hälfte der Periode, gerechnet von der Mitte oder auch vom Anfange der ganzen Periode:

$$A = \left[f_0\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_1(\varphi) + f_1\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) - f_1\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] Q\pi r$$

$$= \left[f_1(\varphi) + f_0\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) - f_0\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] Q\pi r,$$

ein Ausdruck, der aus dem auf die erste Hälfte der Periode bezüglichen durch Vertauschung von f_0 mit f_1, also durch Umkehrung der Zeichen aller Glieder mit λ hervorgeht. Wird also in beiden Fällen

$$A = F(\varphi) \,.\, Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gesetzt, so ist nun

$$F(\varphi) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right] - \frac{\varphi}{\pi} \\ + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) + \frac{\lambda}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\right] - \left(\frac{1}{3} + \frac{\varphi}{\pi}\right) \\ - \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] + \left(\frac{1}{3} - \frac{\varphi}{\pi}\right) \end{array}\right.$$

und beziehen sich dabei die oberen Zeichen auf die erste, die unteren auf die zweite Hälfte der Periode, während in jeder Hälfte φ von 0 bis $\frac{\pi}{3}$ veränderlich ist. Wegen

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi$$

und $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\sin 2\varphi=\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi$

ist auch:

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\varphi+2\sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi-\sin^2\varphi\right)\right]-3\frac{\varphi}{\pi}$$

oder wegen $1=2\cos\frac{\pi}{3}$, also

$$\cos\varphi-2\sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\varphi-\sin\frac{\pi}{3}\sin\varphi\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$$

und $\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi-\sin^2\varphi=\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi-\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi+\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)-\frac{1}{2}$$

schliesslich auch:

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+\frac{\lambda}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)-\frac{1}{2}\right]-3\frac{\varphi}{\pi}\quad\cdots(2).$$

Die Maximal- und Minimalwerthe von $F(\varphi)$ entsprechen den zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ liegenden Wurzeln der Doppelgleichung:

$$\frac{dF}{d\varphi}=0,\ \text{also}\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)+\frac{\lambda}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)=\frac{3}{\pi}\quad\cdots\cdots(3),$$

und wenn insbesondere φ' und φ'' diejenigen dieser Wurzelwerthe sind, denen das grösste Maximum und das kleinste Minimum von $F(\varphi)$ entspricht, so ist

$$A'-A''=[F(\varphi')-F(\varphi'')]\,Q\pi r$$

und nach §. 92, Gl. (9) bezw. Gl. (12) bei Vernachlässigung des Einflusses der Schiebermassen M_1:

$$M=\frac{\alpha''}{\delta}\,\frac{3\,Q\pi r}{c^2}\ \text{mit}\ \alpha''=\frac{F(\varphi')-F(\varphi'')}{3}\quad\cdots\cdots\cdots(4).$$

Folgende Zusammenstellung enthält die Resultate der Rechnung nach den Gleichungen (2) und (3) für die zwei Fälle $\lambda=0$ und $\lambda=\frac{1}{5}$, indem

dabei die dem Minimum und Maximum von $F(\varphi)$ entsprechenden Winkel für die erste Hälfte der Periode mit φ_1'' und φ_1', für die zweite mit φ_2'' und φ_2' bezeichnet sind.

$\lambda = 0$		$\lambda = \frac{1}{5}$	
$\varphi_1'' = 12^\circ 44'$	$F(\varphi_1'') = -0{,}0090$	$\varphi_1'' = 0^\circ 20'$	$F(\varphi_1'') = 0{,}0000$
$\varphi_1' = 47^\circ 16'$	$F(\varphi_1') = 0{,}0090$	$\varphi_1' = 39^\circ 18'$	$F(\varphi_1') = 0{,}0290$
$\varphi_2'' = 12^\circ 44'$	$F(\varphi_2'') = -0{,}0090$	$\varphi_2'' = 20^\circ 42'$	$F(\varphi_2'') = -0{,}0290$
$\varphi_2' = 47^\circ 16'$	$F(\varphi_2') = 0{,}0090$	$\varphi_2' = 59^\circ 40'$	$F(\varphi_2') = 0{,}0000$

Hiernach ist $\varphi' = \varphi_1'$ und $\varphi'' = \varphi_2''$; ferner nach Gl. (4)

$$\text{für } \lambda = 0:\ \alpha'' = 0{,}0060 = 0{,}029\,\alpha,$$

$$\text{für } \lambda = \frac{1}{5}:\ \alpha'' = 0{,}0193 = 0{,}075\,\alpha,$$

unter $\alpha \left(= 0{,}2105 \text{ für } \lambda = 0, \text{ bezw. } = 0{,}2577 \text{ für } \lambda = \frac{1}{5}\right)$ den Coefficienten von Gl. (5) in §. 94 verstanden. Die Verhältnisse von α'' zu α, die hier wieder in demselben Sinne und in ähnlichem Grade von λ abhängen wie bei der zweifachen Schubkurbel (§. 95) die Verhältnisse $\alpha' : \alpha$, lassen erkennen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse der dreifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als diese Masse für die drei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn sie unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden.

Aus dem Umstande, dass die Winkel $\varphi' = \varphi_1'$ und $\varphi'' = \varphi_2''$ sich zu 60° ergänzen, ist schliesslich leicht ersichtlich, dass die diesen zwei Winkeln entsprechenden Kurbellagen in Bezug auf den Durchmesser $B_0 C_1$, Fig. 106, symmetrisch sind, dass also die Summen der auf die Kurbelzapfen reducirten Schiebermassen M_1 für diese zwei Kurbellagen, nämlich m' und m'' gemäss den Bezeichnungen in Gl. (12), §. 92, gleich gross sind, und dass somit obige Gleichung (4) die dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende Grösse der rotirenden Masse M mit einer solchen Annäherung liefert, womit δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, falls auch das Verhältniss $M_1 : M$ ein mit δ^2 vergleichbarer Bruch ist.

§. 97. Einfache Schubkurbel mit veränderlicher Schubkraft.

Die Schubkraft wird in der Weise veränderlich angenommen, wie es in §. 93 vorausgesetzt wurde, dass so nach Gl. (9) daselbst die vom Anfange

einer (eine ganze Umdrehung der Kurbelwelle umfassenden) Periode, nämlich vom Durchgange durch eine obere Todlage an gerechnete Arbeit der Kräfte:

$$A = f(\varphi) . Q\pi r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ist mit

$$f(\varphi) = \frac{[1 + ln]\frac{\Phi}{2\varepsilon} - \beta\frac{\Phi}{2\varepsilon}}{1 + ln\frac{1}{\varepsilon} - \beta\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Darin ist

$$\Phi = 1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi$$

mit dem oberen Vorzeichen des letzten Gliedes für die erste Hälfte, dem unteren für die zweite Hälfte der Periode, während auch in Gl. (2)

$$[1 + ln]\frac{\Phi}{2\varepsilon} = \frac{\Phi}{2\varepsilon} \text{ oder } = 1 + ln\frac{\Phi}{2\varepsilon}$$

ist, jenachdem $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist, unter φ_1 den durch Gl. (10) in §. 93 bestimmten, von λ und ε abhängigen und ausserdem für beide Hälften der Periode im Allgemeinen verschiedenen Winkel verstanden. Diese besondere Art von Veränderlichkeit der Schubkraft entspricht näherungsweise dem Gesetze, nach welchem der Dampfdruck auf den Kolben einer Dampfmaschine bei jedem Kolbenschube sich ändert, indem dabei ε den sogenannten Füllungsgrad, β das Verhältniss des mittleren Vorderdampfdruckes zum Mittelwerthe des Hinterdampfdruckes bei der Einströmung (während des Kolbenweges $\varepsilon . 2r$) bedeutet.

Die grössten und kleinsten Werthe von $f(\varphi)$ und somit von A entsprechen der Gleichung:

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\left[\frac{2\varepsilon}{\Phi}\right] - \beta}{1 + ln\frac{1}{\varepsilon} - \beta\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2\varepsilon}\frac{d\Phi}{d\varphi} - \frac{1}{\pi} = 0,$$

in welcher Gleichung $\left[\frac{2\varepsilon}{\Phi}\right]$ die Bedeutung 1 oder $\frac{2\varepsilon}{\Phi}$ hat, jenachdem $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist. Mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von Φ folgt daraus:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sin\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{\pi}\left(1 + ln\frac{1}{\varepsilon} - \beta\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{2\varepsilon}{\left[\frac{2\varepsilon}{\Phi}\right] - \beta} \quad \ldots (3),$$

und zwar hat diese Gleichung, mit Rücksicht auf die doppelten Vorzeichen der Glieder mit λ (auf der linken Seite sowie im Ausdrucke von Φ) und

auf die doppelte Bedeutung von $\left[\frac{2\,\varepsilon}{\Phi}\right]$, vier verschiedene Formen, jenachdem sie auf die erste oder zweite Hälfte der Periode bezogen wird und dabei $\varphi < \varphi_1$ oder $> \varphi_1$ ist. Immer ergeben sich zwischen den hier in Betracht kommenden Grenzen im Ganzen 4 Wurzelwerthe derselben, von denen meistens jeder der 4 Formen von Gl. (3) einer angehört, entsprechend zwei kleinsten und zwei grössten Werthen von $f(\varphi)$, also von A und von v, und wenn dann wieder φ' und φ'' diejenigen dieser Winkel φ sind, die beziehungsweise dem grösseren Maximum und dem kleineren Minimum von $f(\varphi)$ entsprechen, so ist nach §. 92, Gl. (9) bei Abstraction von der Schiebermasse M_1:

$$M = \frac{\alpha}{\delta}\,\frac{Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha = f(\varphi') - f(\varphi'') \;\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

Während bei der Schubkurbel mit constanter Schubkraft (§. 94) der Coefficient α in der analogen Gleichung (5) daselbst nur von λ abhing, ist er hier zugleich von β und von ε abhängig. Bei dem transcendenten Charakter von Gl. (3) kann er indessen nur durch eine empirische Näherungsformel als Function dieser drei Grössen ausgedrückt werden auf Grund seiner Berechnung nach obigen Gleichungen für verschiedene Werthe von λ, β und ε, als welche beispielsweise angenommen seien:

$$\lambda = 0 \text{ und } \frac{1}{5},\; \beta = \frac{1}{20} \text{ und } \frac{1}{5},\; \varepsilon = \frac{1}{4},\, \frac{1}{2},\, \frac{3}{4} \text{ und } 1.$$

Die Annahme $\varepsilon = 1$ entspricht einer constanten Schubkraft, also den aus §. 94 bekannten (von β unabhängigen) Werthen von α. In allen diesen Fällen ergiebt sich, ebenso wie bei der Schubkurbel mit constanter Schubkraft, das in der ersten Hälfte der Periode stattfindende Minimum von $f(\varphi)$ als das kleinere, das in der zweiten Hälfte stattfindende Maximum als das grössere, ist also (mit den in §. 94 festgesetzten Bezeichnungen φ_1'', φ_1', φ_2'', φ_2'):

$$\varphi'' = \varphi_1'' \text{ und } \varphi' = \varphi_2'.$$

Ersterer Winkel ist stets kleiner, letzterer (ausser im Falle $\varepsilon = 1$) grösser, als der durch Gl. (10) in §. 93 bestimmte Winkel φ_1, nämlich

für $\lambda = 0$ als $\varphi_1 =$	60^0	90^0	120^0	in jeder,
für $\lambda = \frac{1}{5}$ als $\varphi_1 =$	$65^0\,20'$	$95^0\,41'$	$124^0\,36'$	in der ersten,
	$55^0\,24'$	$84^0\,19'$	$114^0\,40'$	in der zweiten
halben Periode für $\varepsilon =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$.	

1) Für $\lambda = 0$ und $\beta = 0{,}05$ findet man

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	21° 29′	32° 16′	37° 51′	39° 32′
$\varphi' = \varphi_2' =$	103° 10′	122° 23′	135° 11′	140° 28′
$f(\varphi'') =$	— 0,0590	— 0,0872	— 0,1012	— 0,10525
$f(\varphi') =$	0,2390	0,1688	0,1283	0,10525
$\alpha =$	0,2980	0,2560	0,2295	0,2105

Diese Werthe von α können zusammengefasst werden in der Formel:

$$\alpha = 0{,}2105 + (1 - \varepsilon)(0{,}1531 - 0{,}1670\,\varepsilon + 0{,}0856\,\varepsilon^2)$$
$$= 0{,}2105 + 0{,}1531\,(1 - \varepsilon)(1 - 1{,}091\,\varepsilon + 0{,}559\,\varepsilon^2) \quad \ldots \quad (5)$$

2) Für $\lambda = 0$ und $\beta = 0{,}2$ ergiebt sich

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	18° 24′	30° 58′	37° 33′	39° 32′
$\varphi' = \varphi_2' =$	95° 51′	119° 14′	134° 22′	140° 28′
$f(\varphi'') =$	— 0,0507	— 0,0839	— 0,1004	— 0,10525
$f(\varphi') =$	0,3182	0,1882	0,1332	0,10525
$\alpha =$	0,3689	0,2721	0,2336	0,2105

entsprechend dem Ausdrucke:

$$\alpha = 0{,}2105 + (1 - \varepsilon)(0{,}3531 - 0{,}6842\,\varepsilon + 0{,}4488\,\varepsilon^2)$$
$$= 0{,}2105 + 0{,}3531\,(1 - \varepsilon)(1 - 1{,}938\,\varepsilon + 1{,}271\,\varepsilon^2) \quad \ldots \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind zusammen zu schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}2105 + (1 - \varepsilon) f(\beta)\,[1 - f_1(\beta)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta)\,.\,\varepsilon^2] \\ \text{mit} \quad f(\beta) = 0{,}0864 + 1{,}333\,\beta \\ f_1(\beta) = 0{,}808 + 5{,}65\,\beta;\; f_2(\beta) = 0{,}321 + 4{,}75\,\beta \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

3) Im Falle $\lambda = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}05$ ergiebt sich

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	26° 30′	39° 11′	45° 32′	47° 25′
$\varphi' = \varphi_2' =$	96° 31′	114° 48′	127° 42′	132° 35′
$f(\varphi'') =$	— 0,0732	— 0,1074	— 0,1240	— 0,12885
$f(\varphi') =$	0,2708	0,1981	0,1538	0,12885
$\alpha =$	0,3440	0,3055	0,2778	0,2577

$$\alpha = 0{,}2577 + (1 - \varepsilon)(0{,}1389 - 0{,}1038\,\varepsilon + 0{,}0344\,\varepsilon^2)$$
$$= 0{,}2577 + 0{,}1389\,(1 - \varepsilon)(1 - 0{,}747\,\varepsilon + 0{,}248\,\varepsilon^2) \quad \ldots \quad (8)$$

4) Mit $\lambda = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}2$ findet man

für $\varepsilon =$	0,25	0,5	0,75	1
$\varphi'' = \varphi_1'' =$	22° 46′	37° 41′	45° 11′	47° 25′

$\varphi' = \varphi_2' = 89^0\,42'$	$111^0\,52'$	$127^0\ 0'$	$132^0\,35'$
$f(\varphi'') = -0{,}0630$	$-0{,}1034$	$-0{,}1231$	$-0{,}12885$
$f(\varphi') = 0{,}3500$	$0{,}2182$	$0{,}1589$	$0{,}12885$
$\alpha = 0{,}4130$	$0{,}3216$	$0{,}2820$	$0{,}2577$

$$\alpha = 0{,}2577 + (1-\varepsilon)(0{,}3351 - 0{,}6094\,\varepsilon + 0{,}3896\,\varepsilon^2)$$
$$= 0{,}2577 + 0{,}3351\,(1-\varepsilon)(1 - 1{,}819\,\varepsilon + 1{,}163\,\varepsilon^2) \quad \ldots \quad (9).$$

Aus (8) und (9) zusammen folgt für $\lambda = 0{,}2$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}2577 + (1-\varepsilon) f(\beta)\,[1 - f_1(\beta)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta)\,.\,\varepsilon^2) \\ \text{mit} \quad f(\beta) &= 0{,}0735 + 1{,}308\,\beta \\ f_1(\beta) &= 0{,}389 + 7{,}15\,\beta;\ f_2(\beta) = -0{,}057 + 6{,}10\,\beta \end{aligned}\right\} \ldots (10).$$

Endlich ergiebt sich durch Zusammenfassung von Gl. (7) und (10) für alle Fälle, mit Rücksicht zugleich auf §. 94, Gl. (6):

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}2105\,(1 + 0{,}96\,\lambda + 0{,}81\,\lambda^2) + \\ &\quad + (1-\varepsilon) f(\beta,\lambda)\,[1 - f_1(\beta,\lambda)\,.\,\varepsilon + f_2(\beta,\lambda)\,.\,\varepsilon^2] \\ \text{mit} \quad f(\beta,\lambda) &= 0{,}0864 + 1{,}333\,\beta - (0{,}0645 + 0{,}125\,\beta)\,\lambda \\ f_1(\beta,\lambda) &= 0{,}808 + 5{,}65\,\beta - (2{,}095 - 7{,}50\,\beta)\,\lambda \\ f_2(\beta,\lambda) &= 0{,}321 + 4{,}75\,\beta - (1{,}890 - 6{,}75\,\beta)\,\lambda \end{aligned}\right\} \ldots (11).$$

Hiernach ist es leicht, Tabellen für den praktischen Gebrauch zu berechnen, denen die Werthe von α für beliebige Werthe von ε und wenigstens für solche Werthe von β, λ entnommen werden können, die nicht viel $> 0{,}2$ sind. —

Die Berücksichtigung der Schiebermasse M_1 kann in erster Annäherung dadurch geschehen, dass nach §. 92, Gl. (12) gesetzt wird:

$$M = \frac{1}{\delta}\left(\frac{A' - A''}{c^2} - \frac{m' - m''}{2}\right)$$

oder, da nach §. 93, Gl. (3):

$$m' = M_1 \sin^2\varphi'\,(1 + \lambda\cos\varphi')^2$$
$$m'' = M_1 \sin^2\varphi''\,(1 - \lambda\cos\varphi'')^2$$

ist, auch dadurch, dass statt Gl. (4) gesetzt wird:

$$M = \frac{\alpha}{\delta}\,\frac{Q\pi r}{c^2} - \frac{\alpha_1}{\delta}\,M_1 \quad \ldots \quad (12)$$

mit den wie oben bestimmten Werthen von α und mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,[\sin^2\varphi'(1 + \lambda\cos\varphi')^2 - \sin^2\varphi''(1 - \lambda\cos\varphi'')^2] \quad . . (13).$$

Für $\varepsilon = 1$ ist $\varphi' + \varphi'' = 180^0$, also $\sin\varphi' = \sin\varphi''$, $\cos\varphi' = -\cos\varphi''$ und somit $\alpha_1 = 0$. Dagegen findet man für andere Werthe von ε die in folgender Zusammenstellung enthaltenen Werthe von α_1.

		$\varepsilon = 0{,}25$	$\varepsilon = 0{,}5$	$\varepsilon = 0{,}75$
$\lambda = 0$	$\beta = 0{,}05$	0,4070	0,2141	0,0602
$\lambda = 0$	$\beta = 0{,}2$	0,4450	0,2484	0,0698
$\lambda = 0{,}2$	$\beta = 0{,}05$	0,4043	0,2033	0,0528
$\lambda = 0{,}2$	$\beta = 0{,}2$	0,4512	0,2365	0,0611

§. 98. **Zweifache Schubkurbel mit gleichen veränderlichen Schubkräften.**

Hiermit wird ein Fall vorausgesetzt, der sich von dem in §. 95 behandelten dadurch unterscheidet, dass die Schubkräfte der mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle verbundenen zwei gleichen Schubkurbelgetriebe nicht constant, sondern in der Weise veränderlich sind, wie es im vorigen Paragraph für die einfache Schubkurbel angenommen wurde. Mit den Bezeichnungen von §. 95, unter ω insbesondere wieder den Voreilungswinkel des zweiten Getriebes vor dem ersten verstanden, ist dann auch hier ebenso wie dort die vom Anfange einer Periode (vom Durchgange des ersten Getriebes durch die obere Todlage) an gerechnete Arbeitsumme aller Kräfte:

$$A = [f(\varphi) + f(\psi) - f(\omega)]\, Q\pi r = [F(\varphi) - f(\omega)]\, Q\pi r,$$

und die dem Ungleichförmigkeitsgrade δ entsprechende, auf die Kurbelzapfen (auf den Abstand r von der Axe der Kurbelwelle) reducirte rotirende Masse bei Abstraction vom Einflusse der Schiebermassen:

$$M = \frac{\alpha'}{\delta}\,\frac{2\,Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha' = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

unter $F(\varphi')$ das grösste Maximum, $F(\varphi'')$ das kleinste Minimum von $F(\varphi) = f(\varphi) + f(\psi)$ verstanden. Nur hat jetzt $f(\varphi)$ die durch Gl. (2) im vorigen Paragraph bestimmte, weniger einfache Bedeutung und ebenso

$$f(\psi) = f(\omega + \varphi) \text{ resp. } f(\omega + \varphi - \pi),$$

jenachdem $\omega + \varphi < \pi$ oder $> \pi$ ist. Auch ist es bei der somit ziemlich complicirten Form von $F(\varphi)$ jetzt vorzuziehen, die Maxima und Minima dieser Function durch unmittelbares Probiren zu ermitteln, indem die Werthe derselben für solche Configurationen während einer Periode ermittelt werden, die mit gleichen Intervallen des Drehungswinkels φ auf einander folgen. Die Annahme dieser Intervalle zunächst etwa $= 10^0$ genügt, um diejenigen derselben zu erkennen, in denen φ' und φ'' enthalten sind, wonach durch Interpolation mit kleineren Differenzen von etwa 1 bis 2^0 innerhalb fraglicher Intervalle die Werthe $F(\varphi')$ und $F(\varphi'')$ selbst mit genügender Annäherung zu finden sind. —

Wenn wieder, wie es gewöhnlich der Fall ist, $\omega = 90^0$ und zunächst $\lambda = 0$ angenommen wird, so findet zwischen oberer und unterer Todlage, somit zwischen erster und zweiter Hälfte der Periode kein Unterschied statt; ausserdem tauschen in den zwei Hälften jeder halben Periode die Functionen $f(\varphi)$ und $f(\psi)$ nur ihre Werthe um, so dass die Berechnung von $F(\varphi) = f(\varphi) + f(\psi)$ nur für eine Vierteldrehung der Kurbelwelle nöthig ist. Beispielsweise für $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$ entsprechen folgende Werthe dieser Functionen den beigesetzten Winkeln φ.

$\varphi =$	0	10°	20°	26°	28°	30°	40°
$f(\varphi) =$	0	−0,0424	−0,0587	−0,0565	−0,0538	−0,0502	−0,0189
$f(\psi) =$	0,2287	0,2384	0,2365	0,2305	0,2277	0,2246	0,2041
$F(\varphi) =$	0,2287	0,1960	0,1778	0,1740	0,1739	0,1744	0,1852

$\varphi =$	50°	60°	70°	72°	73°	80°	90°
$f(\varphi) =$	0,0327	0,1012	0,1640	0,1738	0,1783	0,2049	0,2287
$f(\psi) =$	0,1760	0,1457	0,0999	0,0909	0,0863	0,0528	0
$F(\varphi) =$	0,2087	0,2469	0,2639	0,2647	0,2646	0,2577	0,2287

Daraus ist zu schliessen: $F(\varphi') = 0,2647$ für φ' nahe $= 72^0$,
$F(\varphi'') = 0,1739$ für φ'' nahe $= 28^0$,

somit $\alpha' = 0,0454$ für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$.

Durch die Aenderung des Verhältnisses β wird das Aenderungsgesetz der Function $F(\varphi)$ voraussichtlich nur unerheblich geändert, so dass es bei anderen Werthen von β und übrigens denselben Werthen von ω, λ, ε genügt, den Verlauf dieser Function nur in der Nähe von $\varphi = 28^0$ und $\varphi = 72^0$ zu untersuchen, um ihr Minimum und Maximum zu finden. So ergiebt sich beispielsweise für $\beta = 0,2$:

$\varphi =$	25°	28°	29°	30°	72°	73°	74°
$f(\varphi) =$	−0,0444	−0,0375	−0,0346	−0,0315	0,2601	0,2654	0,2703
$f(\psi) =$	0,2920	0,2839	0,2810	0,2781	0,0967	0,0915	0,0863
$F(\varphi) =$	0,2476	0,2464	0,2464	0,2466	0,3568	0,3569	0,3566

$F(\varphi') = 0,3569$ für φ' nahe $= 73^0$,
$F(\varphi'') = 0,2463$ für φ'' nahe $= 28,5^0$,
$\alpha' = 0,0553$ für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,2$.

Wenn λ nicht $= 0$ ist, so sind auch die beiden Todlagen nicht gleichwerthig, indem vielmehr das doppelte Vorzeichen des Gliedes mit λ im

Ausdrucke von Φ (Gl. 2, §. 97) ein verschiedenes Aenderungsgesetz von $F(\varphi)$ in beiden Hälften der Periode bedingt. Es ist dann diese Function durch die ganze Periode, also für eine volle Umdrehung der Kurbelwelle für hinlänglich viele in gleichen Intervallen auf einander folgende (in der ersten Hälfte der Periode von der oberen, in der zweiten von der unteren Todlage an gerechnete) Winkel φ zu berechnen, um ihren Verlauf vollständig zu übersehen. So ergiebt sich beispielsweise für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0,2$, $\varepsilon = 0,25$ und $\beta = 0,05$ die folgende Uebersicht:

$\varphi =$	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$f(\varphi) =$	0	−0,0450	−0,0689	−0,0720	−0,0548	−0,0183	0,0360	0,1021	0.1523
$f(\psi) =$	0,1851	0,2034	0,2094	0,2046	0,1902	0,1671	0,1361	0,0976	0,0522
$F(\varphi) =$	0,1851	0,1584	0;1405	0,1326	0,1354	0,1488	0,1721	0,1997	0,2045

$\varphi =$	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
$f(\varphi) =$	0,1851	0,2034	0,2094	0,2046	0,1902	0,1671	0,1361	0,0976	0,0522
$f(\psi) =$	0	−0,0397	−0,0485	−0,0285	0,0170	0,0837	0,1617	0,2176	0,2513
$F(\varphi) =$	0,1851	0,1637	0,1609	0,1761	0.2072	0,2508	0,2978	0,3152	0,3035

$\varphi =$	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$f(\varphi) =$	0	−0,0397	−0,0485	−0,0285	0,0170	0,0837	0,1617	0,2176	0,2513
$f(\psi) =$	0,2677	0,2703	0,2616	0,2435	0,2175	0,1847	0,1460	0,1021	0,0533
$F(\varphi) =$	0,2677	0,2306	0,2131	0,2150	0,2345	0,2684	0,3077	0,3197	0,3046

$\varphi =$	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°
$f(\varphi) =$	0,2677	0,2703	0,2616	0,2435	0,2175	0,1847	0,1460	0,1021	0,0533
$f(\psi) =$	0	−0,0450	−0,0689	−0,0720	−0,0548	−0,0183	0,0360	0,1021	0,1523
$F(\varphi) =$	0,2677	0,2253	0,1927	0,1715	0,1627	0,1664	0,1820	0,2042	0,2056

In jedem Viertel der Periode giebt es wieder, wie man sieht, ein Minimum und ein Maximum von $F(\varphi)$, doch sind jetzt die vier Minima und ebenso die vier Maxima verschieden, und zwar ist das kleinste Minimum im ersten Viertel zwischen $\varphi = 30^0$ und 40^0, das grösste Maximum im dritten Viertel zwischen $\varphi = 60^0$ und 70^0 zu vermuthen. In der That kann nach folgender Berechnung von Zwischenwerthen:

$\varphi =$	30°	32°	34°	68°	69°	70°
$f(\varphi) =$	— 0,0720	— 0,0701	— 0,0675	0,2083	0,2131	0,2176
$f(\psi) =$	0,2046	0,2024	0,1999	0,1113	0,1067	0,1021
$F(\varphi) =$	0,1326	0,1323	0,1324	0,3196	0,3198	0,3197

$$F(\varphi') = 0{,}3198 \text{ für } \varphi' = \varphi_2' \text{ nahe } = 69^0,$$
$$F(\varphi'') = 0{,}1322 \text{ für } \varphi'' = \varphi_1'' \text{ nahe } = 33^0,$$

also $\alpha' = 0{,}0938$ für $\omega = 90^0$, $\lambda = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}25$ und $\beta = 0{,}05$ gesetzt werden.

Unter übrigens gleichen Umständen, aber mit $\beta = 0{,}2$ findet man:

	Erste Hälfte der Periode.			Zweite Hälfte der Periode.		
$\varphi =$	35°	36°	37°	68°	69°	70°
$f(\varphi) =$	— 0,0452	— 0,0422	— 0,0390	0,2955	0,3008	0,3058
$f(\psi) =$	0,2514	0,2484	0,2454	0,1182	0,1131	0,1079
$F(\varphi) =$	0,2062	0,2062	0,2064	0,4137	0,4139	0,4137

und ist daraus zu schliessen:

$$F(\varphi') = 0{,}4139 \text{ für } \varphi' = \varphi_2' \text{ nahe } = 69^0,$$
$$F(\varphi'') = 0{,}2061 \text{ für } \varphi'' = \varphi_1'' \text{ nahe } = 35{,}5^0,$$
$$\alpha' = 0{,}1039 \text{ für } \omega = 90^0,\ \lambda = 0{,}2,\ \varepsilon = 0{,}25 \text{ und } \beta = 0{,}2.$$

Folgende Zusammenstellung enthält die Hauptresultate dieser Rechnungen für $\omega = 90^0$ und zugleich die Werthe von α', die nach §. 95 der Voraussetzung $\varepsilon = 1$ (unabhängig von β) entsprechen. In der vorletzten Columne sind die Werthe des Coefficienten α nach §. 97 hinzugefügt, und in der letzten die Verhältnisse von α' zu α, die wieder erkennen lassen, in welchem Verhältnisse die rotirende Masse dieser zweifachen Schubkurbel unter sonst gleichen Umständen behufs eines gegebenen Ungleichförmigkeitsgrades δ kleiner sein darf, als sie für die zwei einzelnen Schubkurbelgetriebe zusammen sein müsste, wenn dieselben unabhängig von einander mit besonderen Schwungrädern angeordnet würden.

λ	ε	β	α'	α	$\frac{\alpha'}{\alpha}$
0	0,25	0,05	0,0454	0,2980	0,152
0	0,25	0,2	0,0553	0,3689	0,150
0	1	—	0,0211	0,2105	0,100
0,2	0,25	0,05	0,0938	0,3440	0,273
0,2	0,25	0,2	0,1039	0,4130	0,252
0,2	1	—	0,0711	0,2577	0,276

Um α' oder $\frac{\alpha'}{\alpha}$ als empirische Functionen von λ, ε und β auszudrücken, sind diese 6 Gruppen zusammengehöriger Werthe kaum ausreichend, doch können sie zu schätzungsweiser Interpolation für andere Fälle dienen.

§. 99. Einfache Schubkurbel, deren Schubkraft für den Hin- und Hergang constant, aber verschieden gross ist.

In den vorhergehenden Paragraphen 93—98 wurde eine Schubkraft vorausgesetzt, die für die Bewegung des Schiebers im einen Sinne ebenso gross, bezw. ebenso veränderlich ist, wie für die Bewegung im anderen Sinne. Nicht selten kann es sich indessen auch anders verhalten, z. B. im Falle eines Kurbelschubgetriebes, dessen Schieber (etwa als Sägegatter) bei der Bewegung im einen Sinne einen grösseren Widerstand zu überwinden hat, als bei der umgekehrten Bewegung. Bei der folgenden Untersuchung dieses Falles für die einfache Schubkurbel werde indessen wieder ausgegangen von ihrer Verwendung als Schubkurbelgetriebe, und es sei

P_1 die als constant vorausgesetzte Grösse der Schubkraft für den Hingang des Schiebers, entsprechend der Bewegung des Getriebes von der oberen zur unteren Todlage oder der ersten Hälfte der Periode,

P_2 die gleichfalls constante Grösse der Schubkraft für den Hergang des Schiebers, entsprechend der Bewegung des Getriebes von der unteren zur oberen Todlage oder der zweiten Hälfte der Periode.

Setzt man dann

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= (1-p)\,P \text{ und } P_2 = (1+p)\,P, \\ \text{so ist} \quad P &= \frac{P_1+P_2}{2} \text{ und } p = \frac{P_2-P_1}{P_2+P_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1),$$

und folgt mit übrigens den früheren Buchstabenbezeichnungen aus der Bedingung des Beharrungszustandes:

$$(P_1+P_2)\,2\,r = Q\,.\,2\,\pi r$$

$$\frac{P_1+P_2}{2} = P = \frac{\pi}{2}\,Q \quad \ldots\ldots (2)$$

übereinstimmend mit Gl. (6), §. 93, bei veränderter Bedeutung von P. Hiernach und mit Rücksicht auf die Bedeutung von Φ nach §. 93, Gl. (5) ist nun die vom Anfange der Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte für den Hingang:

$$A_1 = P_1\,r\,\Phi - Q\,r\,\varphi = \left(\frac{P_1}{2\,P}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\,\pi\,r = \left(\frac{1-p}{2}\,\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\,\pi\,r.$$

Für $\varphi = \pi$ ist $\Phi = 2$, also $A_1 = -\,p\,Q\,\pi\,r$, und deshalb die gleichfalls vom Anfange der ganzen Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte für den Hergang:

$$A_2 = -p\,Q\pi r + P_2 r\,\Phi - Q\,r\,\varphi = \left(-p + \frac{P_2}{2P}\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r$$

$$= \left(-p + \frac{1+p}{2}\Phi - \frac{\varphi}{\pi}\right) Q\pi r.$$

Durch Einsetzung von $\Phi = 1 - \cos\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi$, und zwar im Ausdrucke von A_1 mit dem oberen, im Ausdrucke von A_2 mit dem unteren Vorzeichen des Gliedes mit λ, ergiebt sich auch:

$$A_1 = \left[\frac{1-p}{2} - \frac{1-p}{2}\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}\right] Q\pi r,$$

$$A_2 = \left[\frac{1-p}{2} - \frac{1+p}{2}\left(\cos\varphi - \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi}\right] Q\pi r,$$

überhaupt also die vom Anfange der Periode an gerechnete Arbeitsumme der Kräfte:

$$A = f(\varphi) \,.\, Q\pi r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit
$$f(\varphi) = \frac{1-p}{2} - \frac{1\mp p}{2}\left(\cos\varphi \pm \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right) - \frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Dieser Ausdruck von $f(\varphi)$, worin die oberen Zeichen für den Hingang (die erste Hälfte der Periode), die unteren für den Hergang gelten, geht, wie es sein muss, für $p = 0$ in den Ausdruck (3), §. 94, über.

Wenn nun das Verhältniss der Schiebermasse M_1 zu der auf den Kurbelzapfen reducirten rotirenden Masse M ein selbst in Vergleich mit dem Ungleichförmigkeitsgrade δ kleiner Bruch ist und deshalb die Kurbellagen, die den Maximal- und Minimalwerthen der Geschwindigkeit des Kurbelzapfens (deren Mittelwerth $= c$ ist) entsprechen, nach §. 92 gemäss der Gleichung

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0$$

bestimmt werden können, so ergeben sich die betreffenden Winkel φ nach Gl. (3) und (4) als Wurzeln der Doppelgleichung:

$$(1\mp p)\left(\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) = \frac{2}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

die sich von Gl. (1) in §. 94 durch den Factor $(1\mp p)$ auf der linken Seite unterscheidet. In jeder Hälfte der Periode giebt es ein Maximum und ein Minimum von $f(\varphi)$, und wenn insbesondere wieder φ' und φ'' die dem grössten Maximum resp. kleinsten Minimum entsprechenden Wurzeln von Gl. (5) sind, so folgt aus Gl. (12) in §. 92 bei Abstraction vom Einflusse der Schiebermasse:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \text{ mit } \alpha = f(\varphi') - f(\varphi'') \ldots\ldots\ldots (6).$$

Indem aber jetzt die betreffenden ausgezeichneten Kurbelstellungen einander nicht in Beziehung auf den Durchmesser B_0B_1, Fig. 104, des Kurbelkreises symmetrisch gegenüber liegen, sind m' und m'' nicht einander gleich, so dass die Schiebermasse M_1 in erster Annäherung zu berücksichtigen ist durch die Gleichung:

$$M = \frac{\alpha}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} - \frac{\alpha_1}{\delta} M_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

mit
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}[\sin^2\varphi'(1 \mp \lambda\cos\varphi')^2 - \sin^2\varphi''(1 \mp \lambda\cos\varphi'')^2] \ldots . (8)$$

nach §. 93, Gl. (3). Die zwei oberen und zwei unteren Vorzeichen der Glieder mit λ gehören hier nicht nothwendig zusammen, indem vielmehr an jeder Stelle das Zeichen — oder + zu nehmen ist, jenachdem der betreffende Winkel φ' resp. φ'' der ersten oder zweiten Hälfte der Periode angehört, also vom oberen oder unteren Todpunkte aus gerechnet wird.

Ist $\frac{M_1}{M}$ nicht viel $< \delta$, so ist auch das für solchen Fall in §. 94 angegebene Verfahren zur endgültigen Bestimmung von M nur mit Rücksicht auf die jetzt erweiterte Bedeutung von $f(\varphi)$ zu modificiren. Nach den Gleichungen (8)—(11) daselbst ist also obige Doppelgleichung (5) zu ersetzen durch:

$$(1 \mp p)\left(\sin\varphi \mp \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{\alpha\mu}{\delta}[\sin 2\varphi \mp \lambda\sin\varphi(1 + 3\cos 2\varphi)] = \frac{2}{\pi} \;. (9)$$

mit $\mu = \frac{M_1}{M}$, unter M hier den durch Gl. (6) bestimmten Näherungswerth verstanden, und ist dann ferner mit

$$f_1(\varphi) = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \mp \lambda\sin\varphi\sin 2\varphi \ldots\ldots\ldots (10)$$

und
$$F(\varphi) = f(\varphi) - \frac{\alpha\mu}{2\delta} f_1(\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

der corrigirte Werth von M:

$$M = \frac{F(\varphi') - F(\varphi'')}{\delta} \frac{Q\pi r}{c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

§. 100. Getriebe mit unstetig veränderlichen Kräften und bewegten Massen.

Während die bisher besprochenen Anwendungen der allgemeinen Erörterungen von §. 92 sich nur auf Schubkurbelmechanismen bezogen, werde

schliesslich noch ein Getriebe irgend welcher Art, dabei aber vorausgesetzt, dass die beständig wirkende treibende Kraft nur zeitweilig einen Widerstand (d. h. einen hier einzig in Betracht kommenden Nutzwiderstand) zu überwinden hat, wie es z. B. bei Hammer-, Poch- und Walzwerken, Lochmaschinen und dergleichen Arbeitsmaschinen vorkommt. Dabei kann es ausserdem der Fall sein, dass mit der plötzlichen Einwirkung des Widerstandes zugleich (wie bei Hammer- und Pochwerken) ein plötzlicher Zuwachs an bewegter Masse, somit ein Stoss mit plötzlicher Geschwindigkeitsabnahme verbunden ist. Unter solchen Umständen sei der Weg des (in unveränderlichem Abstande r von der Axe der Schwungradwelle gelegenen) Reductionspunktes während einer Periode $= a + b$, und zwar

a der mit Ueberwindung des Widerstandes zurückgelegte Theil dieses Weges (erster Theil der Periode),

b der andere Theil (Leerlauf),

P die im Reductionspunkte nach dessen Bewegungsrichtung beständig angreifend gedachte und als constant vorausgesetzte treibende Kraft,

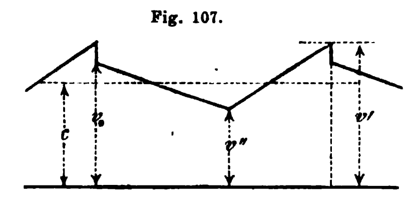
Q der gleichfalls constante und im Reductionspunkte entgegen seiner Bewegungsrichtung angreifend gedachte (auf denselben reducirte), aber nur während des ersten Theiles der Periode wirksame Widerstand,

M die unveränderliche (zumeist vom Schwungrade herrührende) auf den Abstand r von der Axe der Schwungradwelle reducirte rotirende Masse,

m die ebenso verstandene, aber nur während des ersten Theiles jeder Periode zugleich mit dem Widerstande Q hinzukommende reducirte Masse.

Das diesen Voraussetzungen entsprechende Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit v des Reductionspunktes ist durch Fig. 107 dargestellt, indem darin die Zeiten als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten abgetragen sind.

Fig. 107.



Nachdem zu Ende des Leerlaufs die Geschwindigkeit am grössten $= v'$ geworden ist, wird sie durch den Stoss der Masse M gegen die ruhende Masse m plötzlich auf v_0 erniedrigt, um dann im ersten Theile der neuen Periode noch weiter bis zum Minimum v'' abzunehmen und im zweiten Theile wieder bis v' zu wachsen; im einen wie im anderen Falle sind die bewegende Kraft und die bewegte Masse zeitweilig constant, ist also die Bewegung im ersten Theile der Periode gleichförmig verzögert, im zweiten gleichförmig beschleunigt, entsprechend je einem geraden Stücke der Geschwindigkeitslinie, Fig. 107.

Von den genannten Grössen seien gegeben: a, b, Q, m, ferner die mittlere Geschwindigkeit des Reductionspunktes $= c$ und der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung der Schwungradwelle $= \delta$; unbekannt sind: P, M, v_0, v'', v'. Zur Bestimmung dieser 5 Unbekannten, von denen übrigens die drei letzten nur als Hülfsgrössen zur Bestimmung von P und M in Betracht kommen, sind 5 Gleichungen erforderlich, die sich wie folgt ergeben.

Zunächst giebt die Gleichung der lebendigen Kraft, angewendet auf den ersten und auf den zweiten Theil der Periode:

$$(M + m)(v''^2 - v_0^2) = 2(P - Q)a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$M(v'^2 - v''^2) = 2Pb \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Ferner entspricht dem Umstande, dass die Bewegungsgrösse durch den Stoss keine Aenderung erfährt, die Gleichung:

$$(M + m)v_0 = Mv' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und der Definition des Ungleichförmigkeitsgrades die Gleichung:

$$v' - v'' = \delta c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Endlich wird mit Rücksicht darauf, dass die Bewegung im ersten Theile der Periode gleichförmig verzögert, im zweiten gleichförmig beschleunigt ist, die Grösse c als mittlere Geschwindigkeit charakterisirt durch die Gleichung:

$$\frac{2a}{v_0 + v''} = \frac{2b}{v'' + v'} = \frac{a + b}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

welche, indem sie zwei Ausdrücke der Periodendauer einander gleich setzt, als die dem vorliegenden Falle entsprechende Form von Gl. (4) in §. 92 zu betrachten ist.

Durch Addition von Gl. (1) und (2) ergiebt sich mit Rücksicht auf Gl. (3):

$$2P(a + b) - 2Qa = Mv'^2 - (M + m)v_0^2 + mv''^2$$

$$= \left(M - \frac{M^2}{M + m}\right)v'^2 + mv''^2$$

$$P(a + b) = Qa + \frac{Mm}{M + m}\frac{v'^2}{2} + m\frac{v''^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (6),$$

wie auch unmittelbar einleuchtet, da $\frac{Mm}{M + m}\frac{v'^2}{2}$ der Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoss und $m\frac{v''^2}{2}$ die lebendige Kraft ist, womit die Masse m zu Ende des ersten Theiles jeder Periode unabhängig vom Getriebe ihre Bewegung fortsetzt.

Mit $\mu = \frac{m}{M}$ ist ferner nach Gl. (3):

$$v' = (1 + \mu)\, v_0$$

und mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung nach Gl. (4):

$$v'' = v' - \delta c = \left(1 + \mu - \delta \frac{c}{v_0}\right) v_0 = (1 + \mu - \delta)\, v_0.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke von v' und v'' in Gl. (5) giebt:

$$\frac{2a}{2 + \mu - \delta} \frac{1}{v_0} + \frac{2b}{2 + 2\mu - \delta} \frac{1}{v_0} = \frac{a + b}{c},$$

also wieder mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung unter der Voraussetzung, dass μ ein höchstens mit δ vergleichbarer kleiner Bruch ist:

$$\frac{v_0}{c} = \frac{a}{a+b}\left(1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\delta}{2}\right) + \frac{b}{a+b}\left(1 - \mu + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{a + 2b}{a+b} \frac{\mu}{2} \quad (7),$$

somit $$\frac{v'}{c} = (1 + \mu) \frac{v_0}{c} = 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{a}{a+b} \frac{\mu}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und $$\frac{v''}{c} = \frac{v'}{c} - \delta = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{a}{a+b} \frac{\mu}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Indem aus diesen zwei letzten Gleichungen

$$v' + v'' = 2c\left(1 + \frac{a}{a+b} \frac{\mu}{2}\right)$$

folgt, ergiebt sich daraus durch Multiplication mit Gl. (4):

$$v'^2 - v''^2 = 2\,\delta c^2 \left(1 + \frac{a}{a+b} \frac{\mu}{2}\right)$$

und somit nach Gl. (2):

$$M = \frac{Pb}{\delta c^2}\left(1 - \frac{a}{a+b} \frac{\mu}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Endlich folgt aus (6) mit Rücksicht auf (8) und (9) und indem mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\frac{M}{M + m} = 1 - \mu$$

gesetzt, überhaupt die Producte kleiner Grössen gegen 1 vernachlässigt werden:

$$P(a+b) = Qa + \frac{mc^2}{2}\left[(1-\mu)\left(1+\delta+\frac{a}{a+b}\mu\right)+1-\delta+\frac{a}{a+b}\mu\right]$$

$$= Qa + mc^2\left(1-\frac{\mu}{2}+\frac{a}{a+b}\mu\right)$$

$$= Qa + mc^2\left(1+\frac{a-b}{a+b}\frac{\mu}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Wenn vorläufig $\mu = 0$ gesetzt wird, ergiebt sich aus (11) ein erster Näherungswerth von P und damit aus (10) ein solcher von M; mit dem diesem letzteren entsprechenden Werthe von μ können dann aus (11) und (10) corrigirte Werthe von P und M gefunden und nöthigenfalls wiederholt in gleicher Weise corrigirt werden.

In manchen der hierher gehörigen Fällen (z. B. bei Walzwerken. Lochmaschinen und dergl.) kann übrigens ohne in Betracht kommenden Fehler endgültig

$$m = 0, \quad \text{also } \mu = 0$$

gesetzt werden, nach Gl. (10) und (11) folglich:

$$P = \frac{a}{a+b}Q \text{ und } M = \frac{Pb}{\delta c^2} = \frac{ab}{a+b}\frac{Q}{\delta c^2} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

§. 101. Bestimmung der Dimensionen eines Schwungrades.

Nachdem im Vorhergehenden gezeigt wurde, wie die auf den Abstand r von der Axe der Schwungradwelle reducirte rotirende Masse M eines Getriebes, bezw. einer zusammengesetzten Maschine gemäss einem gegebenen Ungleichförmigkeitsgrade δ der rotirenden Bewegung dieser Welle bestimmt werden kann, handelt es sich noch darum, die Dimensionen des Schwungrades der Masse M entsprechend zu wählen. Ist aber M_0 der Theil von M, der event. von anderen rotirenden Massen herrührt. somit $(M - M_0) r^2$ die erforderliche Grösse des Trägheitsmoments des Schwungrades selbst für seine Axe, so kommt die Aufgabe darauf hinaus. dieses Trägheitsmoment $= J$ auch als Function der Dimensionen des Schwungrades auszudrücken, um dann in der Gleichung:

$$J = (M - M_0) r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die verlangte Bedingungsgleichung für die Wahl fraglicher Dimensionen zu erhalten.

J besteht aus den Trägheitsmomenten des Schwungringes und des Armsystems sammt Nabe. Was zunächst den Schwungring betrifft, so sei

m seine Masse,

μ seine specifische Masse (Masse der Volumeinheit),

R der Radius seiner Mittellinie,

F der Flächeninhalt seines Querschnittes,

dF ein Element von F in der Entfernung x von der Geraden AA, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehend mit der Axe des Schwungrades parallel ist.

Dann ist, wenn x algebraisch verstanden, nämlich positiv oder negativ gesetzt wird, je nachdem die Entfernung des Flächenelements dF von der Radaxe $> R$ oder $< R$ ist, das Trägheitsmoment des Ringes

$$= \int \mu \, . \, 2\pi (R + x) \, dF \, . \, (R + x)^2 = \mu \, . \, 2\pi \int (R + x)^3 \, dF$$

$$= \mu \, . \, 2\pi (R^3 F + 3 R^2 \int x dF + 3 R \int x^2 dF + \int x^3 dF),$$

alle Integrale ausgedehnt gedacht über den ganzen Querschnitt. Indem aber gemäss den Eigenschaften des Schwerpunktes

$$\int x dF = 0$$

und, falls der Querschnitt des Ringes, wie üblich, in Bezug auf seine Schwerpunktsaxe AA symmetrisch ist, auch

$$\int x^3 dF = 0$$

ist, ergiebt sich mit

$$\int x^2 dF = F f^2$$

= dem Trägheitsmoment des Ringquerschnittes in Bezug auf jene Symmetrieaxe AA das Trägheitsmoment des Ringes für seine Axe auch

$$= \mu \, . \, 2\pi R F (R^2 + 3 f^2) = m (R^2 + 3 f^2) \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Ist a die grösste radiale, b die grösste axiale Dimension von F, so ist insbesondere für einen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{rechteckigen Querschnitt:} & f^2 = \dfrac{a^3 b}{12} : ab = \dfrac{a^2}{12} \\[2ex] \text{elliptischen Querschnitt:} & f^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{a}{2}\right)^3 \dfrac{b}{2} : \pi \dfrac{a}{2}\dfrac{b}{2} = \dfrac{a^2}{16} \end{array}\right\} \quad \ldots (3).$$

Was die Arme des Schwungrades betrifft, so mögen sie der Einfachheit wegen wie prismatische Stäbe in Rechnung gebracht werden, die sich (behufs Berücksichtigung des Einflusses der Nabe) bis zur Radaxe erstrecken; der dadurch begangene Fehler kommt nicht in Betracht in Vergleich mit dem oft viel grösseren, der durch Vernachlässigung oder wenigstens nur ungefähre Schätzung der oben mit M_0 bezeichneten

Masse begangen zu werden pflegt und als Consequenz der auch nur angenähert zutreffenden Berechnungsweise von M gerechtfertigt ist. Wird dann mit

m_1 die Masse eines Armes,

μ_1 seine specifische Masse,

$R_1 = R - \frac{a}{2}$ die der obigen Auffassung entsprechende Länge;

F_1 der Flächeninhalt seines Querschnittes bezeichnet, ferner mit

dF_1 ein Flächenelement im Abstande y von der mit der Radaxe parallelen Schwerpunktsaxe A_1A_1 des Querschnittes, dessen Entfernung von der Radaxe $= x$ ist, und mit

$F_1 f_1^2 = \int y^2 dF_1$ das Trägheitsmoment des Armquerschnittes für die Axe A_1A_1, so ergiebt sich das Trägheitsmoment des Armes für die Radaxe

$$= \int\int \mu_1 dF_1 dx (x^2 + y^2) = \mu_1 \int dF_1 \int x^2 dx + \mu_1 \int dx \int y^2 dF_1$$

$$= \mu_1 \frac{R_1^3}{3} \int dF_1 + \mu_1 F_1 f_1^2 \int dx = m_1 \left(\frac{R_1^2}{3} + f_1^2\right) \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

mit $m_1 = \mu_1 F_1 R_1$. Nach (3) ist dabei wieder im Falle eines

$$\left.\begin{array}{l} \text{rechteckigen Querschnittes: } f_1^2 = \frac{h^2}{12} \\ \text{elliptischen Querschnittes: } f_1^2 = \frac{h^2}{16} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

unter h die Armbreite, d. i. die rechtwinkelig zur Radaxe gemessene grösste Querschnittsdimension verstanden.

Ist also $G = mg$ das Gewicht des Schwungringes und αG das Gewicht aller Arme sammt Nabe, so folgt aus Gl. (2) und (4) das Trägheitsmoment des ganzen Schwungrades:

$$J = \frac{G}{g}\left[R^2 + 3f^2 + \frac{\alpha}{3}(R_1^2 + 3f_1^2)\right] \quad \ldots \ldots \ldots (6),$$

wofür in der Regel ohne in Betracht kommenden Fehler gesetzt werden kann:

$$J = \frac{G}{g} R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Wenn durch Gleichsetzung dieses Ausdruckes mit dem Ausdrucke (1) für angenommene Werthe von R und α das Gewicht G des Schwungringes gefunden ist, so ergiebt sich sein Querschnitt F aus der Gleichung:

$$G = 2\pi R F \gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8),$$

unter γ sein specifisches Gewicht verstanden.

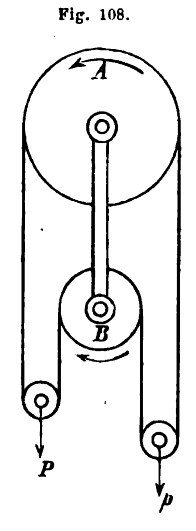


III. Accumulatoren.

§. 102. Beispiele von Gewichts- und Federaccumulatoren.

Allgemein bekannte Beispiele des Falles von beständig andauernder Ueberwindung eines nahe gleichförmigen Widerstandes durch eine Triebkraft, die nur kurze Zeit hindurch nach langen Intervallen wirksam ist, gewähren die üblichen Uhrwerke, wobei es sich in der That darum handelt, die beim Aufziehen der Uhr geleistete Arbeit einer gewissen Triebkraft (hier gewöhnlich einer Muskelkraft) so anzusammeln, dass sie zur Ueberwindung des Bewegungswiderstandes der Uhr bis zu wiederholtem Aufziehen disponibel bleibt. Soll dieser Zweck durch einen Gewichtsaccumulator und zwar mit der Nebenbedingung erreicht werden, dass auch während des Aufziehens die gleichmässige Wirkung der Triebkraft keine Unterbrechung erleidet, so kann es beispielsweise durch das in Fig. 108 skizzirte Rollengetriebe geschehen, bestehend ausser dem festgestellten Gliede (Uhrgestell) aus den um parallele horizontale Axen drehbaren Rollen A, B und einer ohne relative Gleitung darüber hin laufenden endlosen Schnur, in deren abwärts reichenden Schlingen vermittels kleiner loser Rollen einerseits ein grösseres Gewicht P, andererseits ein nur zur Anspannung (und event. zur Verhinderung des Gleitens) der Schnur dienendes kleines Gewicht p hängt. Das Aufziehen der Uhr geschieht durch Drehung der Rolle B im Sinne des beigesetzten Pfeiles, wodurch das Gewicht P gehoben wird unter entsprechendem Niedergange von p; durch den Ueberschuss der Arbeit des nach dem Aufziehen allmählig wieder sinkenden Gewichtes P über die Arbeit des entsprechend hinaufgehenden Gewichtes p kann dann, da B durch ein Gesperre an der Drehung im umgekehrten Sinne des Pfeiles verhindert ist, die Rolle A im Sinne des ihr eingeschriebenen Pfeiles entgegen einem Bewegungswiderstande gedreht werden. Bei einer Taschenuhr wird derselbe Zweck durch einen Federaccumulator erreicht, durch eine Spiralfeder nämlich, die in einem cylindrischen Gehäuse, dem Federhause, mit ihrem äusseren Ende an diesem, mit dem inneren dagegen an einer Welle befestigt ist,

Fig. 108.



um welche coaxial das Federhaus sich drehen kann, während die Welle selbst in Folge eines mit ihr verbundenen Gesperres nur in einem Sinne drehbar ist. Wird sie in diesem Sinne beim Aufziehen der Uhr gedreht, so wird dadurch die Windungszahl der Spiralfeder vergrössert. diese selbst stärker gespannt, und nimmt dann beim Ablaufen der Uhr diese Spannung nach und nach ab, indem das Federhaus sich langsam in demselben Sinne dreht, in welchem die mit ihm coaxiale Welle beim Aufziehen schnell gedreht wurde.

Handelt es sich um eine Maschine im engeren Sinne des Wortes, bei der nicht nur ein Bewegungswiderstand, sondern zugleich ein Nutzwiderstand, namentlich ein solcher von beträchtlicherer Grösse zu überwinden ist, so wäre ein Federaccumulator von der zuletzt beschriebenen Art kaum brauchbar. Ein Gewichtsaccumulator nach Art der Skizze. Fig. 108, könnte dagegen wohl anwendbar bleiben bei Ersetzung der Schnur durch eine Kette, der Rollen A, B durch entsprechende Kettenräder, und indem dann das vergrösserte Gewicht P durch eine verticale Prismenführung zwangläufig gemacht wird. So könnte z. B. der veränderliche Winddruck, indem er das Kettenrad B vermittels eines Windflügelrades umtreibt, zur Ueberwindung eines constanten Nutzwiderstandes gegen die Rotation des Kettenrades A dienen, falls gleichzeitig Vorsorge getroffen wird, dass die Kuppelung des Windflügelrades mit dem coaxialen Kettenrade B durch geeignete Hülfsmechanismen selbstthätig gelöst oder wieder hergestellt wird, wenn das Gewicht P seine höchste zulässige Lage erreicht bezw. verlässt. Ein Accumulator von solcher Art könnte auch ebenso gut zur Bewältigung eines veränderlichen oder gar zeitweilig ganz aussetzenden Nutzwiderstandes vermittels einer stetig oder gar gleichmässig wirkenden Triebkraft dienen. Wenn aber dabei in diesem oder jenem Falle das Gewicht P mit sehr beträchtlicher Masse, die Kette mit entsprechend grossen Dimensionen ausgeführt werden müsste, so wäre dem Accumulator mit Zugkraftorgan ein solcher mit Druckkraftorgan vorzuziehen, wie er in der That dann ausschliesslich Anwendung findet.

§. 103. Hydraulischer Accumulator.

Als Druckkraftorgan für einen Accumulator, der zur Ausgleichung grösserer Unterschiede der gleichzeitigen Arbeiten von Triebkräften und Widerständen bestimmt ist, dient allgemein Wasser, indem es dabei überhaupt zur Kraftübertragung benutzt wird als ein Körper, der ohne in Betracht kommenden Fehler als widerstandslos deformirbar bei unveränder-

lichem Volumen zu betrachten ist. Ein solcher gewöhnlich als Gewichtsregulator ausgeführter hydraulischer Accumulator besteht aus einem vertical stehenden, unten geschlossenen Hohlcylinder, in welchem ein oben stark belasteter langer cylindrischer Kolben, dessen Durchmesser etwas kleiner, als der innere Durchmesser des Hohlcylinders ist, durch eine Stopfbüchse bezw. Liederung am oberen Ende dieses Hohlcylinders wasserdichte Führung findet. Meistens liegen dabei die Verhältnisse so, dass ein mit fast gleichmässiger Stärke (d. h. mit nahe constanter Grösse pro Secunde) beständig disponibles Arbeitsvermögen, z. B. die nutzbare Arbeit einer Dampfmaschine oder einer anderen Kraftmaschine, zur Bewältigung von Widerständen benutzt werden soll, die mit Unterbrechungen nur zeitweilig längs gewissen Wegstrecken wirksam sind. Insbesondere für den einfachsten Fall einer abwechselungsweise ganz fehlenden und dann mit constanter Stärke zu leistenden Nutzarbeit werde die hier in Betracht kommende Aufgabe näher ausgesprochen wie folgt.

Die Nutzarbeit der treibenden Kraftmaschine, constant $= A_0$ pro Secunde, dient zum Betriebe einer Pumpe, durch welche beständig Wasser in den Accumulator gefördert wird und deren Wirkungsgrad $= \eta_0$ sei ohne Rücksicht auf die hydraulischen Widerstände in dem Saugrohre und dem zum Accumulator führenden Druckrohre. Der gesammte Widerstandscoefficient dieser Röhren sei $= \varsigma_0$ bei einem lichten Querschnitte $= q_0$. Der Accumulatorkolben sei so belastet, dass der Verticaldruck auf seine Endfläche einer Wassersäulenhöhe $= H$ entspricht, nämlich

$$H = \frac{K}{\gamma F},$$

unter γ das specifische Gewicht des Wassers, F den Querschnitt, K die Belastung sammt Eigengewicht des Kolbens verstanden. Das Product seines Querschnittes F und seiner Hubhöhe s, also das wirksame Volumen des Accumulators sei $= V$, die mittlere Höhe der unteren Endfläche dieses Kolbens über der freien Wasseroberfläche in dem Brunnen bezw. Behälter, aus dem die Pumpe das Wasser saugt, sei $= h_0$; die Reibung des Accumulatorkolbens $= \varrho K$. Jeweils auf eine Zeit $= t_0$, in welcher der Accumulator nur mit Wasser neu zu füllen ist ohne theilweisen Verbrauch desselben, folge ein Zeitintervall $= t$, während dessen zugleich pro Zeiteinheit die Arbeit A eines Nutzwiderstandes zu leisten ist. Dazu diene eine Wasserdruckmaschine (Wassersäulenmaschine), die vom Accumulator das Betriebswasser erhält und deren Wirkungsgrad $= \eta$ sei ohne Rücksicht auf die hydraulischen Bewegungswiderstände der Röhren, die vom Accumulator zu fraglicher Wasserdruckmaschine und von dieser zum Aus-

gusse führen, dessen mittlere Höhe über der unteren Endfläche des Accumulatorkolbens $= h$ sei. (Insbesondere wäre $h = -h_0$, wenn das Wasser behufs wiederholten Kreislaufes in den Saugbehälter der Pumpe zurücktreten sollte.) Der gesammte Widerstandscoefficient dieser zuletzt genannten Röhren sei $= \varsigma$ bei einem lichten Querschnitte $= q$.

Zu berechnen sind bei übrigens gegebenen Werthen der vorgenannten Grössen diejenigen von V und A_0, wobei die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in der vom Brunnen bis zum Accumulator reichenden Röhrenleitung vom Querschnitte q_0 beständig, in der übrigen während der Zeitintervalle t constant gesetzt werden mag, vorbehaltlich passender Anbringung von ausgleichenden Windkesseln. Unter Anderem kann der Accumulatorkolben selbst zugleich als ein solcher Windkessel dienen, indem er als ein unten offener Hohlcylinder gebildet wird, worin, durch das Wasser abgesperrt, sich stark gepresste Luft befindet, vermittels welcher dann wie durch ein elastisches Kissen der im Accumulator herrschende hydraulische Druck auf den inneren Theil $= F_0$ der Kolbenfläche (= Querschnitt des cylindrischen Hohlraumes des Kolbens) übertragen wird. Als Endfläche des Kolbens, von der aus die oben mit h_0 und h bezeichneten mittleren Höhen gerechnet wurden, ist dann der Querschnitt desselben zu betrachten, dessen Höhe über dem unteren Rande im Verhältnisse $F_0 : F$ kleiner, als die ganze Höhe der Kolbenhöhlung ist.

Von der durch die Kraftmaschine während der Füllungszeit t_0 des Accumulators geleisteten Arbeit $= A_0 t_0$ bleibt nun, nach Abzug des Verlustes durch die der Pumpe eigenthümlichen Bewegungswiderstände, ein Betrag $= \eta_0 A_0 t_0$ übrig, der in erster Reihe dazu dient, den belasteten Accumulatorkolben auf die Höhe s zu heben, entsprechend der Arbeit:

$$Ks = \gamma F H s = \gamma V H.$$

Dass dabei gleichzeitig das Wasservolumen V im Mittel um den Betrag h_0 zu heben ist $\left(\text{anfangs um } h_0 - \frac{s}{2}, \text{ zuletzt um } h_0 + \frac{s}{2}\right)$, hat in Bezug auf Arbeitsverbrauch dieselbe Wirkung wie Vergrösserung von H um diesen Betrag h_0. Ebenso können auch die hydraulischen Bewegungswiderstände in der Leitungsröhre vom Saugwasserbehälter bis zum Accumulator, wenn

$$u_0 = \frac{1}{q_0} \frac{V}{t_0}$$

die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in derselben bedeutet, durch Zuschlag der entsprechenden Widerstandshöhe $= \varsigma_0 \frac{u_0^2}{2g}$ zu H oder

h_0 berücksichtigt werden, und da endlich noch die Reibung des Accumulatorkolbens die Arbeit

$$\varrho K s = \varrho \gamma V H$$

in Anspruch nimmt, ergiebt sich die Gleichung:

$$\eta_0 A_0 t_0 = \gamma V\left(H + h_0 + \varsigma_0 \frac{u_0^2}{2g}\right) + \varrho \gamma V H$$

$$A_0 = \frac{\gamma}{\eta_0} \frac{V}{t_0}\left[(1+\varrho) H + h_0 + \frac{\varsigma_0}{2 g q_0^2}\left(\frac{V}{t_0}\right)^2\right].$$

Während der Umstand, dass die lebendige Kraft des in der Saugröhre (dem Röhrenstücke vom Saugwasserbehälter bis zur Pumpe) fliessenden Wassers bei seinem Eintritte in den Pumpencylinder als nutzbares Arbeitsvermögen theilweise verloren geht, durch den Wirkungsgrad η_0 der Pumpe mit berücksichtigt sein möge, kann der entsprechende Verlust, den die lebendige Kraft des in der Druckröhre (dem Röhrenstücke von der Pumpe bis zum Accumulator) fliessenden Wassers bei seinem Eintritt in den Accumulator erleidet, durch entsprechende Vergrösserung von ς_0, etwa durch Vergrösserung dieses Coefficienten um 1 berücksichtigt werden, wenn als sicherste Annahme auf vollständigen Verlust jener lebendigen Kraft gerechnet, von ihrer theilweisen Erhaltung als Compressionsarbeit von Luft in einem (z. B. nach obiger Andeutung) passend angebrachten Windkessel abgesehen wird. Um aber dem Coefficienten ς_0 die Bedeutung eines eigentlichen Widerstandscoefficienten zu erhalten, ist dann die Gleichung für A_0 vollständiger zu schreiben:

$$A_0 = \frac{\gamma}{\eta_0} \frac{V}{t_0}\left[(1+\varrho) H + h_0 + \frac{1+\varsigma_0}{2 g q_0^2}\left(\frac{V}{t_0}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Wäre der Querschnitt der Saugröhre $= q_1$ verschieden von demjenigen $= q_0$ der Druckröhre, so wäre unter ς_0 in Gl. (1) der auf die letztere Röhre reducirte gesammte Widerstandscoefficient beider zu verstehen:

$$\varsigma_0 = \varsigma_1 \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^2 + \varsigma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wenn ς_1 den betreffenden Coefficienten für die Saugröhre, ς_2 denselben für die Druckröhre allein bedeutet.

Die während der Zeit t zu leistende Nutzarbeit $= At$ erfordert eine auf die Wasserdruckmaschine zu übertragende grössere Arbeit $= \frac{A}{\eta} t$. Zu derselben ist nicht nur das im Accumulator während der vorhergegangenen Füllungszeit t_0 angesammelte Arbeitsvermögen $\gamma V H$ disponibel, sondern auch dasjenige $= \gamma X H$, welches wegen andauernder Wirkung der Pumpe

während der Arbeitszeit t weiter hinzukommt, entsprechend dem in dieser Zeit von der Pumpe geförderten Wasservolumen X, das den Niedergang des Accumulatorkolbens entsprechend verlangsamt. Weil aber von diesem ganzen Arbeitsvermögen $= \gamma (V+X) H$ die Arbeiten in Abzug zu bringen sind, die durch die Erhebung des Wasservolumens $V+X$ auf die Höhe h und durch die hydraulischen Bewegungswiderstände gegen die Strömung dieses Wassers in der Leitungsröhre vom Accumulator bis zum Ausgusse mit der mittleren Geschwindigkeit

$$u = \frac{1}{q} \frac{V+X}{t}$$

verbraucht werden, sowie auch die lebendige Kraft $= \gamma (V+X) \frac{u^2}{2g}$, die dem im Accumulator fast bewegungslosen Wasser bei seinem Eintritt in die Leitungsröhre ertheilt werden muss, und die Reibungsarbeit des niedersinkenden Accumulatorkolbens $= \varrho \gamma V H$, so ergiebt sich analog dem Obigen die Gleichung:

$$\frac{A}{\eta} t = \gamma (V+X) \left[H - h - (1+\varsigma) \frac{u^2}{2g} \right] - \varrho \gamma V H$$

$$A = \eta \gamma \frac{V+X}{t} \left[\left(1 - \frac{V}{V+X} \varrho \right) H - h - \frac{1+\varsigma}{2 g q^2} \left(\frac{V+X}{t} \right)^2 \right] \quad . . (3).$$

Wenn zwar auch die lebendige Kraft, die das Wasser in der Zuflussröhre, d. h. in dem vom Accumulator bis zur Wasserdruckmaschine reichenden Röhrenstücke besitzt, in dieser Maschine zum Theil verloren gehen mag, so dass dieselbe dann dem Wasser behufs seiner Bewegung in der Abflussröhre die entsprechende lebendige Kraft aufs Neue mittheilen muss, so ist doch dieser Umstand in ähnlicher Weise als durch den Wirkungsgrad η mit berücksichtigt zu betrachten, wie es oben hinsichtlich der Pumpe und ihres Wirkungsgrades η_0 bemerkt wurde. Desgleichen gilt auch hier, analog der Bedeutung obiger Gleichung (2), die Bemerkung, dass bei verschiedenen Querschnitten q und q'' der Zufluss- und Abflussröhre unter ς in Gl. (3) der auf erstere reducirte gesammte Widerstandscoefficient beider zu verstehen ist, also die Summe:

$$\varsigma = \varsigma' + \varsigma'' \left(\frac{q}{q''} \right)^2 \quad . . . . (4).$$

wenn ς' und ς'' die diesen Röhren einzeln zukommenden Widerstandscoefficienten bedeuten.

Was das in Gl. (3) vorkommende Volumen X betrifft, so ist zu bemerken, dass, wenn die Pumpe während der Zeit t mit derselben Arbeits-

stärke betrieben würde, wie vorher während der Zeit t_0, dieselbe einen etwas schnelleren Gang annehmen und somit ein Wasservolumen $X > \frac{t}{t_0} V$ in den Accumulator fördern müsste, weil in diesem jetzt bei niedergehendem Kolben wegen der Reibung desselben eine Druckhöhe $= (1 - \varrho) H$ herrscht, während sie vorher bei steigendem Kolben $= (1 + \varrho) H$ war. Mit Rücksicht hierauf entspräche vielmehr X der Gleichung:

$$A_0 = \frac{\gamma}{\eta_0} \frac{X}{t} \left[(1 - \varrho) H + h_0 + \frac{1 + \varsigma_0}{2 g q_0^2} \left(\frac{X}{t}\right)^2\right] \ldots \ldots (5),$$

erhalten aus Gl. (1) mit X statt V, t statt t_0 und $-\varrho$ statt ϱ. Durch die Gleichungen (1), (3) und (5) wären X, V und A_0 unter übrigens gegebenen Umständen bestimmt, und wäre dann der resultirende Wirkungsgrad der ganzen Anlage:

$$\eta' = \frac{A t}{A_0 (t_0 + t)} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Uebrigens wird den obwaltenden Umständen meistens wohl die Annahme besser entsprechen, dass die Geschwindigkeit, nicht dass die Arbeitsstärke der die Pumpe betreibenden Kraftmaschine in der Arbeitszeit t dieselbe sei wie in der Füllungszeit t_0 des Accumulators, indem z. B. der Gang dieser Kraftmaschine durch einen Regulator von der unter IV. zu besprechenden Art möglichst gleichförmig erhalten wird. Ist das der Fall, so ist

$$X = \frac{t}{t_0} V, \qquad \frac{V + X}{t} = \frac{t_0 + t}{t_0 t} V, \qquad \frac{V}{V + X} = \frac{t_0}{t_0 + t},$$

also nach Gl. (3):

$$A = \eta \gamma \frac{t_0 + t}{t_0 t} V \left[\left(1 - \frac{t_0}{t_0 + t} \varrho\right) H - h - \frac{1 + \varsigma}{2 g q^2} \left(\frac{t_0 + t}{t_0 t} V\right)^2\right] \ldots (7).$$

Durch diese Gleichung ist V bestimmt, dann A_0 durch Gl. (1). Ist jetzt A_1 die während der Zeit t zum Betriebe der Pumpe aufgewendete Arbeitsstärke, so ist nach den Gleichungen (5) und (1) mit

$$X = \frac{t}{t_0} V, \qquad u_0 = \frac{1}{q_0} \frac{V}{t_0}, \qquad u = \frac{1}{q} \frac{t_0 + t}{t_0 t} V \ldots \ldots (8)$$

$$A_1 = \frac{\gamma}{\eta_0} \frac{V}{t_0} \left[(1 - \varrho) H + h_0 + (1 + \varsigma_0) \frac{u_0^2}{2g}\right]$$

und damit die in der ganzen Zeit $= t_0 + t$ aufgewendete Betriebsarbeit:

$$A_0 t_0 + A_1 t = \frac{\gamma V}{\eta_0} \left\{ \begin{array}{l} (1+\varrho) H + h_0 + (1+\varsigma_0)\frac{u_0^2}{2g} \\ + \frac{t}{t_0}\left[(1-\varrho) H + h_0 + (1+\varsigma_0)\frac{u_0^2}{2g}\right] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{\gamma V}{\eta_0} \frac{t_0 + t}{t_0} \left[\left(1 + \frac{t_0 - t}{t_0 + t}\varrho\right) H + h_0 + (1+\varsigma_0)\frac{u_0^2}{2g}\right].$$

also der resultirende Wirkungsgrad mit Rücksicht auf Gl. (7):

$$\eta' = \frac{A t}{A_0 t_0 + A_1 t} = \eta_0 \eta \frac{\left(1 - \frac{t_0}{t_0 + t}\varrho\right) H - h - (1+\varsigma)\frac{u^2}{2g}}{\left(1 + \frac{t_0 - t}{t_0 + t}\varrho\right) H + h_0 + (1+\varsigma_0)\frac{u_0^2}{2g}} \quad \ldots (9).$$

Sind V und A_0 bestimmt, so wird durch nachträgliche Aenderung von t auch eine solche von A bedingt oder umgekehrt, und es fragt sich, welchem Werthe von t unter übrigens gleich bleibenden Umständen das Maximum von A entspricht und wie gross dieses Maximum ist? Zur Beantwortung dieser Frage werde mit

$$x = \frac{t_0 + t}{t_0 t} = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t}$$

der Ausdruck von A nach Gl. (7) geschrieben:

$$A = \eta \gamma V \left\{\left[x - \left(x - \frac{1}{t_0}\right)\varrho\right] H - x h - \frac{1+\varsigma}{2 g q^2} x^3 V^2\right\},$$

woraus mit $\alpha = (1-\varrho) H - h$ und $\beta = \frac{1+\varsigma}{2g}\left(\frac{V}{q}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$

folgt: $$A = \eta \gamma V \left(\frac{\varrho H}{t_0} + \alpha x - \beta x^3\right) = max$$

für $$\alpha - 3 \beta x^2 = 0,$$

also $$x = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}} = \frac{q}{V}\sqrt{\frac{2}{3} g \frac{(1-\varrho) H - h}{1+\varsigma}} \quad \ldots (11).$$

Indem dann $\alpha - \beta x^2 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}(\alpha - 3\beta x^2) = \frac{2}{3}\alpha$

ist, ergiebt sich $A_{max} = \eta \gamma V \left(\frac{\varrho H}{t_0} + \frac{2}{3}\alpha x\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$

Wenn übrigens die Vergrösserung von A, wie es meistens der Fall sein wird, mit Verkleinerung von t verbunden ist, so hat sie auch Verkleinerung

des resultirenden Wirkungsgrades η' zur Folge, der nach Gl. (9) unter übrigens gleichen Umständen zugleich mit t zu- und abnimmt. —

Schliesslich ist zu bemerken, dass der hier besprochene hydraulische Accumulator anstatt als Gewichtsregulator auch als Federregulator ausgeführt werden könnte, insbesondere mit Luft als einem elastischen Körper, zu dessen Compression der zeitweilige Ueberschuss der Betriebsarbeit verwendet wird. Unter Beseitigung des belasteten Accumulatorkolbens wäre dann der ihn enthaltende Hohlcylinder durch ein oben geschlossenes Gefäss zu ersetzen, in welchem sich stark gepresste Luft über der Oberfläche des unten ein- und austretenden Wassers befindet. Die vorstehenden Gleichungen, in denen $\varrho = 0$ zu setzen und V als die gesammte Volumenänderung der abgesperrten Luft zu verstehen wäre, müssten dann namentlich mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Wasserdruckhöhe H dieser Luft gewisse Aenderungen erleiden. Abgesehen von diesem letzteren möglicherweise störenden Umstande ist es indessen auch viel schwieriger, einen grossen Behälter luftdicht, als ihn wasserdicht herzustellen, besonders wenn es sich, wie hier, um Pressungen bis zu etwa 50 Atmosphären handelt, während zudem ein unvermeidlicher Mangel an Wärmedichtigkeit wegen theilweisen Verlustes der Luftcompressionswärme durch Leitung die hier fehlende Kolbenreibung reichlich aufwiegen kann, und ist deshalb die fragliche Ausführung des hydraulischen Accumulators als Federregulator in der That nicht üblich.

Wenn ferner statt einer Wasserdruckmaschine deren mehrere behufs Leistung verschiedener Nutzarbeiten durch das vom Accumulator kommende stark gepresste Wasser zu betreiben sind und die Arbeitszeiten t derselben nicht zusammenfallen, so kann dadurch die Aufgabe wesentlich complicirter werden und behufs ihrer rechnerischen Durchführung gewisse, den jeweiligen Umständen angepasste, vereinfachende Annahmen nöthig machen, hinsichtlich welcher indessen kaum eine allgemein gültige Regel aufzustellen ist.

Wenn endlich die Nutzarbeit der Wasserdruckmaschine, die im Vorhergehenden nicht näher charakterisirt und nur periodisch während je t Secunden als constant $= A$ pro Secunde vorausgesetzt wurde, insbesondere in periodischer Hebung einer Last bestände (hydraulischer Aufzug), so wäre die eine constante Hebungsgeschwindigkeit voraussetzende Annahme constanter Nutzarbeitsstärke A nicht ganz zulässig und würden dann wenigstens ausser den vorstehend erörterten, auf constante Mittelwerthe der betreffenden Grössen Bezug nehmenden Erwägungen noch verschiedene besondere Umstände in Betracht kommen, wie insbesondere das Aenderungsgesetz der (von Null an wachsenden und wieder bis Null abnehmenden) Geschwindigkeit jener Last bei ihrer Erhebung (wobei die vom Arbeits-



cylinder bis zum Ausgusse sich erstreckende Abflussröhre ausser Funktion ist), das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit des niedergehenden Förderkorbes (wobei als Leitungsröhre für das Wasser nur jene Abflussröhre in Funktion ist), die theilweise Ausgleichung des Eigengewichtes dieses Förderkorbes bezw. ihres Ersatzes durch andere zur Aufnahme der Nutzlast dienende Maschinentheile durch geeignete Gegengewichte, die Beziehung zwischen Last, Druckhöhe H im Accumulator, Querschnitt des Arbeitskolbens und dem (z. B. durch Kettengetriebe vermittelten) Geschwindigkeitsverhältnisse von Arbeitskolben und Förderkorb, sowie andere theils statische Verhältnisse, theils mechanische Massenwirkungen. Weil indessen solche Fragen mehr die Eigenthümlichkeiten einer gewissen Art von Arbeitsmaschinen, als die prinzipielle Wirksamkeit des Accumulators betreffen und deshalb in das Gebiet der im vierten Bande dieses Werkes zu besprechenden Aufgaben gehören, mag hier von ihrer Erörterung abgesehen werden.

§. 104. Beispiel.

Als Beispiel einer hydraulischen Accumulator-Anlage von der im vorigen Paragraph besprochenen Art werde angenommen für das Meter als Längeneinheit, die Secunde als Zeiteinheit und das Meterkilogramm als Arbeitseinheit:

$$A = 750;\qquad t_0 = 600;\qquad t = 120$$
$$H = 400;\qquad h_0 = -10;\qquad h = 10$$
$$\eta_0 = 0{,}85;\qquad \eta = 0{,}8;\qquad \varrho = 0{,}05.$$

Die für h_0 und h angenommenen Werthe entsprechen dem Falle, dass das Betriebswasser einem etwas höher, als der Accumulator, gelegenen Behälter entnommen werden und in denselben wieder zurückfliessen soll. Ist l_0 die Länge der Rohrleitung von diesem Behälter zur Pumpe und weiter zum Accumulator, l die Länge der Leitung von letzterem zur Wasserdruckmaschine und zurück zu jenem Behälter, so sei

$$l_0 = 200,\qquad l = 240.$$

Um die Durchmesser d_0 und d dieser Leitungsröhren passend anzunehmen, etwa so, dass die mittleren Wassergeschwindigkeiten u_0 und u in ihnen wenig von 1 Meter pro Secunde verschieden sind, werde aus Gl. (7) im vorigen Paragraph ein vorläufiger Näherungswerth von V abgeleitet mit Vernachlässigung des von u abhängigen letzten Gliedes auf der rechten Seite dieser Gleichung. Man findet V nahe $= 0{,}25$ Cubikmeter und damit sowie mit $u_0 = u = 1$ nach (8) daselbst:

$$q_0 = 0{,}000417, \text{ also } d_0 = 0{,}023$$
$$q = 0{,}0025, \quad \text{„} \quad d = 0{,}056.$$

Hiernach werde angenommen:

$$d_0 = 0{,}025, \text{ also } q_0 = 0{,}000491$$
$$d = 0{,}06, \quad \text{„} \quad q = 0{,}002827.$$

Wenn nun die Leitungswiderstandscoefficienten der fraglichen Röhren mit $\lambda_0 \frac{l_0}{d_0}$ und $\lambda \frac{l}{d}$ bezeichnet werden, so wäre nach Bd. I, §. 90 bei Voraussetzung vollkommen cylindrischer Röhren

$$\lambda_0 = 0{,}0269 \text{ entsprechend } \frac{1}{u_0 d_0} = \frac{1}{d_0} = 40$$
$$\lambda = 0{,}0250 \quad \text{„} \quad \frac{1}{u\,d} = \frac{1}{d} = 17.$$

Mit Rücksicht auf etwaige Unvollkommenheiten der cylindrischen Form werde indessen

$$\lambda_0 = 1{,}1 \,.\, 0{,}0269 = 0{,}0296 \text{ und } \lambda = 1{,}1 \,.\, 0{,}025 = 0{,}0275$$

angenommen. Die entsprechenden Werthe von

$$\lambda_0 \frac{l_0}{d_0} = 237 \text{ und } \lambda \frac{l}{d} = 110$$

sind so gross, dass die Coefficienten sonstiger Widerstände dieser Röhren, z. B. etwaiger Krümmungswiderstände derselben, nach Schätzung berücksichtigt werden können. Gemäss den obwaltenden Umständen in dieser Hinsicht ergebe sich:

$$1 + \varsigma_0 = 240 \text{ und } 1 + \varsigma = 115.$$

Durch Einsetzung der Zahlenwerthe erhält nun die das Volumen V bestimmende Gleichung (7) die Form:

$$750 = 8\,V\left(373{,}3 - 115\,\frac{u^2}{2g}\right) \text{ mit } u = 3{,}537\,V.$$

Entsprechend dem obigen Näherungswerthe $V = 0{,}25$ ist danach

$$u = 0{,}884 \text{ und } \frac{u^2}{2g} = 0{,}0398$$

und ergiebt sich damit der corrigirte Werth:

$$V = 0{,}254 \text{ Cubikmtr.}$$

entsprechend $u = 0{,}898$; $\frac{u^2}{2g} = 0{,}0411$; $(1 + \varsigma)\frac{u^2}{2g} = 4{,}7$

$$u_0 = 0{,}862;\ \frac{u_0^2}{2g} = 0{,}0379;\ (1 + \varsigma_0)\frac{u_0^2}{2g} = 9{,}1.$$

Aus Gl. (1) im vorigen Paragraph folgt dann

$$A_0 = 208{,}7 \text{ Meterkgr.} = \frac{A}{3{,}6}$$

und aus Gl. (9) der resultirende Wirkungsgrad:

$$\eta' = 0{,}894 \,.\, 0{,}85 \,.\, 0{,}8 = 0{,}608 \,. \text{—}$$

Mit Hülfe desselben Accumulators von $V = 0{,}254$ Cubikmtr. wirksamem Inhalte und derselben Pumpe, die, mit der Arbeitsstärke $A_0 = 208{,}7$ betrieben, in $t_0 = 600$ Secunden ihn ganz zu füllen vermag, ferner mit Hülfe desselben Systems von Leitungsröhren und einer Wasserdruckmaschine mit dem Wirkungsgrade $\eta = 0{,}8$ würde höchstens eine Nutzarbeitsstärke $= A_{max}$, die durch Gl. (12) im vorigen Paragraph bestimmt ist, während eines durch Gl. (11) daselbst bestimmten kürzern Zeitraumes t geleistet werden können. Aus dieser letzten Gleichung findet man hier:

$$x = 0{,}051055 = \frac{1}{600} + \frac{1}{t}, \text{ also } t = 20{,}25$$

und dann nach Gl. (12) mit

$$a = (1 - \varrho)\, H - h = 370$$
$$A_{max} = 2566 = 12{,}3\, A_0$$

mit einem übrigens erheblich reducirten resultirenden Wirkungsgrade, der, weil jetzt nach Gl. (8) daselbst

$$u = x \frac{V}{q} = 4{,}587 \text{ und somit } (1 + \varsigma) \frac{u^2}{2g} = 123{,}3$$

wäre, nach Gl. (9) sich ergäbe zu $\eta' = 0{,}402$.

IV. Regulatoren für Kraftmaschinen.

§. 105. Uebersicht.

Nach §. 87 sind die hier in Rede stehenden Regulatoren als Mechanismen zu bezeichnen, die dazu dienen, den Gang einer Kraftmaschine und damit auch den davon abhängigen Gang einer jeden von ihr zu treibenden Arbeitsmaschine bei veränderlicher Grösse der Nutzarbeitsstärke (in der Zeiteinheit geleisteter Nutzarbeit) der Kraftmaschine oder bei veränderlichem Bedarfe der Arbeitsmaschinen an Betriebsarbeitsstärke (Betriebsarbeit in der Zeiteinheit) selbstthätig möglichst gleichförmig zu erhalten, und zwar durch entsprechende Aenderung der von der Kraftmaschine in der

Zeiteinheit geleisteten Nutzarbeit, insbesondere dadurch, dass die Arbeitsflüssigkeit (motorische Substanz), die als Trägerin des zum Betriebe der Kraftmaschine disponiblen und von ihr in nutzbare mechanische Arbeit umzusetzenden Arbeitsvermögens dient, in entsprechend veränderter Menge zugelassen wird. Letzteres geschieht durch Aenderung der Grösse oder periodisch unterbrochenen Eröffnungsdauer einer Durchflussöffnung, abhängig von der Stellung eines Hahnes, Schiebers, Ventils oder einer ähnlichen Vorrichtung, die hier sammt den Gliedern, wodurch sie mit dem Regulator selbst verkettet ist, kurz und allgemein als Stellzeug bezeichnet werden soll. Der Gang der Kraftmaschine werde beurtheilt durch die Grösse der Winkelgeschwindigkeit ω einer Welle, welche, indem sie als Bestandtheil der Maschine die Verbindung derselben mit dem Regulator so vermittelt, dass seine Configuration von ω abhängt, im Folgenden kurz als Regulatorwelle bezeichnet werden soll.

Als die der Gleichförmigkeit des Ganges schädlichen Arbeitsänderungen, deren Einfluss auf Aenderung von ω durch die Wirksamkeit des Regulators möglichst compensirt werden soll, kommen hier nur solche in Betracht, die bei im Allgemeinen nicht periodischem Verlauf zu gross und von zu langer Dauer sind, als dass ein Schwungrad von praktisch zulässiger Masse und Winkelgeschwindigkeit die entsprechende Veränderlichkeit des Ganges der Maschine in hinlänglich engen Grenzen zu erhalten vermöchte, und zwar sind es vorzugsweise nicht Arbeitsänderungen der Triebkraft, die dann also durch entgegengesetzte Aenderungen dieser Betriebskraft nur rückgängig zu machen wären, sondern Aenderungen des Arbeitsbedarfes der Arbeitsmaschinen, also Aenderungen des gesammten Widerstandes, den die Kraftmaschine zu überwinden hat, und die selbst von verschiedenen Ursachen herrühren können. Mit Rücksicht darauf sind die hier in Rede stehenden Regulatoren zu unterscheiden als*:

1. Regulatoren, die durch dieselbe Ursache in Thätigkeit gesetzt werden, welche den Widerstand ändert;

2. Regulatoren, welche durch die erfolgte Aenderung des Widerstandes in Thätigkeit kommen;

3. Regulatoren, die erst durch die eingetretene Geschwindigkeitsänderung wirksam werden.

---

* Siehe J. Lüders: „Ueber die Regulatoren". Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 60. Dieser Aufsatz, der eine werthvolle und sehr vollständige Uebersicht der damals bekannt gewesenen Regulatoren nebst wissenschaftlicher Besprechung ihrer Eigenschaften enthält, liegt in mancher Hinsicht der folgenden Darstellung zum Grunde.

Im Anschlusse an die von Reuleaux* für die Regulatoren der 2ten und 3ten Classe gewählten Bezeichnungen mögen die der beiden ersten Classen zusammen dynamometrische, die der dritten Classe tachometrische Regulatoren genannt werden. Der Umstand, dass letztere das zu vermindernde Uebel erst bis zu gewissem Grade anwachsen lassen müssen, bevor sie es bekämpfen können, bedingt einen nur theoretischen Mangel, denn praktisch genügt es, die Geschwindigkeitsschwankungen in gewisse Grenzen einzuengen; darin aber, dass ihre Wirksamkeit von den Ursachen der Ungleichförmigkeit des Ganges unabhängig ist, liegt ein wesentlicher und um so grösserer Vortheil, je vielfältiger jene Ursachen sein können. Thatsächlich haben auch die unter 3. genannten Regulatoren viel allgemeinere Anwendung, als die unter 1. und 2. genannten gefunden.

Jede Aenderung der Configuration eines solchen Regulators erfordert die Ueberwindung gewisser Bewegungswiderstände, besonders derjenigen des Stellzeuges, falls er mit diesem zwangläufig verkettet ist. Wenn im Beharrungszustande der Maschine, entsprechend der Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle, jene Widerstände weder im einen noch im umgekehrten Sinne auch nicht theilweise entwickelt sind, so muss deshalb ω bis zu einer gewissen Grösse ω_1 wachsen oder bis ω_2 abnehmen, bevor die Configurationsänderung entgegen den im einen oder andern Sinne vollständig entwickelten Bewegungswiderständen eintreten kann. Der Quotient

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

heisse dann der Unempfindlichkeitsgrad des Regulators, analog dem früher in §. 92 definirten Ungleichförmigkeitsgrade δ des Ganges einer Maschine, bezw. eines Punktes, auf den die bewegten Massen einer Maschine reducirt werden. Soll auch natürlich diese Grösse ε klein sein, so darf sie doch nicht beliebig klein, jedenfalls dann, wenn ω unbeschadet eines unveränderlichen Mittelwerthes periodisch veränderlich ist, nicht kleiner sein, als der Ungleichförmigkeitsgrad (§. 92) dieser periodischen Bewegung. Denn sonst würde der Regulator schon für die kleinen Geschwindigkeitsänderungen in den einzelnen je eine kleinere Zeitdauer umfassenden Perioden empfindlich und ein unruhiger Gang der Maschine die Folge davon sein. Während vielmehr die periodischen Geschwindigkeitsänderungen durch Schwungräder in engere Grenzen eingeschlossen werden, sollen die hier in Rede stehenden Regulatoren thatsächlich nur bewirken, dass die mittleren Geschwindigkeiten für die auf einander folgenden Perioden möglichst wenig

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1859, S. 165.



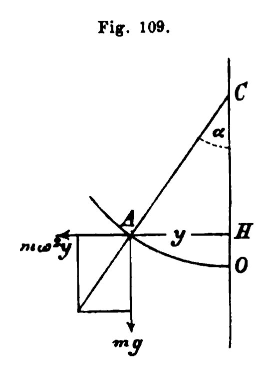
unter sich verschieden, nämlich nicht viel verschiedener seien, als die augenblicklichen Geschwindigkeiten in den einzelnen Perioden. Auch ist zu berücksichtigen, dass der Unempfindlichkeitsgrad, indem er durch den Bewegungswiderstand bedingt wird, mit diesem zugleich zu- und abnimmt, und dass deshalb das für den Regulator in Anspruch zu nehmende Vermögen, diesen Widerstand von gewisser Grösse überwinden zu können, nothwendig eine gewisse entsprechende Grösse von ε erfordert, die meistens $=0{,}04$ bis $0{,}05$ angenommen werden kann.

Bei diesen tachometrischen Regulatoren, die durch Geschwindigkeitsänderungen in Wirksamkeit gesetzt werden und ebenso im Folgenden wie in der Praxis fast ausschliesslich in Betracht kommen, kann die Abhängigkeit ihrer Configuration von der Geschwindigkeit der Maschine, nämlich von der dieselbe charakterisirenden Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle von zweifach verschiedener Art sein. Wenn nämlich ein Gleichgewichtszustand des Regulators, bei welchem der Bewegungswiderstand gegen seine Configurationsänderung in keinem Sinne und in keinem Theilbetrage entwickelt ist, als mittlerer Gleichgewichtszustand bezeichnet wird, so kann es entweder der Fall sein, dass in solchem mittleren Gleichgewichtszustande jedem Werthe von ω nur eine bestimmte Configuration des Regulators, einer stetigen Folge wechselnder Geschwindigkeiten somit auch eine stetige Folge verschiedener Configurationen entspricht, oder es kann der Regulator überhaupt nur bei einer bestimmten Geschwindigkeit, bei dieser aber in jeder an sich möglichen Configuration sich in mittlerem Gleichgewichtszustande befinden. Wenn, abgesehen von Bewegungswiderständen, die Configuration des Regulators durch eine vorübergehende Kraftwirkung verändert wird, so kehrt er beim Aufhören der letzteren im ersten Falle in seine frühere Gleichgewichtslage zurück, im zweiten nicht. Indem also das Gleichgewicht des Regulators in jenem Falle stabil, in diesem indifferent ist, könnten die Regulatoren dieser zwei Arten selbst als stabile und indifferente unterschieden werden; doch ist es üblich geworden, sie mit Reuleaux bezw. als statische und astatische Regulatoren zu bezeichnen. Während jene den allgemeinen, stellen diese einen Grenzfall dar; sie würden nur einem Uebergangsfalle, nämlich zum Falle des labilen Gleichgewichtes entsprechen, wenn solches nicht von vornherein als unzulässig hier ausgeschlossen wäre.

Zu näherer Erläuterung des bemerkten Artunterschiedes diene das folgende Beispiel, das zugleich als ideale, aller Nebenumstände entkleidete Ausführung eines sogenannten, demnächst noch eingehender zu besprechenden, Centrifugalregulators von Interesse ist: Fig. 109. Mit der verticalen

Axe OC der Regulatorwelle sei die ebene Curve OA so verbunden, dass ihre durch OC gehende Ebene zusammen mit der Regulatorwelle rotirt.

Fig. 109.



Auf dieser Curve sei ohne Reibung ein materieller Punkt von der Masse m beweglich, dessen Lagenänderung die Bewegung des Stellzeuges vermittelt. Die Lage A dieses Punktes in der Entfernung $HA = y$ von der Axe OC ist dann bei der Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle eine Gleichgewichtslage, wenn die Resultante der auf den Punkt wirkenden Kräfte, nämlich der im Sinne CO wirkenden Schwerkraft $= mg$ und der im Sinne HA wirkenden Centrifugalkraft $= m\omega^2 y$ in die Richtung der Normale CA für den Punkt A der Leitcurve fällt, wenn also, unter α den Winkel OCA und unter $h = y\,cotg\,\alpha$ die Subnormale CH verstanden,

$$tg\,\alpha = \frac{\omega^2 y}{g} \text{ oder } \omega^2 = \frac{g}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist. Indem hiernach das Gleichgewicht einen mit wachsendem Werthe von ω abnehmenden Werth von h erfordert, mit wachsender Winkelgeschwindigkeit aber der materielle Punkt durch die entsprechend vergrösserte Centrifugalkraft weiter von der Axe weg getrieben wird, so ist ein solcher Regulator statisch, wenn die Subnormale der Leitcurve im Sinne von O gegen A, nämlich mit wachsender Entfernung des betreffenden Punktes von der Axe OC abnimmt, wie es z. B. dann der Fall ist, wenn die Leitcurve ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkte C oder allgemeiner ein nach oben concaver Ellipsenbogen mit der Hauptaxe OC ist. Ist aber diese Curve eine Parabel mit der Hauptaxe OC, so ist die Subnormale constant $= p$, entsprechend mit $OH = x$ der Parabelgleichung: $y^2 = 2px$. Nach Gl. (2) ist dann das Gleichgewicht nur für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{g}{p}}$$

möglich, für diese aber bei jeder Lage A des materiellen Punktes; der Regulator ist astatisch. Wäre endlich die Leitcurve ein nach oben concaver Hyperbelbogen mit OC als Hauptaxe, so würde mit wachsender Winkelgeschwindigkeit, also wachsender Entfernung des Punktes A von der Axe, die Subnormale h selbst wachsen im Widerspruch mit Gl. (2).



Das Gleichgewicht des materiellen Punktes an einer gewissen Stelle A wäre labil; bei geringster Störung desselben würde er sich bis zum Scheitelpunkte O, bezw. bis zum äussersten Punkte der Leitcurve bewegen. Die Vorrichtung wäre als Regulator nicht brauchbar.

Die relative Lage der Glieder eines Regulators oder seine Configuration (z. B. die Lage des materiellen Punktes in seiner Leitcurve für den durch Fig. 109 dargestellten idealen Fall) ist zwischen zwei Grenzlagen veränderlich, die als obere und untere Grenzlage unterschieden werden mögen, beziehungsweise entsprechend dem Maximum und Minimum von ω. Ist dann insbesondere bei mittlerem Gleichgewichtszustande der Werth von ω für die obere Grenzlage $=\omega'$, für die untere $=\omega''$, so würde der Ausdruck

$$\delta = 2\frac{\omega'-\omega''}{\omega'+\omega''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

als Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators, nämlich analog §. 92 als der durch ihn noch zugelassene Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung der betreffenden Maschine bezeichnet werden können, wenn die Configurationsänderung des Regulators ohne Widerstand und bei irgend einer bestimmten Aenderung des Gesammtwiderstandes der Maschine ohne Schwingungen stets nur in ebenso bestimmtem Sinne, die Geschwindigkeitsänderung der Maschine selbst ohne Schwankungen in entsprechendem Sinne stattfände; denn bei der Zufälligkeit des Gesetzes, nach welchem sich ω hier zwischen den Grenzen ω' und ω'' ändert, ist das arithmetische Mittel $=\frac{\omega'+\omega''}{2}$ am einfachsten und passendsten als Mittelwerth von ω zu betrachten. Mit Rücksicht darauf aber, dass sich der Regulator entgegen gewissen Bewegungswiderständen jenen Grenzlagen nähert, wird thatsächlich (immer noch abgesehen von Schwingungen) die obere bei einer Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle erreicht, die etwas $>\omega'$, die untere bei einer solchen, die etwas $<\omega''$ ist, und zwar kann erstere $=\omega'\left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)$, letztere $=\omega''\left(1-\frac{\varepsilon''}{2}\right)$ gesetzt werden, falls der von seiner Configuration möglicherweise abhängige Unempfindlichkeitsgrad des Regulators für die obere Grenzlage $=\varepsilon'$, für die untere $=\varepsilon''$ ist. Hiernach ist der resultirende Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators zu setzen:

$$\varDelta = 2\frac{\omega'\left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)-\omega''\left(1-\frac{\varepsilon''}{2}\right)}{\omega'+\omega''} = \delta + \frac{\omega'\varepsilon'+\omega''\varepsilon''}{\omega'+\omega''} \quad \ldots \quad (4).$$

Uebrigens pflegt die Grösse ε, wenn überhaupt, dann doch nur wenig mit der Lage des Regulators veränderlich zu sein, und wenn deshalb $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$ gesetzt wird, unter ε nöthigenfalls einen Mittelwerth verstanden, so ist nach Gl. (4):

$$\Delta = \delta + \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Bei einem astatischen Regulator ist $\omega' = \omega''$, also $\delta = 0$ und $\Delta = \varepsilon$ so klein wie möglich. Indessen wird dieser Vorzug durch grössere Uebelstände mehr als aufgewogen, wie folgende Ueberlegung erkennen lässt. Wenn von einem solchen Zustande aus gerechnet, wobei sich der Regulator in mittlerem Gleichgewichtszustande befindet, die Geschwindigkeit der Maschine und somit ω in Folge einer eingetretenen Minderung des Gesammtwiderstandes wächst, so kommt der Regulator, sobald ω bis ω_1 gewachsen ist, in Wirksamkeit, d. h. in relative Bewegung solchen Sinnes, dass durch die entsprechende Bewegung des Stellzeuges der Zufluss motorischer Substanz und somit die mittlere Grösse der Triebkraft vermindert wird. Hat diese Verminderung einen solchen Grad erreicht, dass dadurch ein neuer Beharrungszustand der Maschine ermöglicht wird mit einer mittleren Geschwindigkeit, für welche sich der Regulator bei seiner augenblicklichen Configuration in mittlerem Gleichgewichtszustande befände, so ist thatsächlich doch ω in diesem Augenblicke noch grösser, als der jenem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Werth, weil die betreffende Lage des Regulators unter Ueberwindung eines gewissen ihm eigenthümlichen Bewegungswiderstandes erreicht werden musste. Der Regulator bleibt also vorläufig noch in relativer Bewegung im Sinne gegen die obere Grenzlage hin um so mehr, als die der Geschwindigkeit dieser relativen Bewegung entsprechende lebendige Kraft seiner beweglichen Glieder einen plötzlichen Stillstand nicht zulässt; auch kommt dabei in Betracht, dass die Reibung im Zustande der Bewegung meistens wesentlich kleiner, als bei beginnender Bewegung ist und dass deshalb nach Beginn der relativen Bewegung des Regulators ein gewisser Theil der bis dahin vom Bewegungswiderstande aufgehobenen bewegenden Kraft zur Beschleunigung und somit zur Erzeugung jener relativen lebendigen Kraft des Regulators selbst dann disponibel werden würde, wenn ω gar nicht über ω_1 hinaus zunähme. So kann es der Fall sein, dass, wenn endlich der Zustand relativer Ruhe erreicht ist, der Regulator bereits so weit über seine den veränderten Umständen im Beharrungszustande entsprechende Gleichgewichtslage hinaus gelangte, dass in Folge des jetzt übermässig verminderten Zuflusses motorischer Substanz der entsprechende Werth von ω schon kleiner, als der

betreffende Grenzwerth ω_2, somit alsbald eine rückgängige Relativbewegung des Regulators die nothwendige Folge ist. Bei ihr machen ähnliche Umstände in umgekehrtem Sinne sich geltend, und kann es so geschehen, dass der Regulator dauernd zwischen zwei Grenzlagen hin und her geht und entsprechend die Geschwindigkeit der Maschine zwischen zwei Grenzwerthen schwankt um so mehr, je mehr der Regulator seine den veränderten Umständen entsprechende Gleichgewichtslage überschreiten kann, am meisten also jedenfalls bei astatischen Regulatoren, bei denen solche Lagenänderung nur durch Bewegungswiderstände und nicht zugleich durch Gleichgewichtsstörung der übrigen Kräfte erschwert ist. In der That hat sich bei der Anwendung astatischer Regulatoren vielfach ein unruhiger Gang der Maschine als Uebelstand gezeigt, und sind ihnen deshalb in neuerer Zeit statische Regulatoren mit zwar passend verkleinerten, niemals aber bis Null verkleinerten Werthen von δ mit Recht vorgezogen worden. Die denselben nicht sehr passend beigelegte Bezeichnung: „pseudoastatische Regulatoren“ rührt daher, dass es bei ihrer Construction ursprünglich beabsichtigt war, dem Zustande eines indifferenten mittleren Gleichgewichtes so viel wie möglich nahe zu kommen, und dass es irriger Weise als ein Mangel betrachtet wurde, wenn dies nur unvollkommen gelang.

Ist auch diese vorläufige Erörterung der Mangelhaftigkeit eines astatischen Regulators durchaus nicht erschöpfend, insofern dabei namentlich von der Art seiner Verbindung mit dem Stellzeuge und vom Einflusse der Trägheit der bewegten Massen der zu regulirenden Maschine selbst abstrahirt wurde, so darf doch die Verwerflichkeit eines vollkommen astatischen Regulators auch ohne weitere Prüfung wenigstens dann schon jetzt als unzweifelhaft gelten, wenn sein astatischer Charakter auf solchen Umständen beruht, dass er durch die geringfügigste Unvollkommenheit seiner Ausführung oder nachträglich eintretende Aenderung seiner Verhältnisse in einen als Regulator offenbar ganz unbrauchbaren Mechanismus mit labilem relativem Gleichgewichtszustande übergehen könnte. —

Hinsichtlich der Art, wie ein Regulator mit dem Stellzeuge verbunden wird, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Regulator ist in zwangläufiger Verkettung mit dem Stellzeuge, so dass die Stellungsänderung des letzteren nur durch entsprechende Aenderung der Configuration des ersteren herbeigeführt werden kann, die daher auch zwischen weiteren Grenzen veränderlich sein muss, entsprechend einerseits der vollständigen Absperrung und andererseits dem Maximum der Zuflussöffnung oder der Zuflussdauer der motorischen Substanz, z. B. bei Dampfmaschinen der ganz geöffneten Drosselklappe oder dem Maximum



des Füllungsgrades. Indem ein solcher Regulator selbst das Stellzeug bewegt, kann er **direct wirkend** genannt werden.

b) Bei normaler Geschwindigkeit ist der Regulator und überhaupt die Maschine ausser Verbindung (kinematischer Verkettung) mit dem Stellzeuge, und es wird (bei üblicher Anordnung: siehe §. 122) diese Verbindung nur dadurch hergestellt, dass in Folge einer kleinen Geschwindigkeitsänderung die zwischen engen Grenzen veränderliche Configuration des Regulators die eine oder andere Grenze erreicht. Indem also ein solcher nicht selbst das Stellzeug bewegt, sondern nur die zu regulirende Maschine oder auch einen besonderen Hülfsmotor zwingt, dies zu thun, ist er als **indirect wirkend** zu bezeichnen.

Denkt man z. B. bei dem oben besprochenen idealen Centrifugalregulator (Fig. 109) den materiellen Punkt A durch eine starre Linie mit einem in der Regulatoraxe OC beweglichen Punkt B verbunden, der etwa als eine mit der Regulatorwelle prismatisch gepaarte Hülse materiell ausgeführt sein mag, so ist dieser Regulator direct wirkend, wenn die Hülse z. B. vermittels einer ihre Halsnuth umgreifenden Gabel unmittelbar und beständig mit dem Stellzeuge verkettet ist, so dass jede Verschiebung der Hülse eine entsprechende Lagenänderung des Stellzeuges zur Folge hat; dagegen ist der Regulator indirect wirkend, wenn etwa die Hülse, zwischen gewissen Grenzlagen unabhängig vom Stellzeuge verschieblich, in diesen Grenzlagen selbst die Kuppelung der Regulatorwelle mit dem einen oder anderen Endgliede eines Wendegetriebes vermittelt, so dass dadurch von der Regulatorwelle aus die Bewegung des Stellzeuges im einen oder anderen Sinne bewirkt wird.

Mit Rücksicht darauf, dass die Configurationsänderung eines indirect wirkenden Regulators nur durch seine eigenen Bewegungswiderstände, nicht zugleich durch diejenigen des Stellzeuges erschwert wird und dass auch diese Aenderungen zwischen weit engeren Grenzen stattfinden; ist sowohl sein Unempfindlichkeitsgrad ε wie auch (bei Voraussetzung eines mehr oder weniger statischen Charakters) sein Ungleichförmigkeitsgrad Δ kleiner, als für einen direct wirkenden unter übrigens gleichen Umständen. Abgesehen davon indessen, dass der Ungleichförmigkeitsgrad Δ des Regulators selbst von demjenigen des Ganges der durch ihn regulirten Maschine unterschieden werden muss, welch' letzterer in Folge grösserer Geschwindigkeitsschwankungen beim Uebergange aus einem Beharrungszustande in einen anderen hier grösser, als bei einem direct wirkenden Regulator sein kann, pflegt letzterer schon seiner grösseren Einfachheit wegen meistens vorgezogen zu werden. Ist aber der Bewegungswiderstand des Stellzeuges von



beträchtlicher Grösse, wie z. B. bei hydraulischen Kraftmaschinen behufs Aenderung der Aufschlagwassermenge durch Verstellung der Schütze, so ist die indirecte Wirkung vorzuziehen und kaum vermeidlich. Jedenfalls ist dabei in noch höherem Grade, als bei directer Wirkung, ein hinlänglich statischer Charakter, d. h. genügende Stabilität des Regulators unerlässlich, weil die sonst nach obiger Auseinandersetzung zu befürchtende beständige Schwankung desselben zwischen zwei Grenzlagen und der Maschine zwischen zwei Grenzgeschwindigkeiten (nicht zu verwechseln mit der unvermeidlichen Geschwindigkeitsänderung in den einzelnen Perioden bei periodischem Gange) dann um so leichter eintreten würde, je enger die Grenzen sind, zwischen denen hier die Configuration des Regulators veränderlich ist, und ausserdem deshalb schädlicher wäre, weil hier durch die Kuppelung der Regulatorwelle mit dem Stellzeuge im einen oder anderen Sinne nicht nur das mässige Arbeitsvermögen des Regulators selbst, sondern das grosse Arbeitsvermögen der ganzen Maschine zu ungehöriger Bewegung des Stellzeuges disponibel werden kann. Selbst die Verminderung der Stabilität durch solche demnächst näher zu besprechende Einrichtungen, wie sie den sogenannten pseudoastatischen Regulatoren eigenthümlich und bei directer Wirkung vortheilhaft sind, würde bei indirecter Wirkung durch nichts begründet sein, da der Ungleichförmigkeitsgrad Δ wegen Kleinheit des Unterschiedes zwischen ω' und ω'' für die wenig verschiedenen Grenzlagen des Regulators hier fast gar nicht vom Stabilitätsgrade abhängt. —

Diesen allgemeinen Bemerkungen über die Eigenschaften direct oder indirect wirkender Regulatoren lag zunächst die Voraussetzung einer solchen Einrichtung zum Grunde, durch welche die regulirende Wirkung lediglich von der augenblicklich stattfindenden Configuration des Regulators an sich abhängig gemacht wird, unabhängig davon, ob ihre Abweichung von der mittleren Configuration in der Zunahme oder Abnahme begriffen ist. Indessen sind auch und zwar sowohl direct wie indirect wirkende Regulatoren so eingerichtet worden, dass sie nur dann reguliren, nämlich Bewegung des Stellzeuges direct oder indirect bewirken, wenn und so lange ihre Configuration sich von der mittleren entfernt, wobei die Erwägung zum Grunde liegt, dass die störenden Geschwindigkeitsschwankungen beim Uebergange von einem Beharrungszustande in einen anderen grossen Theils dadurch verursacht werden, dass der Regulator in unverändertem Sinne den Zufluss der motorischen Substanz auch dann noch zu ändern fortfährt, wenn, nachdem durch seine Vermittelung die zu gross oder zu klein gewordene Geschwindigkeit wieder zur Abnahme oder Zunahme, also zur Annäherung

an die Normalgeschwindigkeit gebracht worden ist, er selbst gegen die Mittellage hin zurückgeht. Je nachdem letzteres der Fall ist, oder aber nur bei Vergrösserung des Unterschiedes der Configuration des Regulators von der mittleren die entsprechende Bewegung des Stellzeugs bewirkt wird, kann er als zweiseitig oder einseitig, doppelt oder einfach wirkend bezeichnet werden, auch mit Bodemer und Müller-Melchiors* als continuirlich oder intermittirend wirkend. Ein Regulator der letzteren Art muss selbst dann, wenn er indirect wirkend angeordnet wird, Configurationsänderungen zwischen weiteren Grenzen gestatten, womit dann auch ein weniger statischer Charakter nicht als ebenso unmotivirt ausgeschlossen zu werden braucht wie bei indirect continuirlicher Wirkung. —

Ausser den im Vorhergehenden besprochenen Umständen kommen zur Beurtheilung der Eigenschaften eines Regulators namentlich noch in Betracht: die Möglichkeit und Leichtigkeit der Adjustirung, d. h. der Umstand, ob und wie die zugehörige Normalgeschwindigkeit ω den Umständen entsprechend verändert werden kann, und ferner die Energie. Was diese letztere Eigenschaft betrifft, so wurde schon früher hervorgehoben, dass ein Regulator, um in Wirksamkeit zu kommen, einen um so grösseren Widerstand zu überwinden vermag, je mehr auf Empfindlichkeit verzichtet, ein je grösserer Unempfindlichkeitsgrad ε also zugelassen wird. Indem aber ε über eine gewisse Grenze hinaus nicht wachsen darf und doch der Regulator, wenigstens bei directer Wirkung, einen möglichst grossen Widerstand zu überwinden im Stande sein soll, ist das Verhältniss dieses Widerstandes W zum Unempfindlichkeitsgrade ε als ein Maass der Fähigkeit zu betrachten, mit gewisser Empfindlichkeit der Wirkung einen gewissen Widerstand überwinden zu können, und es werde dieses Verhältniss:

$$E = \frac{W}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

als die Energie des Regulators bezeichnet, indem dabei W als reducirter Bewegungswiderstand des Regulators verstanden wird, reducirt nämlich (d. h. angreifend und im entgegengesetzten Bewegungssinne des Angriffspunktes wirkend) auf die Hülse, überhaupt auf das bewegliche Glied, das bei directer Wirkung unmittelbar, bei indirecter mittelbar die Bewegung des Stellzeugs veranlasst. Namentlich im ersten Falle ist die Brauchbarkeit des Regulators in hohem Grade durch einen möglichst grossen Werth von E bedingt. —

* Dingler's polytechnisches Journal, 1876, Bd. 222, S. 505.



Schliesslich ist zu bemerken, dass die lediglich statischen Eigenschaften eines tachometrischen Regulators, die durch seine Energie, seinen Unempfindlichkeits- und Ungleichförmigkeitsgrad zu mathematischem Ausdrucke gebracht werden, das Verhalten und den Werth desselben nur unvollständig bestimmen, dass vielmehr zu vollständiger Beurtheilung wesentlich auch die mechanische Untersuchung des Gesetzes gehört, nach welchem bei eingetretener Störung des Gleichgewichtes zwischen Triebkraft und Widerstand (Nutz- und Bewegungswiderstand) der Uebergang aus dem früheren in einen neuen Beharrungszustand des Regulators selbst und der durch ihn zu regulirenden Maschine sich vollzieht; denn es kann der Fall sein, dass dieser Uebergang mit solchen Schwingungen des Regulators und Schwankungen der Maschinengeschwindigkeit verbunden ist, dass der Unterschied zwischen grösster und kleinster Geschwindigkeit bei diesen Schwankungen und somit der entsprechende Ungleichförmigkeitsgrad wesentlich grösser ist, als derjenige, der dem früheren und dem neuen Beharrungszustande entspricht. Die erschöpfende Untersuchung dieses Einflusses eines Regulators auf den Gang der betreffenden Maschine ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, indem dabei ausser seinem Stabilitätsgrade und der directen oder indirecten, continuirlichen oder intermittirenden Wirkung, deren Eigenthümlichkeiten durch jene Untersuchung erst in volles Licht gesetzt werden können, noch manche andere Umstände wesentlich mit in Betracht kommen, insbesondere die Trägheit der Massen des Regulators selbst und der zu regulirenden Maschine, ferner die Art, wie Triebkräfte und Widerstände eventuell von der Maschinengeschwindigkeit abhängen, und die Art der Einwirkung des Stellzeuges auf den Zufluss der motorischen Substanz, somit auch das Gesetz, nach welchem die Grösse der Triebkraft von der Lage des Stellzeuges abhängt. So sehr sich deshalb auch die Erfindung auf dem Gebiete des Maschinenbaues seit Jahren mit besonderer Vorliebe den Regulatoren für Kraftmaschinen zugewendet und eine nur schwer übersehbare reichhaltige Literatur zur Folge gehabt hat, so sind dabei doch fast nur die kinematischen und statischen Eigenschaften in Betracht gezogen worden, während die mechanische Untersuchung viel weniger ausgebildet ist, und zwar hauptsächlich in allgemeinen Zügen von J. Lüders* und nach seinem Vorgange mit specielleren Anwendungen auf bestimmte Fälle von L. Kargl.** Im Folgenden soll es sich zunächst um eine übersichtliche Classification und Rücksichtnahme auf die statischen

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1865, S. 402.

** Der Civilingenieur, Jahrgang 1871, S. 265 und S. 385; Jahrgang 1873, S. 422.



Eigenschaften der Regulatoren handeln, bevor auf die mechanische Untersuchung der tachometrischen und besonders der Centrifugalregulatoren in einem letzten Abschnitte eingegangen wird, der indessen auf erschöpfende Behandlung keinen Anspruch macht. Beispiele von indirecter und von intermittirender Wirkung werden vorher in §. 122 und in §. 123 besprochen.

a. Dynamometrische Regulatoren.

§. 106. Regulatoren, welche durch dieselbe Ursache in Thätigkeit gesetzt werden, die den Widerstand ändert.

Wegen grösstmöglicher Unmittelbarkeit ihrer Wirkung könnten solche Regulatoren auf den ersten Blick als die vollkommensten erscheinen, indem es denkbar ist, dass durch die Gleichzeitigkeit der Aenderung des Widerstandes und der durch den Regulator vermittelten, von derselben Ursache herrührenden Aenderung der bewegenden Kraft eine Geschwindigkeitsänderung ganz verhindert wird. Indessen ist zu berücksichtigen, dass eine solche nicht nur von einer Aenderung des Widerstandes, sondern auch von einer Aenderung der bewegenden Kraft herrühren kann, z. B. bei Windrädern als Folge veränderlicher Windstärke, bei hydraulischen Kraftmaschinen in Folge veränderlichen Gefälles, bei Dampfmaschinen wegen ungleichmässiger Feuerung und entsprechender Verdampfung im Kessel. oder wenn eine Dampfmaschine die Wirkung einer variablen anderen Triebkraft nur ergänzen, z. B. eine Schiffsmaschine den veränderlichen Winddruck auf die Segel unterstützen soll. Aenderungen der Geschwindigkeit, die von solchen Aenderungen der Triebkraft herrühren, würden durch entsprechende Aenderung der Zuflussmenge der motorischen Substanz (bedingt bei Windrädern durch die bedeckte Flügelfläche, bei hydraulischen Motoren durch die Schützenöffnung, bei Dampfmaschinen durch die Oeffnung des Zulassventils oder durch den Expansionsgrad des Dampfes) zu compensiren sein, werden aber thatsächlich durch Regulatoren von der hier in Rede stehenden Art nicht verhindert oder rückgängig gemacht, so dass diese schon deshalb nur in solchen Fällen nützliche Anwendung finden können, in denen es, wie bei Dampfschiffen, weniger auf Einhaltung einer Normalgeschwindigkeit, als auf den Schutz der Maschine gegen die schädliche Wirkung schnell eintretender und bedeutender Aenderungen des Widerstandes ankommt. Ausserdem liegt es in der Natur der Sache, dass ein Regulator dieser Art im Allgemeinen nur gegen eine einzige Ursache der Aenderung des Widerstandes empfindlich ist, während dergleichen



besonders bei Kraftmaschinen, die ausgedehnte Gruppen von Arbeitsmaschinen zu treiben haben, thatsächlich sehr mannigfach sich geltend machen können.

Hiernach ist es erklärlich, wenn Regulatoren dieser Classe, so viel bekannt, bisher nur bei Schiffsdampfmaschinen praktische Anwendung gefunden haben. Es handelt sich hier darum, dass, wenn durch Schlingern des Schiffes (Drehung um eine Längsaxe) ein Schaufelrad allzu tief in das Wasser eingetaucht wird, somit einen schnell und beträchtlich vergrösserten Widerstand findet, sofort durch dieselbe Ursache das Dampfzulassventil weiter geöffnet, oder wenn durch das Stampfen des Schiffes (Drehung um eine Queraxe) die Schiffsschraube theilweise aus dem Wasser gehoben wird und dadurch die Maschine in beschleunigte Bewegung zu kommen droht, sofort das Ventil mehr geschlossen werde. Das zu bewirken ist auf zweierlei Weise versucht worden: durch ein mit der Drosselklappe verbundenes schweres Pendel, das dieselbe entsprechend dreht, indem es, beständig fast ganz vertical hängend, den Schwankungen des Schiffes relativ folgt, sowie auch durch Jensen's sogenannten Marine Governor, einen in der Schiffswand befestigten, nach aussen und innen offenen Cylinder mit einem darin anschliessend beweglichen, mit der Drosselklappe verbundenen Kolben, dessen Gleichgewichtslage durch den von aussen wirkenden veränderlichen hydrostatischen Druck und durch einen von innen wirkenden, mit der Einwärtsbewegung des Kolbens zunehmenden Federdruck bedingt wird.

§. 107. Regulatoren, die durch Aenderungen des Widerstandes in Thätigkeit kommen.

Haben auch solche Regulatoren nicht die mangelhafte Einseitigkeit der in §. 106 besprochenen, nur gegen eine bestimmte Ursache der Widerstandsänderung empfindlich zu sein, so theilen sie doch mit ihnen den Mangel, dass sie solche Geschwindigkeitsänderungen nicht hindern oder rückgängig machen, die von einer Aenderung der Triebkraft herrühren. Von einer bestimmten oder zwischen engen Grenzen liegenden Normalgeschwindigkeit kann deshalb auch bei ihnen nicht die Rede sein.

Wenn freilich der Widerstand, wie z. B. bei Schiffen, eine Function der Geschwindigkeit ist, so könnte es scheinen, dass Regulatoren dieser Art mittelbar auch durch Triebkraftänderungen bedingte Geschwindigkeitsänderungen reguliren könnten, indem dieselben durch die entsprechenden Widerstandsänderungen auf den Regulator einwirken. In der That aber ist das deshalb nicht der Fall, weil der Widerstand, wenn er überhaupt von

der Geschwindigkeit abhängt, dann jedenfalls gleichzeitig mit ihr ab- und zunehmen wird, der Regulator aber natürlich so eingerichtet sein muss, dass er bei zu- oder abnehmendem Widerstande auch die Triebkraft im ersten Falle vergrössert, im zweiten verkleinert. Nähme nun letztere selbständig z. B. ab, so würde entsprechend die Geschwindigkeit und damit der Widerstand abnehmen, der Regulator folglich die Triebkraft noch mehr verkleinern und somit das Uebel noch vergrössern.

Jedenfalls müsste, wenn der Regulator wenigstens eine von einer Widerstandsänderung herrührende Geschwindigkeitsänderung vollkommen verhindern soll, seine Verbindung mit dem Stellzeuge so eingerichtet werden, dass eine gewisse Aenderung des Widerstandes gerade eine solche Aenderung der Triebkraft zur Folge hat, wie sie der Bedingung gleich bleibender Geschwindigkeit entspricht, was im Allgemeinen auf einfache Weise kaum zu erreichen sein, wenigstens eine gewisse Leitcurve nöthig machen wird, deren Construction die Kenntniss des Abhängigkeitsgesetzes zwischen der Grösse des Widerstandes und der Configuration des Regulators einerseits, sowie zwischen der Grösse der Triebkraft und der Lage des Stellzeuges andererseits voraussetzt.

Die in Vorschlag gebrachten Regulatoren dieser Classe beruhen darauf, dass die Transmissionswelle, durch welche die Nutzarbeit der Kraftmaschine auf die von ihr zu treibenden Arbeitsmaschinen übertragen wird, an geeigneter Stelle unterbrochen ist und beide Theile A, A' durch eine elastische Kuppelung verbunden sind. Eine Grössenänderung des Widerstandes hat eine entsprechende Formänderung jener elastischen Kuppelung und somit eine relative Verdrehung der coaxialen Wellenstücke A, A' zur Folge, die durch Uebertragung auf das Stellzeug zur Regulirung benutzt werden kann. Je nach der besonderen Beschaffenheit der elastischen Kuppelung und der Art, wie die relative Verdrehung der Wellenstücke A, A' die Lagenänderung des Stellzeuges bedingt, sind verschiedene Anordnungen möglich.

Nach einem Vorschlage von Poncelet z. B., der die in Rede stehenden Regulatoren im Princip zuerst angegeben hat, trägt das eine der Wellenstücke A, A' am Ende eine Scheibe mit hervorragenden Stiften, die sich gegen radial gerichtete Stahlfedern am Ende des anderen stützen. Nahe dieser Stelle sind auf A und A' zwei gleiche Zahnräder R und R' coaxial befestigt, die in kleinere, unter sich gleich grosse Getriebe r, r' auf einer parallel mit AA' gelagerten Welle B eingreifen. Von diesen Getrieben ist nur das eine, etwa r auf B befestigt, das andere r' aber durch ein Schraubenpaar mit B verbunden, indem die Welle B an betreffender Stelle ein Schraubengewinde und die Nabe von r' das entsprechende



Muttergewinde enthält. Wenn also mit R, R', r, r' zugleich die Theilrisshalbmesser der betreffenden Räder bezeichnet werden, so hat eine relative Verdrehung der Wellenstücke A, A' und somit der Räder R, R' um den Winkel α eine relative Verdrehung von r' gegen r und somit gegen die Welle B um den Winkel

$$\frac{R}{r}\alpha = \frac{R'}{r'}\alpha$$

zur Folge und dadurch, wenn s die Steigung des Schraubenpaares bedeutet, eine Axialverschiebung des Rades r' auf der Welle B im Betrage

$$\frac{R}{r}\frac{\alpha}{2\pi}s,$$

die zur Bewegung des Stellzeuges in ähnlicher Weise benutzt werden kann, wie die Verschiebung der Hülse eines Centrifugalregulators auf der Regulatorwelle (§. 105), und zwar in solchem Sinne, dass bei Vergrösserung des Widerstandes auch die Triebkraft, bezw. ihre durchschnittliche Arbeitsstärke vergrössert, bei Verkleinerung jenes auch diese verkleinert, und so ein möglichst gleichförmiger Gang der Maschine erhalten wird. Natürlich muss das Getriebe r' hinlänglich breit sein, um trotz seiner Axialverschiebung längs der Welle B mit dem Rade R' in Eingriff zu bleiben.

Sofern aber die Gleichförmigkeit des Ganges auch durch eine Aenderung der Triebkraft gestört werden kann, ist zu bemerken, dass dabei ein solcher Regulator nicht nur wirkungslos, sondern von schädlicher Wirkung wäre. Denn die Gestaltsänderung der elastischen Kuppelung findet in gleichem Sinne, somit auch die Axialverschiebung des Rades r' auf der Welle B in gleichem Sinne statt, mag der Widerstand mit entsprechender Geschwindigkeitsabnahme oder die Triebkraft mit entsprechender Geschwindigkeitszunahme wachsen; in beiden Fällen wird der Regulator eine Zunahme der Triebkraft, bezw. ihrer mittleren Arbeitsstärke bewirken und somit im zweiten Falle die Geschwindigkeit nur noch mehr vergrössern.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, könnte man die Anordnung des Regulators so abändern, dass ohne Unterbrechung der Transmission zwischen der Kraft- und den Arbeitsmaschinen von ihr eine Welle A abgezweigt wird, die vermittels elastischer Kuppelung die damit coaxiale, jetzt aber ausser Verbindung mit einer Arbeitsmaschine stehende, vielmehr nur ein Schwungrad oder überhaupt eine Masse von beträchtlichem Trägheitsmomente tragende Welle A' zu treiben hat. Bei gleichförmigem Gange der Maschine entspricht dann der die Gestalt der Kuppelung bestimmende Widerstand im Wesentlichen nur der Reibung dieser Welle in ihren Lagern. Nimmt



aber die Geschwindigkeit der Maschine aus irgend einem Anlasse zu oder ab, so nimmt auch jener Widerstand zu oder ab um den Betrag der Kraft, die zu entsprechender Beschleunigung der Welle A' aufzuwenden ist, bezw. durch ihre Verzögerung auf die Welle A übertragen wird. Die Kuppelung erfährt somit eine Gestaltsänderung von entgegengesetztem Sinne im einen oder anderen Falle, die ebenso, wie vorhin bemerkt wurde, zur Regulirung benutzt werden kann. Indem ein solcher Regulator durch die Beschleunigung oder Verzögerung der Maschine in Wirksamkeit käme, bildete er den Uebergang von den durch geänderten Widerstand in Function kommenden dynamometrischen zu den durch geänderte Geschwindigkeit in Function kommenden tachometrischen Regulatoren; indem aber solche Wirkung in gleicher Weise stattfände, wie gross auch die Anfangsgeschwindigkeit sein mag, von welcher aus die Beschleunigung oder Verzögerung beginnt, so würde nach wie vor von einer Normalgeschwindigkeit auch bei solchen Regulatoren nicht die Rede sein können. Auf demselben Princip beruht ein von Siemens angegebener Regulator,* nur mit dem Unterschiede, dass statt der elastischen Kuppelung eine Zahnradkette benutzt wird, bestehend aus je einem gleichen auf A und A' fest sitzenden Kegelrade und einem in beide zugleich eingreifenden conischen Zwischenrade, das nicht fest gelagert, sondern in Verbindung mit dem Stellzeuge zwischen Grenzen beweglich ist; durch die Erfordernisse des ungestörten Zahneingriffes wird dann aber diese Beweglichkeit enger begrenzt, als die Veränderlichkeit der Form einer elastischen Kuppelung.

b. Tachometrische Regulatoren.

1. Interferenz-Regulatoren.

§. 108. Wesen und Eigenschaften im Allgemeinen.

Das Princip dieser Regulatoren ist folgendes. Von zwei Maschinentheilen A und B ist der eine A in zwangläufiger Verkettung mit der zu regulirenden Maschine, so dass seine Geschwindigkeit derjenigen der Maschine selbst stets in demselben Verhältnisse proportional bleibt, während die Geschwindigkeit des anderen Theiles B, der sich nicht in zwangläufiger

* G. Herrmann: Die Mechanik der Zwischenmaschinen (zweite Auflage der 1. Abtheilung des 2. Theils von Weisbach's Ingenieur- und Maschinen-Mechanik), §. 204.

Verkettung mit der Maschine befindet, oder wenigstens eine Componente dieser Geschwindigkeit constant ist. Durch Interferenz der Bewegungen von A und B, beziehungsweise der Bewegung von A und der constanten Bewegungscomponente von B, wird dann einem Gliede C eine Bewegung ertheilt, die im einen oder anderen Sinne stattfindet, jenachdem die Geschwindigkeit von A über oder unter einem gewissen Werthe liegt, welcher der Normalgeschwindigkeit der Maschine entspricht und für den die Bewegung von C = Null ist. Indem das Glied C zwangläufig mit dem Stellzeuge verkettet wird, vermittelt es einen vermehrten oder verminderten Zufluss der motorischen Substanz, jenachdem die Geschwindigkeit der Maschine unter jene Normalgeschwindigkeit sinkt oder sich darüber erhebt.

Regulatoren dieser Art sind astatisch und direct wirkend. Durch Aenderung der constanten Geschwindigkeit bezw. Geschwindigkeitscomponente des Gliedes B können sie leicht verschiedenen Normalgeschwindigkeiten der Maschine angepasst werden.

Abgesehen von verschiedenen Einrichtungen des Interferenzmechanismus, der dazu dient, die Bewegung des Gliedes C durch Interferenz der Bewegungen von A und B zu Stande zu bringen, und der im einfachsten Falle ein einzelnes Elementenpaar A, B sein kann, dessen Element B eine constante und eine veränderliche Bewegungscomponente hat und hinsichtlich der letzteren selbst als das Glied C verwendet wird, sind verschiedene Fälle namentlich insofern zu unterscheiden, als dem Gliede B seine gleichförmige Bewegung bezw. Bewegungscomponente entweder selbständig durch einen besonderen Motor, z. B. durch ein Uhrwerk, oder aber durch die zu regulirende Maschine mitgetheilt wird unter Benutzung ähnlicher Hülfsmittel, wie sie bei Uhrwerken Verwendung finden, um ihren Gang von der Grösse der Triebkraft fast unabhängig zu machen.

Der Umstand, dass der Reibungswiderstand des Interferenzmechanismus eine Art von Kuppelung bildet, wodurch die Bewegung des Gliedes B von der des Gliedes A und somit vom Gange der Maschine etwas beeinflusst wird, würde als Nachtheil nicht zu betrachten sein, wenn dadurch nur die Gleichförmigkeit der Bewegung von B im Sinne der Bewegung von A etwas gestört, somit der astatische Charakter des Regulators in den eines etwas statischen verwandelt und nicht zugleich die Empfindlichkeit desselben vermindert würde. Kann auch letzterer Einfluss durch Vergrösserung des zur Bewegung des Gliedes B disponiblen Arbeitsvermögens der Hülfsmaschine oder der zu regulirenden Maschine selbst herabgezogen werden, so sind doch dergleichen Regulatoren besonders wegen Mangels genügender Einfachheit zu ausgedehnterer Verwendung nicht gekommen.

§. 109. Beispiele.

1. Bei dem speciell für Wasserräder bestimmten Regulator der Gebrüder Laukner ist die Wasserradwelle auf ihrer Verlängerung mit Schraubengewinde versehen, während die Nabe eines kleinen Hülfswasserrades das entsprechende Muttergewinde enthält; letzteres Rad rotirt bei constantem Gefälle, constanter Aufschlagwassermenge und bei constantem Bewegungswiderstande mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 um die gemeinsame Axe. Ist nun auch die Winkelgeschwindigkeit ω des zu regulirenden Hauptwasserrades $A = \omega_0$, so bleibt das Hülfsrad B in relativer Ruhe gegen dasselbe; ist aber ω von ω_0 verschieden, so erhält B gegen A, unter s die Steigung des Schraubenpaares verstanden, eine Axialverschiebung mit der Geschwindigkeit:

$$v = (\omega - \omega_0)\frac{s}{2\pi}$$

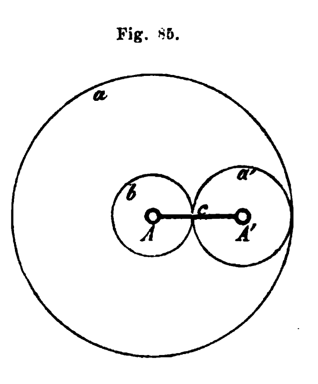
im einen oder anderen Sinne, jenachdem $\omega - \omega_0$ positiv oder negativ ist, die dann leicht zu entsprechender Stellungsänderung der Schütze des Hauptrades A benutzt werden kann. Zur Adjustirung für eine andere Normalgeschwindigkeit ω_0 bedarf es nur einer Aenderung des Aufschlagwasserquantums des kleinen Hülfsrades.

Durch den in solchem Falle beträchtlichen Widerstand des Stellzeuges wird indessen bei $\omega \gtrless \omega_0$ der Widerstand des regulirenden Rades B vergrössert, während die Reibung im Schraubengewinde eine Art von Kuppelung zwischen A und B bildet, wodurch entweder die Triebkraft des Hülfsrades B unterstützt oder sein Widerstand noch mehr vergrössert wird, jenachdem $\omega > \omega_0$ oder $\omega < \omega_0$ ist. Bei zunehmender Geschwindigkeit ω von A werden sonach zwar die Reibung des Stellzeuges einerseits und die Reibung im Gewinde andererseits sich theilweise in ihrer störenden Einwirkung auf die Gleichförmigkeit des Ganges von B aufheben, bei abnehmender Geschwindigkeit des Hauptrades aber muss auch die Geschwindigkeit von B wesentlich abnehmen, weshalb weder auf sehr kleinen Unempfindlichkeitsgrad ε, noch auf kleinen Ungleichförmigkeitsgrad Δ (§. 105) zu rechnen sein wird, falls nicht das Hülfsrad B und seine Aufschlagwassermenge ungebührlich gross gemacht werden.

2. Sehr sinnreich, allerdings auch der wünschenswerthen Einfachheit ermangelnd, ist der hierher gehörende Pendelregulator von Cohen, David und Siama. Ein um die Axe A einer fest gelagerten Welle drehbares, innen verzahntes und aussen mit einer umlaufenden Rinne ver-

sehenes Rad a (Fig. 85) wird durch eine umgelegte Schnur von der zu regulirenden Maschine angetrieben; indem es aber durch eine Spiralfeder mit einem um A drehbaren Steigrade verbunden ist, das durch Cylinderhemmung (siehe später) vermittels eines schweren Pendels in gleichförmig absetzender Bewegung erhalten wird, ist seine eigene Bewegung eine stetige Rotation um A mit nur periodisch etwas veränderlicher, im Mittel aber constanter Winkelgeschwindigkeit ω_a, während die Schnur im einen oder anderen Sinne in der Rinne relativ gleitet, wenn die Geschwindigkeit der Maschine grösser oder kleiner, als diejenige ist, welcher ohne Gleitung dieser Schnur und unabhängig vom Pendel die Winkelgeschwindigkeit ω_a des Rades a entsprechen würde. Um die Axe A ist ferner unabhängig vom Rade a ein aussen verzahntes kleineres Rad b drehbar, welches, indem es zwangläufig mit der Maschine verkettet ist, um A mit einer der Maschinengeschwindigkeit proportionalen Winkelgeschwindigkeit ω_b rotirt. Unabhängig von a und b ist endlich um A drehbar ein Hebel c, der das zugleich in a und b eingreifende Zahnrad a' trägt, indem er damit durch ein Drehkörperpaar, dessen Axe A' parallel A, gepaart ist. Der Hebel, mit horizontaler Mittellage zwischen zwei Grenzlagen schwingend, die der gänzlichen Absperrung und dem Maximalzuflusse der motorischen Substanz entsprechen, ist über A' hinaus verlängert zu denken; an dieser Verlängerung, die seine Verkettung mit dem Stellzeuge vermittelt, ist er durch ein Gewicht G belastet, das ihn im Sinne vermehrten Zuflusses der motorischen Substanz zu drehen strebt.

Fig. 85.



Die in §. 108 mit A, B und C bezeichneten Glieder sind hier beziehungsweise das Rad b, das Rad a und der Hebel c; die Winkelgeschwindigkeit, womit sich c um die Axe A dreht, sei $= \omega_c$ und zwar algebraisch verstanden, nämlich positiv oder negativ gesetzt, jenachdem der Drehungssinn mit demjenigen des Rades b oder mit demjenigen des Rades a übereinstimmend ist. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_b und ω_a der letzteren, von denen mit Bezug auf Fig. 85 das Rad b links herum, a rechts herum rotirt, sind absolut verstanden. Aus §. 64, Gl. (4) folgt dann mit $a' = b'$ und indem a und ω_a durch $-a$ und $-\omega_a$ ersetzt werden (entsprechend der inneren Verzahnung von a und seinem Drehungssinne, der dem des Rades b und dem des Hebels bei positivem Werthe von ω_c entgegengesetzt ist):

$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{b}(\omega_a + \omega_c)$$

$$(a + b)\,\omega_c = b\,\omega_b - a\,\omega_a,$$

unter a und b hier die Theilrisshalbmesser der gleich bezeichneten Räder verstanden. Für $\omega_b = \frac{a}{b}\omega_a$ ist $\omega_c = 0$, d. h. der Hebel in Ruhe. Wird ω_b grösser, so wird ω_c positiv, entsprechend einer solchen Drehung des Hebels, durch welche unter Hebung des Gewichtes G der Zufluss motorischer Substanz vermindert wird; die Schnur gleitet dabei vorauseilend in der Rinne des Hohlrades a. Ist aber $\omega_b < \frac{a}{b}\omega_a$, so ist ω_c negativ, entsprechend einer umgekehrten, nämlich solchen Drehung des Hebels c, dass der Zufluss motorischer Substanz vermehrt wird; die Arbeit der Schwere des sinkenden Gewichtes G unterstützt dabei das Arbeitsvermögen des schwingenden Pendels, um das jetzt vorauseilende relative Gleiten des Rades a gegen die Schnur ohne wesentliche Störung der Pendelschwingungen zu ermöglichen.

Durch Veränderung der Pendellänge lässt sich dieser Regulator leicht für verschiedene Normalgeschwindigkeiten der Maschine, entsprechend verschiedenen Werthen von ω_a, einrichten; auch ist seine Empfindlichkeit ohne Zweifel genügend. Bei der Ausführung ist es rathsam, den Hebel c nicht unmittelbar mit dem Stellzeuge zu verketten, sondern vermittels eines anderen um A drehbaren Hebels, der von jenem mit Hülfe eines Stiftes am einen, in einen Schlitz am anderen eingreifend, mitgenommen wird. Bei passender Länge dieses Schlitzes kann es erreicht werden, dass der Hebel c um einen kleinen Winkel drehbar ist, ohne auf das Stellzeug zu wirken, dass also insbesondere bei periodischem Gange der Maschine der Regulator nicht schon durch die Geschwindigkeitsänderungen in den einzelnen Perioden, sondern erst durch Aenderungen der mittleren Periodengeschwindigkeit in Wirksamkeit kommt.

2. Hydraulische Regulatoren.

§. 110. **Wesen und Eigenschaften im Allgemeinen.**

Das Wesen dieser Regulatoren besteht darin, dass die Gleichgewichtslagen eines in verticaler Richtung beweglichen und mit dem Stellzeuge verbundenen Körpers K abhängig gemacht werden von den Mengen einer gewissen Flüssigkeit, die gleichzeitig von der Maschine in einen unter K befindlichen Gefässraum gefördert werden und aus einer Oeffnung in der

Wand des Gefässes ausfliessen. Indem erstere proportional der Geschwindigkeit der zu regulirenden Maschine ist, wird der Regulator statisch oder astatisch, jenachdem die einer gewissen Zeit entsprechende Ausflussmenge fraglicher Flüssigkeit von der Lage des Körpers K abhängig oder, z. B. entsprechend einer constanten Belastung von K, constant gemacht wird; denn aus dem Umstande, dass im Gleichgewichtszustande die Mengen gleichzeitig ein- und ausfliessender Flüssigkeit einander gleich sind, ergiebt sich im ersten Falle die Höhenlage des Körpers K bei mittlerem Gleichgewichtszustande abhängig von der Maschinengeschwindigkeit, während im zweiten Falle ein mittlerer Gleichgewichtszustand in allen Lagen von K überhaupt nur bei einer einzigen Geschwindigkeit möglich ist. Nach den allgemeinen Erörterungen in §. 105 ist es in diesem letzteren Falle unerlässlich (übrigens auch bei den selteneren Ausführungen des ersten Falles bisher geschehen), den Regulator direct wirkend anzuordnen.

Die Adjustirung für verschiedene Normalgeschwindigkeiten der Maschine kann bei statischen Regulatoren von solcher Art durch Aenderung der Beziehung zwischen der Höhenlage des Körpers K und der pro Secunde ausfliessenden Flüssigkeitsmenge, bei astatischen durch Aenderung dieser Flüssigkeitsmenge selbst, nämlich dort durch die Aenderung der Ausflussöffnung, bezw. des Ausflusswiderstandes, hier entweder ebenso oder durch Aenderung der Belastung des Körpers K geschehen. Dies wird deutlicher aus den folgenden Beispielen von Wasser- und Luftregulatoren, als welche, jenachdem die ihre Wirkung vermittelnde Flüssigkeit Wasser oder Luft ist, die hier in Rede stehenden Regulatoren unterschieden werden können.

§. 111. Beispiele.

1. Bei dem als Schwimmerregulator zu bezeichnenden statischen Wasserregulator ist der im vorigen Paragraph allgemein mit K bezeichnete Körper ein Schwimmer, steigend und sinkend mit der freien Wasseroberfläche in einem Behälter, in den die Maschine vermittels einer kleinen Pumpe beständig Wasser fördert, das durch eine Oeffnung im Boden oder durch ein Ansatzrohr wieder ausfliesst, insbesondere z. B. behufs fortgesetzter Circulation in den Saugebehälter der Pumpe zurückfliesst. Ist h die Höhe der freien Wasseroberfläche im Behälter über dem Schwerpunkte der Ausflussmündung, bezw. über dem Unterwasserspiegel, so ist unter übrigens gegebenen Umständen die Ausflussmenge pro Secunde proportional $\sqrt{h}$, während die gleichzeitig in den Behälter geförderte, im Beharrungs-

zustande ebenso grosse Wassermenge proportional der Maschinengeschwindigkeit ω ist. Sind also h' und h'' die Grenzwerthe von h, so ist nach §. 105, Gl. (3) und (5) der Ungleichförmigkeitsgrad des Regulators:

$$\Delta = 2\frac{\sqrt{h'} - \sqrt{h''}}{\sqrt{h'} + \sqrt{h''}} + \varepsilon.$$

Das Spiel des Schwimmers ist etwas $< h' - h''$ mit Rücksicht darauf, dass er, wenn er entgegen dem Bewegungswiderstande steigt, etwas tiefer, wenn er sinkt, etwas weniger tief eingetaucht ist, als bei mittlerem, nur durch Eigengewicht, Belastung und Auftrieb bedingtem Gleichgewichtszustande. Durch Aenderung der Ausflussöffnung oder des hydraulischen Bewegungswiderstandes im Ausflussrohre mit Hülfe eines Hahnes oder dergleichen kann das Verhältniss der Ausflussmenge pro Secunde zu $\sqrt{h}$ verändert und somit der Regulator verschiedenen Normalgeschwindigkeiten der Maschine angepasst werden.

2. Der Regulator von Schiele ist ein astatischer Wasserregulator. Eine Centrifugalpumpe drückt dabei Wasser in einen verticalen Cylinder unter einen mit etwas Spielraum darin beweglichen beschwerten Kolben K, so dass das Wasser durch jenen Spielraum zwischen Kolben und Cylinderwand hindurch und in den Saugebehälter der Pumpe zurückfliesst. Der Gleichgewichtszustand des schwebenden Kolbens ist dadurch bedingt, dass die den specifischen Druck desselben auf seine Unterfläche messende Wassersäulenhöhe

$$h = (1 + \varsigma)\frac{v^2}{2g}$$

ist, unter ς einen hydraulischen Widerstandscoefficienten und unter v die Geschwindigkeit verstanden, mit der das Wasser den ringförmigen Spielraum durchströmt. Indem hier h bei mittlerem Gleichgewichtszustande und bei gegebener Belastung des Kolbens constant, v aber dem pro Secunde von der Pumpe gelieferten Wasserquantum, also der Maschinengeschwindigkeit proportional ist, erfordert das Gleichgewicht unabhängig von der augenblicklichen Lage des Kolbens eine ganz bestimmte solche Geschwindigkeit, die indessen mit h, also mit der Kolbenbelastung variirt werden kann.

3. Im Princip von gleicher Wirkungsweise, wie der so eben besprochene Schiele'sche Regulator, ist der astatische Luftregulator von Molinié, der namentlich zur Regulirung von Wasserrädern Verwendung gefunden hat. Ein durch Krummzapfen von der Maschine betriebener doppelter Blasebalg fördert einen stetigen Luftstrom in einen Raum, der von einem unteren festen, einem oberen auf- und abwärts beweglichen Boden und

einem beide verbindenden, in Falten gelegten Ledermantel gebildet wird. Der obere Boden als der im vorigen Paragraph mit K bezeichnete Körper ist durch ein Gewicht beschwert und mit Auslassventilen für die eingeblasene Luft versehen; er steht in directer Verbindung mit dem Stellzeuge. Die Anpassung an verschiedene Normalgeschwindigkeiten wird durch Hubänderung der Auslassventile bewirkt.

3. Windflügel-Regulatoren.

§. 112. Wesen und Eigenschaften im Allgemeinen.

Der Windflügelregulator ist nicht zu verwechseln mit dem Windfange, wodurch bei Uhrwerken, deren gleichförmiger Gang ihr einziger oder Hauptzweck ist, der Widerstand bei zu- oder abnehmender Geschwindigkeit vergrössert oder verkleinert wird. Während dabei der Luftwiderstand rotirender Windflügel von vergleichbarer Grösse mit der Triebkraft ist und deshalb seine Aenderung den Gang des Uhrwerkes unmittelbar und wesentlich zu beeinflussen vermag, ist er hier von sehr kleiner Grösse im Vergleich mit der Triebkraft, so dass er nur mittelbar von ausreichender Wirkung sein kann.

In der Art dieser Wirkung stehen die Windflügelregulatoren den Centrifugalregulatoren am nächsten. In beiden Fällen wird eine von der Geschwindigkeit der Maschine abhängige Kraft (dort der Luftwiderstand, hier die Fliehkraft) benutzt, um in Verbindung mit einer anderen entgegen wirkenden von der Maschinengeschwindigkeit unabhängigen Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) die Gleichgewichtslagen des direct oder indirect mit dem Stellzeuge verbundenen Regulatorgliedes, z. B. der auf der Regulatorwelle gleitenden Hülse zu bedingen. Beide Arten von Regulatoren können je nach ihrer Anordnung statisch oder astatisch sein.

So viel bekannt, sind Windflügelregulatoren besonders bei Schiffsdampfmaschinen mit Erfolg angewendet worden. Wegen veränderlicher Lage der Maschinentheile gegen die verticale Richtung muss dabei die Federkraft statt der Schwerkraft als mitwirkende Kraft benutzt werden.

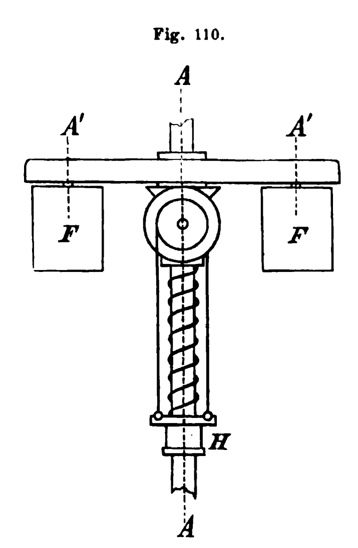
Wenn die um die Axe A der Regulatorwelle rotirenden Windflügel als materielle ebene Flächen F (ebene Platten von kleiner Dicke) ausgeführt werden, die um Axen A' parallel A drehbar und in verschiedenen Lagen feststellbar sind, so kann die Adjustirung für verschiedene Normalgeschwindigkeiten der Maschine in allen Fällen durch Aenderung des Winkels zwischen den Ebenen F und AA' bewirkt werden.

Durch Vergrösserung der Flügelfläche F wird zwar die Energie des Regulators vergrössert, aber auch gleichzeitig der durch ihn eingeführte Widerstand, also Verlust an Arbeitsvermögen der Maschine, und zwar in höherem Grade, als es bei Centrifugalregulatoren durch eine in gleicher Absicht stattfindende Vergrösserung der rotirenden Masse geschieht. Mit Rücksicht hierauf kann die Unterstützung der Energie durch ein mit dem Windflügelrade verbundenes Schwungrad von Vortheil sein, namentlich dann, wenn es sich, wie bei Schiffsmaschinen, um ihren Schutz gegen den schädlichen Einfluss sehr schnell eintretender Geschwindigkeitsänderungen handelt.

§. 113. Beispiele.

1. Windflügelregulator von Silver.* — Auf einer durch die Maschine in Rotation versetzten Welle (Regulatorwelle), deren Axe A (Fig. 110) nicht vertical zu sein braucht, sitzt relativ drehbar ein kleines Schwungrad mit seitwärts hervorragenden rechteckigen Windflügeln F, die durch Drehung um ihre mit A parallelen Axen A' unter verschiedenen Winkeln gegen die Ebenen AA' eingestellt werden können. Mit der Nabe des Schwungrades ist coaxial ein kleines Kegelrad fest verbunden, eingreifend in zwei andere, unter sich gleiche Kegelräder, die um je einen beiderseits von einer Verstärkung der Regulatorwelle hervorstehenden Zapfen drehbar sind. Diese letzteren Räder sind coaxial mit Kettenrollen fest verbunden, deren Ketten, bei den einander stets entgegengesetzten Drehungen der Rollen sich gleichzeitig auf- oder abwickelnd, auf die Hülse H ziehend wirken entgegen dem Drucke einer Spiralfeder, welche, die Regulatorwelle umgebend, am anderen Ende sich gegen ihre erwähnte Verstärkung stützt.

Fig. 110.



Bei mittlerem Gleichgewichtszustande der Hülse rotiren die Räder gemeinschaftlich mit der Regulatorwelle ohne sich auf einander abzuwälzen, indem das Schwungrad, trotzdem es nicht fest mit der Welle verbunden

* Siehe den Aufsatz von J. Lüders „über die Regulatoren" in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 65, sowie auch dieselbe Zeitschrift, 1860, S. 20.

ist, doch dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω mit ihr besitzt. Dieser Zustand ist bedingt durch die Gleichheit des Federdruckes auf die Hülse und des entgegengesetzt gerichteten auf sie reducirten Luftdruckes gegen die Windflügel. Ebenso wie der Luftwiderstand an sich, ist er auch nach Reduction auf die Hülse nur von ω abhängig, da das Reductionsverhältniss bei vorliegender Anordnung von der Stellung der Hülse unabhängig ist; indem aber von dieser der Federdruck wesentlich abhängt, ist der Regulator statisch. Angenähert astatisch kann er dadurch gemacht werden (Construction von Hamilton), dass die Kettenrollen und Ketten durch Kurbeln und Kurbelstangen ersetzt werden in solcher Anordnung, dass das Uebertragungsverhältniss des Luftwiderstandes von den Flügeln auf die Hülse mit deren Stellung entsprechend dem Drucke der Feder sich ändert. Ein vollkommen astatischer solcher Regulator könnte durch die Substitution von passend gekrümmten Spiralscheiben für die runden Kettenrollen oder einfacher dadurch erzielt werden, dass, was freilich nur bei stationären Maschinen anginge, unter Beibehaltung des der Anordnung gemäss Fig. 110 entsprechenden constanten Uebertragungsverhältnisses die Feder durch ein die Hülse belastendes Gewicht ersetzt würde.

Nimmt die Geschwindigkeit der Maschine zu, so wächst der Luftwiderstand, das Gleichgewicht zwischen ihm und dem Drucke der Feder oder des Belastungsgewichtes auf die Hülse wird gestört, und wenn der einseitig überschüssige Druck auf dieselbe gross genug ist, um den jetzt entwickelten Reibungswiderstand des Stellzeuges überwinden zu können, so erfolgt die Verschiebung der Hülse im Sinne einer Verstärkung des Federdruckes, bezw. Hebung des Belastungsgewichtes, wobei eine relative Drehung des Schwungrades gegen die Regulatorwelle in solchem Sinne stattfindet, dass ersteres gegen letztere zurückbleibt. Diese Wirkung wird unterstützt, also die Empfindlichkeit des Regulators erhöht durch die Trägheit des Schwungrades, vermöge welcher dasselbe schon sofort bei zunehmender Geschwindigkeit ω der Welle hinter ihr zurückzubleiben strebte. Gerade umgekehrt verhält es sich, wenn ω unter die dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Normalgeschwindigkeit sinkt. Dadurch, dass sonach durch Vergrösserung des Schwungrades die Empfindlichkeit des Apparates, die Schnelligkeit seiner Wirkung beliebig erhöht werden kann, ohne dass dabei ein allzu grosser permanenter Widerstand eingeführt wird, wie es der Fall wäre, wenn man denselben Zweck durch übermässige Vergrösserung der Flügel bei entsprechender Verstärkung der Feder erreichen wollte, sind die günstigen Erfolge zu erklären, die bei Schiffsmaschinen mit diesem Regulator erzielt wurden.

Zu näherer Erklärung seiner Wirkung sei bezeichnet mit:

m die Anzahl der Flügel, deren Fläche $= F$,

a die Entfernung der Flügelmitte von der Wellenaxe (die Entfernung der Axen A und A', Fig. 110),

a_1 der mittlere Radius des mit dem Schwungrädchen verbundenen Kegelrades,

b der mittlere Radius der zwei anderen Kegelräder,

b_1 der Radius der mit diesen verbundenen Kettenrollen (allgemein $\frac{b}{b_1}$ das Verhältniss der gleichzeitigen elementaren Wege der mittleren Theilkreise der betreffenden zwei Kegelräder und der Hülse H),

A das Trägheitsmoment des Schwungrädchens,

α der Absolutwerth der positiven oder negativen Winkelbeschleunigung, mit welcher die dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle bis zu den Werthen ω_1 und ω_2 zu- bezw. abnimmt, bei denen die Hülse im einen oder anderen Sinne in Bewegung kommt,

Q die Belastung der Hülse durch Federkraft oder Schwerkräfte,

W der auf sie reducirte Bewegungswiderstand des Regulators selbst und namentlich des Stellzeuges.

Indem der Luftwiderstand für jeden Flügel, angreifend gedacht in der Axe A' normal zur Ebene AA',

$$= \vartheta \gamma F \frac{(a\omega)^2}{2g}$$

gesetzt werden kann, unter g die Beschleunigung der Schwere, γ das specifische Gewicht der Luft und unter ϑ einen nach Bd. I, §. 156 zu beurtheilenden Coefficienten verstanden, entspricht dem mittleren Gleichgewichtszustande bei der Winkelgeschwindigkeit ω die Gleichung:

$$Q = m \vartheta \gamma F \frac{(a\omega)^2}{2g} \frac{a}{a_1} \frac{b}{b_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Indem aber die Belastung Q der Hülse in $Q + W$ bezw. $Q - W$ übergeht, wenn sie bei der mit der Winkelbeschleunigung oder Verzögerung α bis ω_1 resp. ω_2 veränderten Winkelgeschwindigkeit der Welle in Bewegung kommt, ist ferner mit Rücksicht darauf, dass das Schwungrädchen seiner Beschleunigung oder Verzögerung mit dem Momente $A\alpha$ Widerstand leistet:

$$Q + W = \left(m \vartheta \gamma F \frac{(a\omega_1)^2}{2g} + \frac{A\alpha}{a}\right) \frac{ab}{a_1 b_1}$$

$$Q - W = \left(m \vartheta \gamma F \frac{(a\omega_2)^2}{2g} - \frac{A\alpha}{a}\right) \frac{ab}{a_1 b_1}$$

und somit auch $$Q = m\vartheta\gamma F\frac{a^2}{2g}\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\frac{ab}{a_1 b_1}.$$

Durch Vergleichung mit (1) folgt daraus: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega^2$ . . . . . . (2)
und hieraus mit $\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\omega$, also $(\omega_1 - \omega_2)^2 = \varepsilon^2\omega^2$
durch Subtraction: $2\omega_1\omega_2 = (2 - \varepsilon^2)\omega^2$,
daraus weiter durch Addition zu (2): $\omega_1 + \omega_2 = \omega\sqrt{4 - \varepsilon^2}$,
wofür gesetzt werden kann:

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) = 2\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

mit einem stets zu vernachlässigenden Fehler, sofern ε nur etwa $= 0{,}05$ ist. Aus dieser (auch in anderen Fällen stets zulässigen) Gl. (3) und aus $\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\omega$ nach §. 105, Gl. (1) folgt:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2\varepsilon\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und somit aus den obigen Gleichungen für $Q + W$ und $Q - W$ durch Subtraction und mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$W = \left(m\vartheta\gamma F\frac{a^2}{2g}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + \frac{A\alpha}{a}\right)\frac{ab}{a_1 b_1}$$

$$= \left(m\vartheta\gamma F\frac{(a\omega)^2}{2g}\varepsilon + \frac{A\alpha}{a}\right)\frac{ab}{a_1 b_1} = Q\varepsilon + \frac{Ab}{a_1 b_1}\alpha \quad \ldots\ldots (5).$$

Die Energie (§. 105) des Regulators:

$$E = \frac{W}{\varepsilon} = Q + \frac{Ab}{a_1 b_1}\frac{\alpha}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

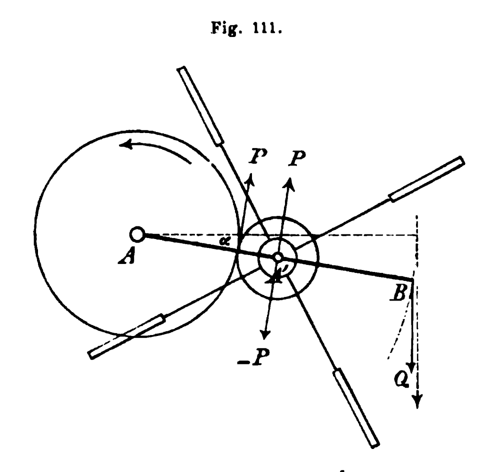
ist um so grösser, je grösser Q und A sind, und zwar wird durch das Trägheitsmoment A des Schwungrädchens um so mehr zur Vergrösserung der Energie beigetragen, je grösser α ist. Insbesondere bei Dampfmaschinen von Seeschiffen, bei denen durch sehr schnelle Veränderung des Widerstandes in Folge des Einflusses der Wellen und der Schwankungen des Schiffes der Gang der Maschine entsprechend schnellen Aenderungen unterworfen sein kann, lässt sich deshalb von diesem Schwungrädchen eine vortheilhafte Wirkung erwarten.

Nach einer Bemerkung in §. 105 darf indessen A eine solche Grösse nicht erreichen, dass dadurch der Regulator schon gegen diejenigen Winkelbeschleunigungen der Regulatorwelle empfindlich würde, welche die Folge der Ableitung ihrer Bewegung von derjenigen der Kurbelwelle und der periodisch ungleichförmigen Rotation dieser letzteren sind. Ist also die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle $n$mal so gross, wie die der Kurbelwelle, und δ für diese der Ungleichförmigkeitsgrad (§. 92) ihrer rotirenden Bewegung, so muss aus Gl. (5) sich ε wenigstens $= \delta$

ergeben, wenn darin für α das $n$fache der grössten Winkelbeschleunigung der Kurbelwelle gesetzt wird. Durch diese Forderung kann bei stationären Dampfmaschinen der Vortheil, den das Schwungrädchen zur Erhöhung der Energie dieses Regulators darbietet, sehr beschränkt werden.

2. Regulator von Reigers.* — Um die Regulatorwelle, deren hier horizontale Axe wieder mit A bezeichnet sei, ist ein mit dem Stellzeuge verketteter Rahmen drehbar (Fig. 111), der das Windflügelrad so trägt, dass dessen Drehaxe A' mit A in einer gewissen Entfernung $AA' = p$ parallel ist; seine Rotation erhält es von der Regulatorwelle aus durch Zahnräder, die in Fig. 111 durch Kreise angedeutet sind. Der Rahmen ist ausserdem bei B in der Entfernung $AB = q$ von A durch ein Gewicht belastet, das unter Einrechnung des auf diesen Punkt B reducirten Eigengewichtes des Rahmens sammt Flügelrad mit Q bezeichnet sei.

Fig. 111.



Der Theilrissdruck P, den das auf der Regulatorwelle feste Rad auf das mit dem Flügelrade fest verbundene ausübt, kann ersetzt werden durch die gleich grosse und gleich gerichtete in A' angreifende Kraft P und durch ein Kräftepaar P, $-P$. Während letzteres im mittleren Gleichgewichtszustande des Regulators mit dem aus dem Luftdrucke auf die Flügel resultirenden Kräftepaare im Gleichgewicht ist, wird von der in A' angreifenden Kraft P der Rahmen in solcher Lage erhalten, dass für die Axe A das Moment von P dem entgegengesetzt drehenden Moment von Q gleich, dass also

$$Pp = Qq \cos \alpha$$

ist, unter α den Neigungswinkel der Ebene AB gegen die Horizontalebene verstanden. Wenn die Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle wächst, so wächst mit dem Luftwiderstande auch P und nach obiger Gleichung $\cos \alpha$, nimmt also α ab; wird aber α zwischen engen Grenzen veränderlich gemacht, etwa zwischen α' und α'' so, dass α' nahe = Null und selbst α'' ein kleiner Winkel ist, so sind auch die entsprechenden Grenzwerthe ω'

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1870, S. 148.



und ω'' von ω nur wenig verschieden, so dass dem Regulator bei übrigens statischem Charakter doch ein hinlänglich kleiner Ungleichförmigkeitsgrad Δ wird zuertheilt werden können. Derselbe kann noch mehr verkleinert, nämlich die Stabilität der mittleren Gleichgewichtslagen des Regulators in beliebigem Grade dadurch vermindert werden, dass das Eigengewicht des Rahmens mit dem Flügelrade durch ein Gegengewicht abbalancirt und sein Belastungsgewicht Q vermittels eines Zugkraftorganes an einer passend gekrümmten cylindrischen Endfläche des Rahmens (in Fig. 111 punktirt angedeutet) aufgehängt wird, um so den Hebelarm von Q in beliebiger Weise von α abhängig zu machen. Wäre jene Auf- und Abwickelungsfläche des Zugkraftorganes eine Kreiscylinderfläche mit der Axe A, so wäre der Hebelarm von Q constant und der Regulator astatisch.

4. Centrifugal-Regulatoren.

Das Princip dieser Regulatoren wurde schon in §. 112 im Allgemeinen angegeben. Sie sind in mannigfach verschiedenen Arten der Einrichtung und Ausführung bisher fast ausschliesslich angewendet worden, indem sie sich durch die verhältnissmässige Einfachheit auszeichnen, womit ihnen die im §. 105 im Allgemeinen besprochenen und im Folgenden für die Hauptrepräsentanten dieser Gruppe noch näher zu besprechenden Eigenschaften genügender Empfindlichkeit und Energie, hinlänglich kleiner Verschiedenheit der entsprechenden Grenzgeschwindigkeiten, meistens mit leichter Adjustirbarkeit für verschiedene Normalgeschwindigkeiten, ertheilt werden können.

§. 114. Watt'scher Regulator.

Mit der Regulatorwelle, deren Axe AA, Fig. 112, eine verticale Lage hat, sind durch Charniere, deren Axen C und C_1 rechtwinklig gegen AA gerichtet sind, die Stangen CK und C_1K_1 mit Kugeln an ihren Enden so verbunden, dass die Mittelpunkte K und K_1 der Kugeln in einer durch AA gehenden und mit der Regulatorwelle rotirenden Ebene liegen. An diesen Kugelstangen ist vermittels der Hülsenstangen BE und B_1E_1 die längs AA gleitende Hülse so aufgehängt, dass die Axen B und E, B_1 und E_1 der betreffenden Charniere mit C und C_1 parallel sind. Der ganze Mechanismus ist symmetrisch in Bezug auf die durch AA gehende mit den Charnieraxen parallele Ebene.

Es handelt sich zunächst um die Beziehung, die bei mittlerem Gleichgewichtszustande zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle und der Configuration des Regulators



stattfindet, die ihrerseits bestimmt ist durch den Neigungswinkel α von CB oder β von EB gegen die Axe AA, indem diese zwei Winkel, wenn

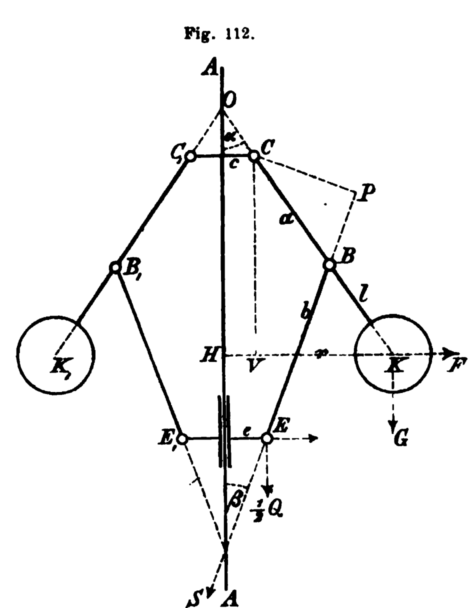
$$CB = a, \quad EB = b, \quad CC_1 = 2c, \quad EE_1 = 2e$$

gesetzt wird, unter sich in der Beziehung stehen:

$$c + a \sin\alpha = e + b \sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn dabei vorläufig von den untergeordneten Schwerkräften und Centrifugalkräften der Stangen abgesehen wird, so ist der fragliche Zustand bedingt durch das Gleichgewicht der Schwerkräfte $= G$ der Kugeln, der entsprechenden Centrifugalkräfte $= F$ derselben und der constanten Belastung $= Q$ der Hülse, die in die Componenten $\frac{1}{2} Q$ und $\frac{1}{2} Q$, in E und E_1 angreifend, zerlegt gedacht werde oder auch in die nach BE und B_1E_1 gerichteten gleichen Kräfte

Fig. 112.



$$S = \frac{1}{2} \frac{Q}{\cos\beta}$$

nebst zwei nach E_1E und EE_1 gerichteten gleichen Kräften, die sich indessen gegenseitig aufheben und nicht weiter in Betracht kommen. Wegen der Symmetrie des Mechanismus bedarf es nur der Gleichgewichtsbedingung für seine Hälfte, die darin besteht, dass die algebraische Summe der Momente der in K angreifenden Kräfte F, G und der in E angreifenden nach BE gerichteten Kraft S in Beziehung auf die Axe C = Null sein muss, dass also, wenn in Fig. 112 die Gerade KH horizontal, CV vertical, CP normal zu BE ist, die Gleichung erfüllt wird:

$$F \cdot CV = G \cdot VK + S \cdot CP,$$

d. i. mit $CK = l$ und wegen $F = \frac{G}{g} r\omega^2$ mit $HK = r$:

$$\frac{G}{g} r\omega^2 l \cos\alpha = G l \sin\alpha + \frac{1}{2} \frac{Q}{\cos\beta} a \sin(\alpha + \beta)$$

oder

$$\frac{r\omega^2}{g} = tg\,\alpha + \frac{1}{2} \frac{a}{l} \frac{Q}{G} (tg\,\alpha + tg\,\beta) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist O der Schnittpunkt von AA mit CB, und

$$OH = r \cot g\, \alpha = h,$$

so kann diese Gleichung auch geschrieben werden:

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q}{G}\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Für $Q = 0$ geht sie in die Gleichung (2) von §. 105 über. Sie vereinfacht sich bei der üblichen **rhombischen Anordnung** des Regulators, bei welcher

$$c = e \text{ und } a = b, \text{ also } \alpha = \beta$$

ist, und somit:

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{a}{l}\frac{Q}{G}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Die Berichtigung dieser Gleichungen mit Rücksicht auf den untergeordneten **Einfluss der Stangengewichte** ist höchstens angenäherter Weise nöthig und mag geschehen auf Grund der Annahme: $c = e = 0$. Die Schwerkraft jeder dieser prismatischen Stangen ist dann eine in ihrer Mitte angreifende Verticalkraft, die Centrifugalkraft aber eine Kraft, die zwar so gross ist, als ob die ganze Stangenmasse in ihrer Mitte vereinigt wäre,* dabei aber in einem Punkte der Mittellinie angreift, dessen Entfernung von ihrem in AA liegenden Endpunkte $= {}^2/_3$ der Länge ist. Wird also mit A die Schwerkraft einer Kugelstange CK, mit B die Schwerkraft einer Hülsenstange BE bezeichnet, und diese Kraft B in zwei

---

* Wenn allgemein eine um eine Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirende Masse $= m$ symmetrisch ist in Bezug auf eine durch A gehende Ebene E, so ist die Centrifugalkraft jeder zu dieser Ebene senkrechten materiellen Geraden G der Masse m, deren Abstand von der Axe $A = x$ und deren Masse $= dm$ sei, in jeder Hinsicht identisch mit der Centrifugalkraft $= \omega^2 x\, dm$ des Massenelementes dm, wenn es in dem in der Ebene E gelegenen Mittelpunkte P der Geraden G concentrirt gedacht und somit die körperliche Masse m durch eine materielle Fläche von gleicher Masse m in der Ebene E ersetzt wird, weil die zu dieser Ebene senkrechten elementaren Kraftcomponenten sich paarweise aufheben. Indem aber dann die resultirende Centrifugalkraft

$$= \omega^2 \int x\, dm = \omega^2 \xi m$$

ist, unter ξ den Schwerpunktsabstand der Masse m von der Axe A verstanden, ist sie ebenso gross, als ob diese Masse in ihrem Schwerpunkte S vereinigt wäre. Es würde auch ihre Richtungslinie durch den Schwerpunkt hindurch gehen, wenn, unter y und η die Abstände der Punkte P und S von einer zur Axe A senkrechten Ebene H verstanden,

$$\omega^2 \int xy\, dm = \omega^2 \xi \eta m$$

wäre. Wenn aber x' und y' dieselben Bedeutungen für die durch S gehende

gleiche in den Punkten B und E angreifende Componenten zerlegt, von denen letztere als Vergrösserung von Q zu betrachten ist, die Centrifugalkraft dieser Hülsenstange aber in zwei entsprechende Componenten, von denen die in B angreifende doppelt so gross wie die in E angreifende (durch eine gleiche in E_1 angreifende Gegenkraft aufgehobene) Componente ist, so ergiebt sich das corrigirte Moment der Schwerkraft G für die Axe C

$$= G l \sin\alpha + A \frac{l}{2} \sin\alpha + \frac{B}{2} a \sin\alpha = \left[G + \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{l} B\right)\right] l \sin\alpha$$

und das corrigirte Moment der Centrifugalkraft F

$$= \frac{G}{g} r\omega^2 l \cos\alpha + \frac{A}{g}\frac{r}{2}\omega^2 \cdot \frac{2}{3} l \cos\alpha + \frac{B}{g}\frac{ra}{2l}\omega^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cos\alpha$$
$$= \frac{1}{g}\left[G + \frac{1}{3}\left(A + \frac{a^2}{l^2} B\right)\right] r\omega^2 l \cos\alpha.$$

Die Berücksichtigung der Schwerkräfte und der Centrifugalkräfte der Stangen würde also in Gl. (2)—(4) die Vergrösserung von G in verschiedenem Betrage, nämlich um

$$\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{l} B\right) \text{ bezw. } \frac{1}{3}\left(A + \frac{a^2}{l^2} B\right)$$

erfordern, d. h. es müssten streng genommen die Formen dieser Gleichungen etwas geändert werden. Um sie in ihren oben entwickelten einfachen

---

mit A parallele Gerade A' und für die durch S gehende mit H parallele Ebene H' haben, wie x und y für A und H, so ist

$$\int xy\,dm = \int (\xi + x')(\eta + y')\,dm$$
$$= \xi\eta m + \xi\int y'dm + \eta\int x'dm + \int x'y'dm$$
$$= \xi\eta m + \int x'y'dm$$

und somit jene Bedingungsgleichung identisch mit der Gleichung:

$$\int x'y'dm = 0,$$

welche erfüllt ist, wenn die Masse m auch in Bezug auf die Ebene H' oder in Bezug auf die zu AA' senkrechte durch A' gehende Ebene symmetrisch ist.

Aus dieser Ueberlegung ergiebt sich der Satz, dass 1) wenn eine um eine Axe rotirende Masse symmetrisch vertheilt ist in Bezug auf eine durch die Axe gehende Ebene, die Centrifugalkräfte eine Resultante haben, die in der Symmetrieebene liegt und ebenso gross ist, als ob die ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre; dass aber 2) diese Resultante auch durch den Schwerpunkt hindurch geht, wenn die Masse noch eine zweite Symmetrieebene hat, die auf der ersten senkrecht und zugleich entweder auf der Drehungsaxe senkrecht oder mit ihr parallel ist.

Bei dem hier in Rede stehenden Centrifugalregulator ist die Bedingung unter 1) erfüllt, sowohl für die Stangen, als für die Kugeln, die Bedingung unter 2) dagegen nur für letztere.

Formen beibehalten zu können, muss man sich begnügen, in G nur einen Mittelwerth jener Correctionen einzubegreifen, etwa das arithmetische Mittel:

$$G' = \frac{1}{12}\left[5A + \left(3 + 2\frac{a}{l}\right)\frac{a}{l}B\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

z. B.
$$G' = \frac{5}{12}(A + 0{,}4\,B) \text{ für } \frac{a}{l} = \frac{1}{2},$$

$$G' = \frac{5}{12}(A + B) \text{ für } \frac{a}{l} = 1.$$

Auch ist in Q die Hälfte des Gewichtes jeder Hülsenstange einzubegreifen, also

$$Q = B + H + Z$$

zu setzen, unter H das um das Eigengewicht der Hülse selbst vermehrte ihr etwa unmittelbar zuertheilte Belastungsgewicht und unter Z den Druck verstanden, den das Stellzeug in Folge der Schwerkräfte seiner Glieder auf die Hülse ausübt, falls es nicht vorgezogen wird, diese Schwerkräfte im Stellzeuge selbst abzubalanciren, um dem Regulator ein möglichst freies Spiel bei mittlerem Gleichgewichtszustande zu gewähren. —

Was ferner den Unempfindlichkeitsgrad ε des Regulators betrifft, so sei nach §. 105 mit W der auf die Hülse reducirte Bewegungswiderstand, d. h. die Kraft bezeichnet, welche, an der Hülse im Sinne AA angreifend, die Reibung des Regulators selbst (der verschiedenen Charniere) und bei directer Wirkung die Reibung des Stellzeuges (bei indirecter den Einrückungswiderstand des Wendegetriebes) zu überwinden im Stande ist. Die Werthe ω_1 und ω_2, bis zu welchen die dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle zu- oder abnehmen muss, um die Verschiebung der Hülse im einen oder anderen Sinne zur Folge zu haben, sind dann analog Gl. (3) durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1{}^2 &= \frac{g}{h}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q+W}{G}\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha}\right) \\ \omega_2{}^2 &= \frac{g}{h}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q-W}{G}\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Daraus folgt $\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = 2\omega^2$ oder mit ausser Acht zu lassendem Fehler, nämlich mit Vernachlässigung von nur $\frac{1}{8}\varepsilon^2$ gegen 1 gemäss §. 113, Gl. (3):

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$$

und weiter mit
$$\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\omega:$$

$$\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2 = 2\varepsilon\omega^2$$

oder nach den Gleichungen (6) und (3):

$$\frac{g}{h}\frac{a}{l}\frac{W}{G}\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha}=\varepsilon\frac{g}{h}\left(2+\frac{a}{l}\frac{Q}{G}\frac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha}\right),$$

woraus für die Energie (§. 105) sich der Ausdruck ergiebt:

$$E=\frac{W}{\varepsilon}=2\frac{l}{a}G\frac{tg\alpha}{tg\alpha+tg\beta}+Q \ldots\ldots\ldots (7),$$

wachsend mit G und Q, übrigens abhängig von α, also von der Configuration des Regulators. Bei rhombischer Anordnung $(\alpha=\beta)$ wird E unabhängig von α, nämlich:

$$E=\frac{l}{a}G+Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Die Steigerung der Energie durch Vergrösserung von Q, nämlich durch ein schweres Belastungsgewicht der Hülse, ist namentlich bei dem Porter'schen Regulator bezweckt, bei welchem übrigens $l=a$ gemacht zu werden pflegt (durch Verlegung der Kugelmittelpunkte K und K_1 in die Charnieraxen B und B_1, Fig. 112), so dass $E=G+Q$ wird.

Insoweit die Verkleinerung eines solchen Belastungsgewichtes die Energie noch hinlänglich gross lässt, bietet es ein einfaches Mittel dar, um durch seine Aenderung den Regulator gemäss Gl. (3) oder (4) verschiedenen Normalgeschwindigkeiten ω anzupassen. —

Der Ungleichförmigkeitsgrad Δ dieses Regulators mag nur für den gewöhnlichen Fall rhombischer Anordnung näher geprüft werden. Indem dann ω nach Gl. (4) umgekehrt proportional $\sqrt{h}$ ist, unter h die Strecke OH in Fig. 112 verstanden, ergiebt sich mit den Bezeichnungen:

$$\omega',\ h',\ \alpha' \quad \text{und} \quad \omega'',\ h'',\ \alpha''$$

für die Werthe von ω, h, α bezw. in der oberen und unteren Grenzlage nach §. 105, Gl. (3) und (5):

$$\left.\begin{aligned}\Delta=\delta+\varepsilon \text{ mit } \delta=2\frac{\omega'-\omega''}{\omega'+\omega''}=2\frac{\frac{\omega'}{\omega''}-1}{\frac{\omega'}{\omega''}+1}\\ \frac{\omega'}{\omega''}=\sqrt{\frac{h''}{h'}}=\sqrt{\frac{l\cos\alpha''+c\cot g\,\alpha''}{l\cos\alpha'+c\cot g\,\alpha'}}\end{aligned}\right|\ldots\ldots (9).$$

Wird auch die Grösse δ um so kleiner, je weniger α' und α'' verschieden gewählt werden, so darf doch bei einem direct wirkenden Regulator dieser Art der Unterschied dieser Winkel nicht sehr klein gemacht werden, um die Verschiebung

$$s=2a(\cos\alpha''-\cos\alpha') \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

der Hülse und somit die Stellungsänderung des Stellzeuges hinlänglich gross zu erhalten. Dadurch kann dann aber auch Δ wesentlich zu gross werden.

So ergiebt sich z. B. für einen direct wirkenden Porter'schen Regulator ($l = a$) mit $\alpha' = 40^0$ und $\alpha'' = 20^0$, entsprechend $s = 0{,}35\,a$

für $$c = \frac{1}{8}a \quad \text{und} \quad 0:$$

$$\frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}184 \quad „ \quad 1{,}108$$

$$\delta = 0{,}168 \quad „ \quad 0{,}102;$$

dagegen mit $\alpha' = 45^0$ und $\alpha'' = 25^0$, entsprechend $s = 0{,}40\,a$

für $$c = \frac{1}{8}a \quad \text{und} \quad 0:$$

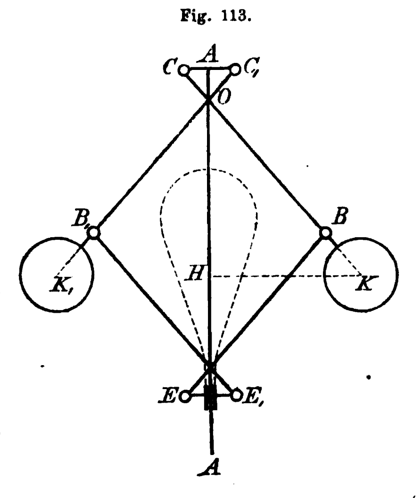
$$\frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}188 \quad „ \quad 1{,}132$$

$$\delta = 0{,}172 \quad „ \quad 0{,}124.$$

§. 115. Watt'scher Regulator mit gekreuzten Stangen.

Wenn der Punkt C, wie in Fig. 112, auf derselben Seite der Axe AA liegt wie der Kugelmittelpunkt K, so nimmt die Grösse $h = OH$, d. i. die Subnormale der Bahn des Punktes K mit dessen wachsender Entfernung von der Axe aus doppeltem Grunde ab, insofern sich dabei H aufwärts und O abwärts bewegt. Der entsprechend stark ausgeprägte statische Charakter des Regulators wird indessen schon dadurch vermindert, dass mit der Annahme $c = 0$ der Punkt O als Vereinigung der Punkte C und C_1 in der Axe festgelegt wird, wie auch die Beispiele zu Ende des vorigen Paragraph durch die der Annahme $c = 0$ entsprechende Verminderung von δ zu erkennen geben. Noch mehr wird sich somit diese Grösse dadurch verkleinern lassen, dass die Charnieraxen C und C_1 auf die entgegengesetzten Seiten von AA gelegt werden, somit dann auch bei nach wie vor rhom-

Fig. 113.



bischer Anordnung die Charnieraxen E und E_1 (Fig. 113), indem jetzt bei Vergrösserung der Entfernung HK mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit ω nicht nur der Punkt H, sondern auch der Punkt O sich aufwärts bewegt. Nur darf in solchem Falle die Aufwärtsbewegung von O nicht grösser, als die von H sein, weil, wie schon in §. 105 mit Bezug auf den idealen Fall gemäss Fig. 109 bemerkt wurde, die Stabilität des Gleichgewichtes die Abnahme der Subnormale h mit wachsender Winkelgeschwindigkeit ω, also mit wachsendem Winkel α und entsprechendem Abstande HK erfordert, wenn, wie es dort der Fall war und auch hier nach Gl. (4) im vorigen Paragraph der Fall ist, die Beziehung zwischen ω und der Configuration des Regulators die Form hat: $\omega^2 h = Const.$

Um jener Forderung zu genügen, kann man bemerken, dass, wenn mit c jetzt der Absolutwerth des negativ gewordenen früheren Abstandes c bezeichnet wird,

$$OH = h = l \cos\alpha - c \cot g\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

somit $h = 0$ ist für $l \cos\alpha = c \cot g\, \alpha$,

d. h. für $\cos\alpha = 0$ und für $\sin\alpha = \dfrac{c}{l}$.

Für einen zwischen 90^0 und $arc \sin \dfrac{c}{l}$ liegenden Werth von α ist also h ein Maximum, nämlich entsprechend

$$\frac{dh}{d\alpha} = -l \sin\alpha + \frac{c}{\sin^2\alpha} = 0 \text{ für } \sin^3\alpha = \frac{c}{l}$$

und indem somit α'' als kleinster Werth von α keinesfalls kleiner, als dieser letztere Winkel α sein darf, ist es am besten, ihn demselben gleich zu setzen, um aus dem Umstande, dass in der Nähe ihres Maximums die Veränderlichkeit der Function h am kleinsten ist, insoweit Nutzen zu ziehen, wie es die Rücksicht auf Stabilität des Gleichgewichtes gestattet. Wird also umgekehrt α'' angenommen, so ergiebt sich die Regel:

$$\frac{c}{l} = \sin^3\alpha'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Bei rhombischer Anordnung gemäss Fig. 113 ist dann nach Gl. (9) im vorigen Paragraph:

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \sqrt{\frac{h''}{h'}} = \sqrt{\frac{\cos\alpha'' - \frac{c}{l}\cot g\, \alpha''}{\cos\alpha' - \frac{c}{l}\cot g\, \alpha'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

$$\delta = 2\frac{\frac{\omega'}{\omega''}-1}{\frac{\omega'}{\omega''}+1}\;;\quad \varDelta = \delta + \varepsilon \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

z. B. für $\alpha' = 40^0$ und $\alpha'' = 20^0$:

$$\frac{c}{l} = 0{,}040 \qquad \frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}075 \qquad \delta = 0{,}072$$

oder für $\alpha' = 45^0$ und $\alpha'' = 25^0$:

$$\frac{c}{l} = 0{,}075 \qquad \frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}086 \qquad \delta = 0{,}082$$

und somit δ schon wesentlich kleiner, als im vorigen Paragraph unter sonst gleichen Umständen gefunden wurde.

Uebrigens gelten nach wie vor die von c unabhängigen Gleichungen (4), (8) und (10) des vorigen Paragraph:

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{a}{l}\frac{Q}{G}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$E = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{l}{a}G + Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$s = 2a(\cos\alpha'' - \cos\alpha') \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Sie bestimmen noch 3 Elemente hinsichtlich der den obwaltenden Umständen anzupassenden Anordnung eines solchen Regulators.

Es werde z. B. ausser den Grenzwinkeln α' und α'', wodurch nach Obigem die Verhältnisse $\frac{c}{l}$ und $\frac{\omega'}{\omega''}$ bestimmt sind, weiter die Verschiebungsgrösse s der Hülse angenommen gemäss der Erwägung, dass das Arbeitsvermögen $= Ws$ des Regulators ihr proportional oder dass, wenn letzteres gegeben, der von der Hülse zu bewältigende Widerstand W jener Verschiebungsgrösse umgekehrt proportional ist. Durch Gl. (7) ist dann die Länge a und bei Annahme des Verhältnisses $\frac{a}{l}$ (z. B. $= 1$ für den Porter'schen Regulator) auch die Länge l, sowie mit Rücksicht auf das vorher gefundene Verhältniss $\frac{c}{l}$ die Dimension c bestimmt. Für ein angenommenes Verhältniss $\frac{Q}{G}$ kann ferner aus Gl. (5) mit

$$h = h'' = l\cos\alpha'' - c\,cotg\,\alpha'' \text{ nach Gl. (1)}$$

die Winkelgeschwindigkeit ω'' und damit die kleinste sowie die grösste dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Umdrehungszahl der Regulatorwelle pro Minute:

$$n'' = \frac{60}{2\pi}\omega'' = 9{,}55\,\omega'' \text{ und } n' = \frac{\omega'}{\omega''}n''$$

gefunden werden, somit auch die mittlere Umdrehungszahl

$$n = \frac{n' + n''}{2}.$$

Während die Verschiebungsgrösse s der Hülse die Dimensionsverhältnisse des Stellzeuges bedingt, wird durch n das Umsetzungsverhältniss bestimmt, nach welchem die Rotation der Regulatorwelle von derjenigen einer anderen Welle abzuleiten ist, der bei mittlerem Gange der Maschine eine bekannte Umdrehungszahl zukommt. Bei gegebener Energie E, entsprechend einem gegebenen Widerstande W und angenommenen Unempfindlichkeitsgrade ε, sind endlich durch Gl. (6) mit Rücksicht auf die angenommenen Verhältnisse $\frac{a}{l}$ und $\frac{Q}{G}$ die Gewichte G und Q einzeln bestimmt. —

Als ein Uebelstand der Construction des Regulators mit gekreuzten Stangen nach Fig. 113 ist der Umstand hervorzuheben, dass mit der dadurch bedingten Verlängerung jener Stangen eine entsprechend grössere Höhe der ganzen Construction verbunden ist zum Nachtheile sicherer Lagerung der Regulatorwelle. Diese Höhe, verstanden als Entfernung der Axenebenen CC_1 und EE_1, Fig. 113, also

$$H = 2\,a\cos\alpha'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

kann ohne wesentliche Aenderung der Eigenschaften des Regulators dadurch vermindert werden, dass nur die Kugelstangen gekreuzt, die Hülsenstangen dagegen nach Art von Fig. 112 mit der Hülse verbunden werden. Indem dann aber der Winkel β, unter welchem die letzteren gegen die Axe AA geneigt sind, nur bei einer Configuration dem Winkel α gleich sein kann, ist es nöthig, ihn für die untere Grenzlage ($\alpha = \alpha''$) dem Winkel α gleich zu machen, um so wenigstens für diese die rhombische Anordnung beizubehalten, worauf die Gleichung (2) entsprechend der Forderung eines eben noch stabilen Gleichgewichtes beruht. Ist dann e die halbe Entfernung der (jetzt auf den umgekehrten Seiten von AA, wie in Fig. 113, liegenden) Charnieraxen E, E_1, so wird dadurch im Vergleich mit der dauernd rhombischen Anordnung nach Fig. 113 die Höhe H reducirt auf:

$$H = (a + b)\cos\alpha'' \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

während die Hülsenstangen die Länge erhalten:

$$b = a - \frac{c + e}{\sin\alpha''} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Ist nun β' der Werth von β für die obere Grenzlage, bestimmt durch die Gleichung:

$$a \sin\alpha' - c = b \sin\beta' + e \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11),$$

woraus in Verbindung mit Gl. (10)

$$\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} = \frac{a - \frac{c+e}{\sin\alpha'}}{a - \frac{c+e}{\sin\alpha''}}, \text{ also } \beta' > \alpha'$$

folgt, so ergiebt sich das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega''}$ jetzt aus Gl. (3) im vorigen Paragraph:

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \sqrt{\frac{h''}{h'} \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{a}{l}\frac{Q}{G}\frac{tg\alpha' + tg\beta'}{tg\alpha'}}{1 + \frac{a}{l}\frac{Q}{G}}}$$

oder wenn das der rhombischen Anordnung unter sonst gleichen Umständen entsprechende durch Gl. (3) bestimmte Grenzgeschwindigkeitsverhältniss

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \sqrt{\frac{h''}{h'}} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\omega'}{\omega''}\right)$$

bezeichnet und zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\frac{tg\alpha' + tg\beta'}{tg\alpha'} = 1 + \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

gesetzt wird:

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \left(\frac{\omega'}{\omega''}\right)\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\frac{l}{a}\frac{G}{Q} + 1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13),$$

womit dann schliesslich wieder δ nach Gl. (4) gefunden wird.

Die Gleichung (5) behält zur Anordnung des Regulators ihre Gültigkeit mit

$$\omega = \omega'' \text{ und } h = h'' = l\cos\alpha'' - c\,cotg\,\alpha''.$$

Die Energie ist durch Gl. (6) für die untere Grenzlage bestimmt; für die obere ist sie nach Gl. (7) im vorigen Paragraph:

$$E' = 2\frac{l}{a}G\frac{tg\alpha'}{tg\alpha' + tg\beta'} + Q = \frac{l}{a}\frac{G}{1+\lambda} + Q \quad \ldots \ldots (14),$$

der Hülsenhub wird:

$$s = a(\cos\alpha'' - \cos\alpha') + b(\cos\alpha'' - \cos\beta') \quad \ldots \ldots \ldots (15).$$

Da $\beta' > \alpha'$, nach Gl. (12) also λ positiv ist, so folgt aus Gl. (13):

$$\frac{\omega'}{\omega''} > \left(\frac{\omega'}{\omega''}\right)$$

und zwar um so mehr, je grösser Q im Vergleich mit G angenommen wird. Soll also der Ungleichförmigkeitsgrad δ durch Verzichtleistung auf die Kreuzung auch der Hülsenstangen nicht vergrössert werden, so ist bei gegebenem Werthe von α'' der Winkel α' kleiner anzunehmen, was übrigens dann um so eher zulässig ist, als bei gleichen Werthen von α' und α'' der Hülsenhub s nach Gl. (15) sich grösser, als nach Gl. (7) ergiebt. Es sei z. B.

$$l = a, \quad Q = 1{,}5\, G, \quad \alpha'' = 20^0, \quad \alpha' = 40^0,$$

folglich bei rhombischer Anordnung mit gekreuzten Kugel- und Hülsenstangen nach (2), (3), (4), (7) und (8):

$$c = 0{,}04\, a, \quad \frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}075, \quad \delta = 0{,}072$$

$$s = 0{,}347\, a, \quad H = 1{,}879\, a = 5{,}41\, s.$$

Wird dann behufs der Anordnung mit nur gekreuzten Kugelstangen unter Beibehaltung des Werthes $c = 0{,}04\, a$ angenommen:

$$\beta'' = \alpha'' = 20^0 \quad \text{und} \quad e = 0{,}15\, b,$$

so findet man aus (10), (11), (12), (13), (4), (15) und (9):

$$b = 0{,}614\, a, \quad \beta' = 56^0\, 17', \quad \lambda = 0{,}393$$

$$\frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}075 \,.\, 1{,}112 = 1{,}195, \quad \delta = 0{,}178$$

$$s = 0{,}410\, a, \quad H = 1{,}517\, a = 3{,}70\, s.$$

Hiernach würde δ mehr als verdoppelt werden. Wenn aber jetzt

$$l = a, \quad Q = 1{,}5\, G, \quad \alpha'' = 20^0, \quad \alpha' = 32^0$$

angenommen wird, womit sich bei rhombischer Anordnung ergeben würde:

$$c = 0{,}04\, a, \quad \frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}029, \quad \delta = 1{,}029$$

$$s = 0{,}183\, a, \quad H = 1{,}879\, a = 10{,}27\, s,$$

so findet man für die Anordnung mit nur gekreuzten Kugelstangen mit

$$c = 0{,}04\, a, \quad \beta'' = \alpha'' = 20^0, \quad e = 0{,}15\, b:$$

$$b = 0{,}614\, a, \quad \beta' = 40^0\, 23', \quad \lambda = 0{,}181$$

$$\frac{\omega'}{\omega''} = 1{,}029 \,.\, 1{,}053 = 1{,}083, \quad \delta = 0{,}080$$

$$s = 0{,}201\, a, \quad H = 1{,}517\, a = 7{,}55\, s.$$

Das Beispiel lässt erkennen, dass die Verkleinerung der Constructionshöhe H bei nahe gleich bleibendem Werthe von δ erkauft wird durch Ver-

kleinerung von s, also bei gegebener Arbeit $= Ws$, die von der Hülse längs dem Wege s zu leisten ist, durch Vergrösserung des Widerstandes W und somit des Unempfindlichkeitsgrades ε. Indessen ist

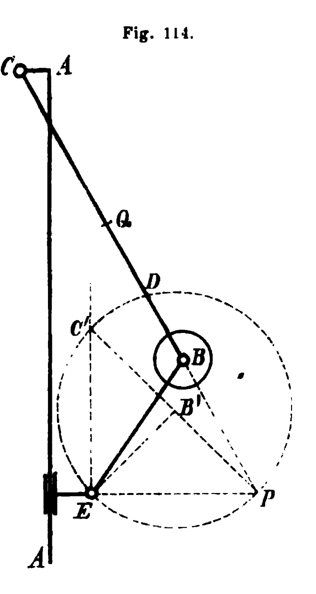
$$s = 0{,}201\, a = \frac{0{,}201}{0{,}614} b = 0{,}327\, b$$

in den meisten Fällen ausreichend gross.

§. 116. Regulator von Pröll.*

Um die Constructionshöhe H des Regulators noch weiter zu verkleinern, kann man jede Kugel mit der betreffenden Hülsenstange fest verbinden nach Verlegung des Kugelmittelpunktes, entsprechend $l = a$, in den Punkt B, Fig. 114, und dann die Stange $BE = b$ auf andere Weise relativ gegen die Regulatorwelle so zwangläufig machen, dass ihre Bewegung mit derjenigen nahe übereinstimmt, die sie dem vorigen Paragraph zufolge als Hülsenstange eines Watt'schen Regulators mit gekreuzten Kugelstangen haben soll. Diese Bewegung ist dadurch bestimmt, dass der Punkt E in einer Geraden geführt wird, die in der Entfernung e mit der Axe AA der Regulatorwelle auf derselben Seite parallel ist, auf welcher der Punkt B sich befindet, letzterer Punkt aber in einem Kreise mit dem Radius $BC = a$ geführt wird, dessen Mittelpunkt C auf der anderen Seite von AA die Entfernung $AC = c$ hat. Diese Führung des Punktes B ist es, wodurch die unerwünscht grosse Höhe $H =$ der Maximalhöhe von C über E verursacht wird, und hat sich deshalb Pröll die Aufgabe gestellt, sie dadurch zu ersetzen, dass statt des Punktes B ein anderer Punkt B' der Stange BE und zwar durch eine Charnierstange $B'C'$ in einem Kreise geführt wird, dessen Mittelpunkt C' in geringerer Höhe über E auf derselben Seite von AA, etwa im gleichen Abstande $= e$ davon, somit vertical über E gelegen ist. Zu dem Ende kommt es darauf an,

Fig. 114.

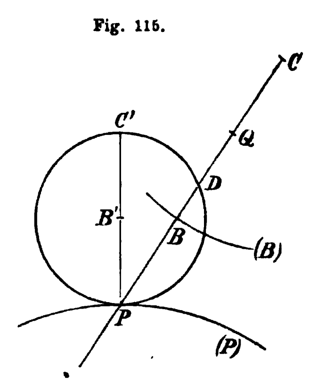


* Civilingenieur, 1872, Heft 3 und 4. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1873, S. 66.

die Punkte B' und C' so zu wählen, dass der kleine Kreisbogen zum Mittelpunkte C', in welchem auf diese Weise der Punkt B' beweglich wird, möglichst genau mit der richtigen, nämlich mit derjenigen Bahn dieses Punktes übereinstimme, die der Führung des Punktes B im Kreise um C entspricht, und es wird dies dann am vollkommensten der Fall sein, wenn C' der Krümmungsmittelpunkt dieser Bahn für den Ort ist, den B' in derselben bei mittlerer Configuration des Regulators einnimmt. Wie solche Punkte B' und C' durch Construction gefunden werden können, ergiebt sich aus gewissen Sätzen der reinen Kinematik.

Ist nämlich (P), Fig. 115, die der Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene entsprechende Polbahn, d. h. der Ort der auf einander folgenden Punkte (Pole), um welche die elementare Drehung des Systems jeweils stattfindet, so giebt es für jede Lage des letzteren einen gewissen Kreis, der die Polbahn im augenblicklichen Pol P berührt und der Wendekreis genannt wird, weil seine sämmtlichen Punkte sich augenblicklich in Wendepunkten (Punkten mit unendlich grossen Krümmungshalbmessern) ihrer Bahnen befinden. Der Durchmesser PC' dieses Kreises ist $=\frac{u}{\omega}$, wenn u die augenblickliche Wechselgeschwindigkeit des Pols, d. h. die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher er in der Polbahn fortschreitet, und ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System augenblicklich um den Pol dreht. Der Wendekreis kann ausserdem dazu dienen, den Krümmungsmittelpunkt der Bahn (B) jedes anderen Punktes B des Systems für seinen augenblicklichen Ort in der Bahn auf einfache Weise zu bestimmen. Zieht man nämlich den Polstrahl PB, dessen zweiter Schnittpunkt mit dem Wendekreise D sei, und macht man auf ihm die Strecke $PQ = 2 \cdot PB$, so ist der Krümmungsmittelpunkt C für den Punkt B der Bahn (B) der dem Punkte D zugeordnete vierte harmonische Punkt zu P, Q, D und somit leicht durch Construction zu finden. Wäre B der Mittelpunkt der Sehne PD, so würde Q mit D und folglich auch C mit D zusammenfallen; so ist insbesondere der sogenannte Wendepol C' der Krümmungsmittelpunkt der Bahn, in welcher sich der Mittelpunkt B' des Wendekreises bewegt, für den Ort, in dem er sich augenblicklich in dieser seiner Bahn befindet.

Fig. 115.



Um nun hiernach auf die Figur 114 zurückzukommen, entspreche diese Figur $ACBE$ der mittleren Configuration eines Regulators, der nach den zu Ende des vorigen Paragraph entwickelten Regeln mit gekreuzten Kugelstangen und ungekreuzten Hülsenstangen und zwar mit $l = a$ construirt ist. Der Punkt P, in welchem die Gerade CB von der Horizontalen durch E geschnitten wird, ist der augenblickliche Pol für die relative Bewegung von BE gegen die Axe AA, indem er der Punkt ist, in welchem sich die Normalen der Bahnen von B und E für die augenblicklichen Oerter dieser Punkte schneiden. Der Wendekreis geht ausser durch P auch durch den Punkt E, da dessen Bahn eine gerade Linie EC' ist, deren sämmtliche Punkte den Charakter von Wendepunkten haben. Ein dritter Punkt des Wendekreises ergiebt sich, wenn $BQ = BP$ gemacht und berücksichtigt wird, dass C der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes B ist, in dem diesem Punkte C zugeordneten vierten harmonischen Punkte D zu den Punkten P, Q und C. Ist nun B' der Mittelpunkt des durch die Punkte P, E, D gehenden Kreises, und C' sein zweiter Durchschnittspunkt mit der Verticalen durch E, d. i. der dem Punkte P gegenüber liegende Endpunkt des Durchmessers PC' des Wendekreises (der sogenannte Wendepol), so sind B' und C' die Charnieraxen der Stange $B'C'$, durch welche die jetzt bei B' einen stumpfen Winkel bildende, die Kugel bei B tragende Stange $EB'B$ mit der Regulatorwelle zu verbinden ist.

Fig. 116.

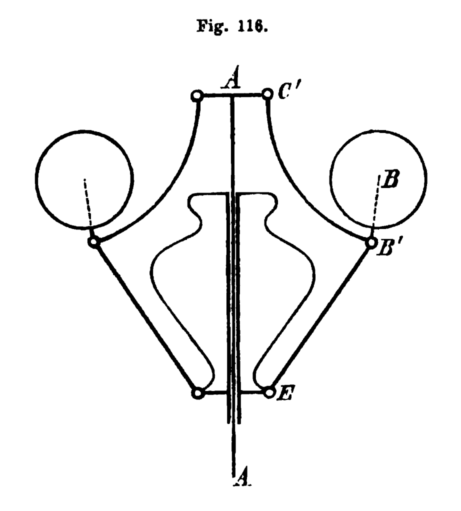


Fig. 116 zeigt die Ausführung des Regulators in einfachen Linien und lässt erkennen, wie zugleich durch den Umstand, dass der Winkel $B'EC'$ (Fig. 114) grösser, als der Winkel BEC' ist, mehr Raum zur Anbringung eines schweren Belastungsgewichtes Q innerhalb der Constructionshöhe H gewonnen wurde. Um diesen Raum so vollständig wie möglich auszunutzen, können die Stangen $C'B'$ passend so gekrümmt werden, dass sie sich in der unteren Grenzlage an die Kugeln, in der oberen an das Belastungsgewicht anlegen. Nur ist zu berücksichtigen, dass, wenn Q allein ohne G vergrössert würde, damit nach Gl. (13) im vorigen Paragraph auch

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \left(\frac{\omega'}{\omega''}\right) \sqrt{1 + \frac{Q}{G+Q}\lambda}$$

und somit δ grösser würde, weshalb es vorzuziehen ist, die Vergrösserung der zwischen den Grenzen

$$G + Q \text{ und } \frac{G}{1+\lambda} + Q$$

veränderlichen Energie durch gleichzeitige Vergrösserung von G und Q herbeizuführen.

Wenn man, um die durch den Pröll'schen Regulator erzielte Verkleinerung der Constructionshöhe H zu prüfen, die Figur 114 entsprechend dem Beispiele zu Ende des vorigen Paragraph, also mit

$$b = 0{,}614\,a, \quad c = 0{,}04\,a, \quad e = 0{,}15\,b = 0{,}092\,a$$

aufzeichnet, und zwar in der mittleren Lage, also für

$$\alpha = \frac{20^0 + 32^0}{2} = 26^0,$$

so findet man den Radius des Wendekreises:

$$C'B' = EB' = 0{,}485\,a = 0{,}79\,b$$

und dann durch Verschiebung in die untere Grenzlage ($\alpha = \alpha'' = 20^0$ die Höhe des festen Punktes C' über der tiefsten Lage des Punktes E:

$$H = 0{,}875\,a$$

$= 58\,\%$ des im vorigen Paragraph gefundenen Werthes $= 1{,}517\,a$ bezw. nur $47\,\%$ des der rhombischen Anordnung entsprechenden Werthes $= 1{,}879\,a$.

Was die vollständige bei diesem Regulator vom Kugelmittelpunkte B relativ gegen die Axe AA durchlaufene Bahn betrifft, so mag bemerkt werden, dass der Mechanismus, gebildet aus den gleich langen Gliedern $C'B'$ und $B'E$, aus der Hülse und der Regulatorwelle, kein anderer als der in §. 41 besprochene gleichschenklige Schubkurbelmechanismus ist mit $C'B'$ als Kurbel, $B'E$ als Koppel, der Hülse als Schieber und der Regulatorwelle als Steg. Indem dann nach Fig. 53 a. a. O. die relativen Polbahnen der Koppel und des Steges Cardanische Kreise sind, die Polbahn von $B'E$ nämlich der oben besprochene Wendekreis mit dem Mittelpunkte B' und Radius $B'E = B'C' = r$, die Polbahn der Regulatorwelle dagegen der doppelt so grosse Kreis um den Mittelpunkt C' ist, beschreibt der mit ersterem Kreise fest verbundene Punkt B nach §. 12 eine Ellipse um C' als Mittelpunkt mit den Halbaxen $r + s$ und $r - s$, wenn hier mit s die Strecke BB' bezeichnet wird. Die kleine Axe dieser Ellipse ist, wie leicht

zu übersehen, gegen die Gerade $C'B'$ geneigt unter einem Winkel = der Hälfte des Winkels $BB'C'$.

Uebrigens wird bei so kleiner Winkeldifferenz $\alpha' - \alpha'' = 12^0$, wie sie bei obigem Beispiele und ähnlich auch von Pröll selbst bei seinen betreffenden Ausführungen gewählt wurde, von jener elliptischen Bahn des Punktes B thatsächlich nur ein so kleines Stück benutzt, dass es mit dem Bogen eines Kreises zum Mittelpunkte C und Radius CB, Fig. 114, ohne in Betracht kommenden Fehler als zusammenfallend angesehen werden kann, und dass somit auch die betreffenden Gleichungen des vorigen Paragraph mit ausreichender Annäherung ihre Gültigkeit für den Pröll'schen Regulator behalten.

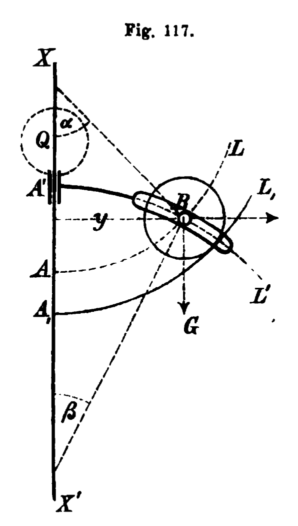
§. 117. Centrifugalregulatoren mit Leitcurven für die wirksamen Massen.

Durch die besprochene Kreuzung der Stangen eines Watt'schen Centrifugalregulators lässt sich zwar sein Ungleichförmigkeitsgrad auf einen für viele Fälle schon hinlänglich kleinen Betrag von etwa

$$\varDelta = \delta + \varepsilon = 0{,}08 + \varepsilon$$

reduciren, doch bleibt es in manchen Fällen wünschenswerth, ihn unbeschadet der Stabilität des Gleichgewichtes noch mehr zu verkleinern. Zu dem Ende kann man bemerken, dass jener dem Watt'schen Regulator anhaftende Mangel darin begründet ist, dass bei ihm die Punkte B und B_1, Fig. 112 und Fig. 113, relativ gegen die Regulatorwelle sowohl wie gegen die Hülse in Kreisbögen geführt sind, und dass es somit nur des Ersatzes dieser kreisförmigen durch anders gestaltete Leitbahnen bedürfen wird, um die Stabilität des Gleichgewichtes und somit δ in beliebigem Maasse zu verkleinern. Diese verallgemeinernde Abänderung, die dann freilich die an sich erwünschte ausschliessliche Verwendung von Drehkörperpaaren für die betreffende kinematische Kette verbietet, ist in Fig. 117 (hinsichtlich einer der beiden stets symmetrisch gleichen Hälften) schematisch dargestellt, und zwar entsprechend dem Falle $l = a$, d. h. dem Zusammenfallen der Punkte K und B in Fig. 112. Die mit der Regulatorwelle fest

Fig. 117.



verbundene Leitbahn AL des Punktes B ist dadurch gegeben, dass das hier als schwere Rolle ausgeführte Gewicht G auf einer materiellen Leitfläche rollt, die nach einer mit AL äquidistanten Curve (Abstand = Rollenhalbmesser) gekrümmt ist, während die relative Bahn $A'L'$ desselben Punktes B gegen die Hülse dadurch gegeben sein mag, dass zwei beiderseits hervorragende cylindrische Zapfen der Rolle in entsprechenden Schlitzen einer sie gabelförmig umfassenden mit der Hülse verbundenen Curvenschleife geführt werden.

Sind x, y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes B der Curve AL für AX als x-Axe, ferner x', y die rechtwinkligen Coordinaten des entsprechenden Punktes B der Curve $A'L'$ für $A'X'$ als x'-Axe, so entspricht dem Gleichgewichte der Schwerkraft G, der Centrifugalkraft $\frac{G}{g}y\omega^2$ und der hier nur zur Hälfte in Betracht kommenden Hülsenbelastung Q nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung:

$$\frac{G}{g}y\omega^2 dy = G dx + \frac{1}{2}Q(dx + dx') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

oder, wenn α und β die Winkel bedeuten, unter welchen die Normalen von AL und $A'L'$ für den Punkt B gegen XX' geneigt sind, wegen

$$\frac{dx}{dy} = tg\,\alpha \quad \text{und} \quad \frac{dx'}{dy} = tg\,\beta$$

$$\frac{y\omega^2}{g} = tg\,\alpha + \frac{1}{2}\frac{Q}{G}(tg\,\alpha + tg\,\beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

d. i. die Gleichung (2) in §. 114 mit $r = y$ und $l = a$, wie übrigens auch ohne Weiteres einleuchtend gewesen wäre, da mit Bezug auf eine unendlich kleine Lagenänderung die betreffenden Curven durch ihre Krümmungskreise für den Punkt B ersetzt werden können. Wäre das Gewicht G nicht unmittelbar als schwere Rolle vorhanden, sondern an die dann kleiner und wesentlich leichter auszuführende Rolle vermittels einer Stange BK angehängt, die, bei B durch ein Drehkörperpaar mit ihr verbunden und bei K die Kugel tragend, im Gleichgewichtszustande normal zur Curve AL gerichtet ist, so würde ebenso jene Gleichung (2), §. 114, in ihrer allgemeinen Form auch hier gelten, unter r wieder den Abstand des Kugelmittelpunktes K von der Axe XX', unter a aber jetzt den Krümmungsradius der Curve AL für den Punkt B und unter l den um BK längeren entsprechenden Krümmungsradius der vom Punkte K durchlaufenen äquidistanten Curve verstanden.

Indem eine der Leitcurven AL, $A'L'$ beliebig angenommen werden kann, empfiehlt sich mit Rücksicht auf die Leichtigkeit der Ausführung



und auf die Verwendbarkeit von Umschlusspaaren statt weniger dauerhafter höherer Elementenpaare, sie als Gerade oder als Kreislinie anzunehmen; letzteren Falles insbesondere kann die Verbindung der Gewichte G mit einem der beiden Theile, Regulatorwelle oder Hülse, durch Stangen und Charniere in der Weise des Watt'schen Regulators beibehalten werden. Die solcher Annahme der einen Leitcurve entsprechende Bestimmung der anderen ist zwar bisher nur in der Absicht ausgeführt worden, dadurch einen vollkommen astatischen Regulator zu erzielen, in welchem Falle sich ihre Gleichung durch Integration von Gl. (1) unter Voraussetzung eines constanten Werthes von ω und mit Rücksicht darauf, dass $x=0$, $x'=0$, $y=0$ zusammengehörige, nämlich den Scheitelpunkten A und A' entsprechende Coordinaten beider Curven sind, in folgender Gestalt ergiebt:

$$G\frac{\omega^2}{g}y^2=(2G+Q)x+Qx' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Indessen hat es keine Schwierigkeit, durch geringe Abänderung der dieser Gleichung entsprechenden Construction einen nach §. 105 stets vorzuziehenden kleinen Grad von Stabilität des Gleichgewichtes herbeizuführen.

1. Wird, wie bei dem astatischen Regulator von Garnett, $A'L'$ als eine zur Axe XX' senkrechte Gerade angenommen, entsprechend $x'=0$, so ergiebt sich die Curve AL als eine Parabel mit der Gleichung:

$$G\frac{\omega^2}{g}y^2=(2G+Q)x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Ohne Aenderung dieser Parabel kann der Regulator einer anderen constant zu erhaltenden Geschwindigkeit $\omega+\Delta\omega$ angepasst werden, indem Q durch $Q+\Delta Q$ ersetzt wird gemäss der Gleichung:

$$\left(\frac{\omega+\Delta\omega}{\omega}\right)^2=\frac{2G+Q+\Delta Q}{2G+Q}.$$

Die Energie ist nach §. 114, Gl. (7) mit $l=a$ und $\beta=0$:

$$E=\frac{W}{\varepsilon}=2G+Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ebenso gross wie beim Watt'schen Regulator mit rhombischer Anordnung für $l=2a$.

Uebrigens mag bemerkt werden, dass die parabolische Gestalt der Curve AL nicht ausschliesslich an die Annahme von $A'L'$ als gerade Linie gebunden, sondern dass dazu nach Gl. (3) nur ein constantes Verhältniss von x' zu x erforderlich ist, wie es z. B. auch dann stattfände, wenn beide Curven einander congruent angenommen würden. Ebenso ist die Beziehung $x'=nx$, unter n eine Constante verstanden, auch die allgemeine Bedingung, an welche die Adjustirbarkeit des Regulators für eine andere Geschwindig-

keit ω durch Aenderung von Q geknüpft ist, wie Gl. (3) unmittelbar erkennen lässt. Endlich ist auch nur unter dieser Voraussetzung die Energie des Regulators für alle seine Configurationen gleich gross gemäss §. 114, Gl. (7); denn aus $tg\beta = n\, tg\alpha$ folgt

$$dx' = n\,dx, \quad x' = nx + Const. = nx,$$

da $x = 0$ und $x' = 0$ entsprechende Werthe sind. —

Um diesem Garnett'schen Regulator seine vollständige Astasie zu nehmen, kann man entweder die Parabel AL durch den Bogen einer Ellipse ersetzen, deren in AX liegende grosse Hauptaxe sehr lang ist, oder die Gerade $A'L'$ durch einen schwach gekrümmten Kreisbogen. Sind im ersten Falle a und b die Halbaxen der Ellipse, so ist mit $p = \frac{b^2}{a}$ ihre Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2.$$

Daraus folgt
$$y\,dy = p\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$$

und da nach Gl. (1) mit $x' = 0$ auch

$$G\frac{\omega^2}{g}\, y\,dy = \left(G + \frac{1}{2} Q\right) dx$$

ist, ergiebt sich:

$$p\left(1 - \frac{x}{a}\right)\omega^2 = g\left(1 + \frac{1}{2}\frac{Q}{G}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

folglich ω wachsend mit x, aber beliebig wenig, wenn nur a hinlänglich gross gewählt wird. Die Einsetzung gegebener zusammengehöriger Grenzwerthe von ω und x liefert nach (6) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Constanten a und p, wodurch die Ellipse bestimmt ist.

Würde andererseits AL als Parabel:

$$y^2 = 2px,$$

$A'L'$ aber als Bogen eines Kreises zum Radius b angenommen, dessen Mittelpunkt in XX' liegt, gemäss der Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2bx' - x'^2,$$

so würde aus den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$y\,dy = p\,dx \quad \text{und} \quad y\,dy = (b - x')\,dx'$$

mit Rücksicht auf Gl. (1) folgen:

$$G\frac{\omega^2}{g} = \left(G + \frac{1}{2} Q\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{Q}{b - x'}$$

$$= \left(G + \frac{1}{2} Q\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{b^2 - y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

also ω wachsend mit y, während jetzt b und p durch die gegebenen Grenzwerthe von ω und y zu bestimmen wären.

2. Die Bestimmung der Curve $A'L'$, Fig. 117, bei Annahme von AL als Kreisbogen und zwar als Bogen eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Axe XX' liegt, ist gemäss der Forderung $\omega = Const.$ von Werner bei seinem astatischen Expansionsregulator* ausgeführt worden. Dabei sind die Kugeln in der gewöhnlichen Weise des Watt'schen Regulators aufgehängt, und zwar so, dass die Axe der Regulatorwelle von der gemeinsamen Aufhängungsaxe (entsprechend $CC_1 = 2c = 0$ in Fig. 112) geschnitten wird. Die nach der Curve $A'L'$ gekrümmte Schleife geht durch einen verticalen Schlitz jeder Kugel hindurch und ist mit ihr gepaart durch einen horizontalen Bolzen, der mittels einer kleinen um ihn drehbaren Rolle in dem betreffenden curvenförmigen Schlitz der Schleife geführt wird. Letztere trägt als Hülse einen Körper, der in Folge eigenthümlich gestalteter diametral gegenüber liegender Hervorragungen, die nach unten zu einen kleiner werdenden Theil des Umfanges einnehmen, durch seine Höhenlage die Eröffnungsdauer des Expansionsventils einer Dampfmaschine bestimmt in der Weise, dass, je mehr mit dem Auseinandergehen der Kugeln die Curvenschleife mit dem Hülsenkörper in die Höhe geht, desto mehr der Füllungsgrad der Dampfmaschine verkleinert wird. Indem dieser Hülsenkörper nur kraftschlüssig (durch Federkraft) mit dem Stellzeuge gepaart ist, um seine relative Lagenänderung gegen dasselbe in entsprechender Weise zu ermöglichen, ist der Regulator bei seiner hier in Rede stehenden Anordnung indirect wirkend von besonderer Art, nämlich so, dass gleichwohl seine Configuration zwischen weiten Grenzen veränderlich ist.

Die Gleichung der Schleifencurve $A'L'$ wird unmittelbar in obiger Gl. (3) erhalten, indem darin für x die der Ordinate y entsprechende vom Scheitel A aus gerechnete Abscisse des gegebenen Kreisbogens AL gesetzt wird. Indem aber jetzt x' und x ein veränderliches Verhältniss haben, geht dem Regulator die Adjustirbarkeit durch Aenderung von Q ab, sowie auch die Unabhängigkeit seiner Energie E von der augenblicklichen Configuration. Was den Werth von E betrifft, so ist allgemein nach Gl. (2):

$$\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \frac{2G}{Q}\left(\frac{y\omega^2}{g\,tg\,\alpha} - 1\right)$$

und somit nach §. 114, Gl. (7) mit $l = a$:

---

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1868, S. 489.

$$E = \frac{Q}{\frac{y\omega^2}{g\,tg\,\alpha} - 1} + Q = \frac{Q}{1 - \frac{g\,tg\,\alpha}{y\omega^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

und folglich hier, wenn a den Radius des Kreisbogens AL bedeutet, wegen $y = a \sin \alpha$:

$$E = \frac{Q}{1 - \frac{g}{a\omega^2 \cos \alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Um dem Gleichgewichte dieses Regulators einen beliebigen Grad von Stabilität zu verleihen, werde die Gleichung (3) der Schleifencurve $A'L'$ zwar hinsichtlich ihrer allgemeinen Form:

$$y^2 = 2px + 2qx'$$

beibehalten, jedoch mit dem Vorbehalte anderweitiger Bestimmung von p und q. Indem dann aus der Gleichung des Kreisbogens AL:

$$y^2 = 2ax - x^2$$

durch Differentiation folgt:

$$(a - x)\,dx = y\,dy$$

und damit aus obiger Gleichung von $A'L'$:

$$q\,dx' = y\,dy - p\,dx = \left(1 - \frac{p}{a - x}\right) y\,dy,$$

ergiebt sich durch Substitution dieser Ausdrücke von dx und dx' in Gl. (1):

$$G\frac{\omega^2}{g} = \left(G + \frac{1}{2}Q\right)\frac{1}{a - x} + \frac{1}{2}Q\left(\frac{1}{q} - \frac{p}{q}\,\frac{1}{a - x}\right)$$

$$\frac{2G}{Q}\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{q} + \left(\frac{2G}{Q} + 1 - \frac{p}{q}\right)\frac{1}{a - x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Durch Einsetzung zusammengehöriger gegebener Grenzwerthe von ω und von x bezw. $a - x = a \cos \alpha$ erhält man hieraus zwei Bestimmungsgleichungen von p und q. Natürlich ergiebt sich dann die Grösse

$$\frac{2G}{Q} + 1 - \frac{p}{q},$$

die für den astatischen Regulator $=$ Null ist, hier positiv, so dass beständig ω mit x oder α wächst, d. h. die Gleichgewichtslagen des Regulators durchweg stabil sind.

Uebrigens werden dergleichen Regulatoren mit Curvenschleifen stets nur ausnahmsweise Anwendung zu gewärtigen haben, wenn es sich zeigt, dass der durch sie erstrebte Zweck in genügender Weise auch durch solche Constructionen erreicht werden kann, deren kinematische Ketten nur mit Hülfe von Umschlusspaaren gebildet sind.

§. 118. Watt'scher Regulator mit variabler Hülsenbelastung.

Ebenso wie durch Aenderung der Hülsenbelastung Q der Watt'sche Regulator verschiedenen Normalgeschwindigkeiten ω angepasst werden kann, so kann auch die Veränderlichkeit von ω dadurch in engere Grenzen eingeschlossen und somit der Ungleichförmigkeitsgrad verkleinert werden, dass diese Belastung Q in entsprechender Weise selbstthätig veränderlich gemacht wird. Insbesondere bei **rhombischer Anordnung** des Regulators, für welche die Gleichung (4) in §. 114 gilt, müsste Q ab- oder zunehmen, wenn bei Aufwärts- oder Abwärtsbewegung der Hülse auch h ab- oder zunimmt. Nach der **Grossmann**'schen Anordnung des Watt'schen Regulators soll zu dem Ende der Hebel des Stellzeuges, der mit seinem gabelförmigen Ende die Halsnuth der Hülse umgreift, ausserhalb seiner Drehungsaxe so belastet werden, dass er einen mit sinkender Hülse zunehmenden abwärts gerichteten Druck auf dieselbe ausübt, oder vielmehr es soll, damit dieser Druck absolut genommen möglichst klein bleiben kann, derselbe bei mittlerer Höhenlage der Hülse = Null, bei ihrer höchsten Lage aber aufwärts gerichtet und ebenso gross $= \Delta Q$ sein wie der abwärts gerichtete Druck bei tiefster Hülsenlage. Es ist dann leicht, die Grösse ΔQ so zu bestimmen, dass ω bei mittlerem Gleichgewichtszustande zwischen gegebenen Grenzen ω' und ω'', entsprechend den Grenzwerthen h' und h'' von h, bezw. α' und α'' von α, veränderlich sei.

Wenn nämlich jetzt mit Q nur der constante Theil der Hülsenbelastung bezeichnet wird, herrührend von dem Eigengewichte der Hülse und einem unmittelbar mit ihr verbundenen Belastungsgewichte, so entsprechen jener Forderung nach §. 114, Gl. (4), die Gleichungen:

$$\omega'^2 = \frac{g}{h'}\left(1 + \frac{a}{l}\,\frac{Q - \Delta Q}{G}\right)$$

$$\omega''^2 = \frac{g}{h''}\left(1 + \frac{a}{l}\,\frac{Q + \Delta Q}{G}\right)$$

und folgt daraus:

$$\frac{\frac{l}{a}G + Q - \Delta Q}{\frac{l}{a}G + Q + \Delta Q} = \frac{h'}{h''}\left(\frac{\omega'}{\omega''}\right)^2 = \gamma$$

$$\Delta Q = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\left(\frac{l}{a}G + Q\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Dabei ergiebt sich, wenn δ gegeben ist, aus Gl. (9) in §. 114:

$$\frac{\frac{\omega'}{\omega''}-1}{\frac{\omega'}{\omega''}+1}=\frac{\delta}{2}$$

$$\frac{\omega'}{\omega''}=\frac{2+\delta}{2-\delta};\quad \gamma=\frac{h'}{h''}\left(\frac{2+\delta}{2-\delta}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Wird z. B. $\alpha'=45^0$, $\alpha''=25^0$ und $c=0$ angenommen, so dass nach §. 114 bei constanter Hülsenbelastung $\delta=0{,}124$ wäre, und soll dieser Werth von δ durch das hier in Rede stehende Hülfsmittel auf 0,04 reducirt werden, so ergiebt sich nach Gl. (2):

$$\gamma=\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha''}\left(\frac{2+\delta}{2-\delta}\right)^2=0{,}845$$

und damit nach Gl. (1):

$$\varDelta Q=0{,}084\left(\frac{l}{a}G+Q\right).$$

Damit dieser Druck $\varDelta Q$ auf die Hülse bei ihrer höchsten Lage aufwärts, bei der tiefsten abwärts ausgeübt werde, ist der betreffende Hebel des Stellzeuges so anzuordnen, dass bei mittlerer Höhenlage der Hülse sein die letztere angreifender Arm, dessen Länge $=q$ sei, horizontal ist, sein Schwerpunkt aber in einer gewissen Höhe p vertical über der Drehungsaxe des Hebels liegt. Ist dann P das Gewicht dieses Hebels sammt Belastung und φ sein jedenfalls sehr kleiner Ausschlagwinkel von der mittleren Lage nach jeder Seite, so ist die erforderliche Grösse von P:

$$P=\frac{\varDelta Q\,.\,q\cos\varphi}{p\sin\varphi}.$$

Ist aber s die Hublänge der Hülse, so ist $\sin\varphi=\frac{1}{2}\frac{s}{q}$, während $\cos\varphi=1$ gesetzt werden kann, also

$$P=2\frac{q^2}{ps}\varDelta Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Für obiges Beispiel wäre nach §. 114:

$$s=0{,}4a \quad \text{und somit} \quad P=5\frac{q^2}{pa}\varDelta Q.$$

Die Adjustirbarkeit für verschiedene Normalgeschwindigkeiten ω durch Aenderung von Q kann bei dieser Grossmann'schen Einrichtung dem Watt'schen Regulator dadurch erhalten werden, dass das Belastungsgewicht des Stellhebels verschiebbar gemacht wird, um dadurch den Schwerpunktsabstand p von der Axe gemäss Gl. (3) in demselben Verhältnisse zu ändern

wie ΔQ gemäss Gl. (1) durch Vergrösserung oder Verkleinerung von Q geändert wird. Indessen ist es ein Uebelstand, dass hier nur bei mittlerer Höhenlage der Hülse ein freies und reibungsloses Spiel derselben in der Gabel des Stellhebels möglich ist, sowie auch die passende Anordnung dieses Hebels gewisse nicht immer vorhandene räumliche Verhältnisse voraussetzt. Nach wie vor sind deshalb die Bestrebungen darauf gerichtet worden, den vorgesetzten Zweck angemessener Verkleinerung des Ungleichförmigkeitsgrades ohne die genannten Mängel der Grossmann'schen Einrichtung und doch ohne Verlust der guten Eigenschaften des, besonders von Pröll in möglichster Gedrungenheit und Formvollendung (Fig. 116) ausgeführten, Watt'schen Regulators durch anderweitige, mehr principielle Modificationen desselben zu erreichen. Namentlich sind in dieser Hinsicht hervorzuheben und sollen im Folgenden näher besprochen werden: der sogenannte Cosinus-Regulator von Gruson und der Regulator von Buss. Bei beiden ist ausser grösstmöglicher Gleichförmigkeit des Ganges zugleich die äusserste Gedrungenheit der Form, d. h. grosse Masse und entsprechend grosse Energie in möglichst kleinem Raume dadurch erzielt worden, dass die dem Mechanismus des Watt'schen Regulators zu Grunde liegende (bei rhombischer Anordnung sowie beim Pröll'schen Regulator gleichschenklige) Schubkurbelkette wenigstens im Princip durch eine rechtwinklige Kreuzschieberkette (§. 42) ersetzt wurde. Dieselbe ist beim Gruson'schen Regulator als Kreuzschiebermechanismus, bei dem Regulator von Buss als Kreuzschieberkurbel verwendet, insofern dort die relativ festgestellte Regulatorwelle, hier die bewegliche Hülse als Kreuzschieber, nämlich als das Glied der Kette erscheint, das mit den beiderseits benachbarten Gliedern durch Prismenpaare mit rechtwinklig gekreuzten Schubrichtungen gepaart ist oder wenigstens im Princip ohne wesentliche Aenderung der Eigenschaften des Regulators gepaart sein könnte. Obschon der Regulator von Buss der ältere ist, mag doch der Cosinus-Regulator zuerst besprochen werden, da bei ihm das beiden zu Grunde liegende Princip auf einfachere und mehr übersichtliche Weise zur Ausführung benutzt worden ist.

§. 119. Cosinus-Regulator.*

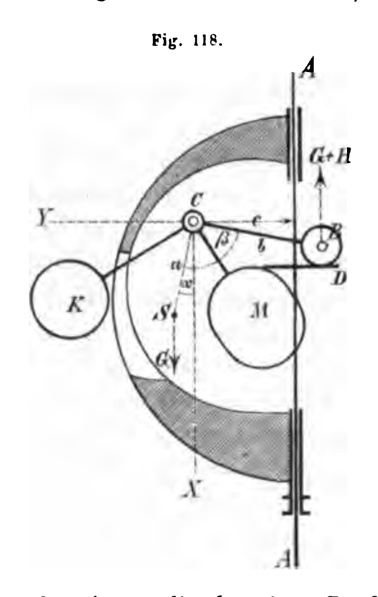
Die Hülse ist als eine mit der Regulatorwelle AA, Fig. 118, prismatisch gepaarte Hohlkugel gestaltet, in deren Höhlung die zwei Centrifugalpendel für alle Lagen innerhalb je eines Schwingungswinkels von 40

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1877, S. 97.



bis 50° eben Platz finden. Jedes dieser einander diametral gegenüber liegenden Pendel, von denen die Figur nur eines und zwar nahe der oberen Grenzlage schematisch darstellt, ist mit langer Nabe C um einen durch die hohlkugelförmige Hülse gesteckten horizontalen Stahlstift drehbar und besteht hauptsächlich aus zwei Massen, der Kugel K, deren Arm einen Schlitz der Hülsenwand durchdringt, und der ganz im Inneren der Hülse bleibenden Masse M; während dabei der die Kugel K tragende Arm von der Mitte der langen Nabe C abgezweigt ist, so dass der Kugelmittelpunkt in einer durch AA gehenden, zur Axe C senkrechten Ebene beweglich ist, geht der kurze Arm, der die Masse M mit der Nabe C verbindet, von einem Ende der letzteren aus, und hat jene Masse M eine derartig abgeflachte Form, dass sie bei den Schwingungen des Pendels an der Regulatorwelle AA vorbeigehen kann, die des einen Pendels an der einen, die des andern an der gegenüber liegenden Seite dieser Welle. Endlich trägt jedes der beiden Centrifugalpendel einen Zapfen B, dessen Axe mit der Schwingungsaxe C parallel ist, übrigens nicht nach Fig. 118 vermittels eines dritten von der Nabe C ausgehenden besonderen Armes CB, sondern vermittels eines seitlichen Fortsatzes der Masse M. Um diese Zapfen B sind Frictionsrollen drehbar, mit denen sich die Pendel auf eine längliche horizontale ebene Platte D stützen, die an der Regulatorwelle befestigt ist und zwischen den einander zugekehrten verticalen Begrenzungsebenen der Massen M mit etwas Spielraum Platz findet. Wenn nun bei wachsender Winkelgeschwindigkeit ω die Centrifugalpendel sich in solchem Sinne drehen, dass ihre Schwerpunkte S sich von AA entfernen, so ist damit wegen der Stützung der Frictionsrollen gegen die Platte D nothwendig eine Hebung der Pendelaxen C und somit auch der Hülse verbunden, deren Hub dabei nach oben durch die Platte D, nach unten durch einen Stellring auf der Regulatorwelle begrenzt wird. Auch ist ersichtlich, dass die relative Beweglichkeit der Hülse und jedes Pendels gegen die Regulatorwelle unverändert bliebe, wenn das nur zu möglichstem Ausschlusse von Reibung hier benutzte, aus der Platte D und einer Frictionsrolle bestehende kraftschlüssige höhere

Fig. 118.



Elementenpaar durch ein Prismenpaar ersetzt würde, dessen Schubrichtung rechtwinklig sowohl gegen die Drehkörperpaaraxen B und C, wie auch gegen die Axe AA gerichtet ist. Der Mechanismus stellt sich dann als ein Kreuzschiebermechanismus (§. 42) dar, und ergeben sich die relativen Bahnen aller Punkte der Centrifugalpendel gegen die Regulatorwelle als Ellipsen.

Wenn in der Ebene von Fig. 118, d. i. in der durch die Axe AA gehenden und zu den Pendelaxen C senkrechten Ebene die Coordinatenaxen CX und CY so angenommen werden, wie die Figur erkennen lässt, nämlich CX parallel AA und positiv nach unten, CY senkrecht dazu und positiv nach aussen, wenn ferner mit α der Winkel bezeichnet wird, den die durch den Schwerpunkt S eines Pendels und durch seine Aufhängungsaxe C gehende Ebene mit der Axe CX bildet, positiv gesetzt im Sinne XY, so handelt es sich zunächst um die dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Beziehung zwischen α und ω. Sie wird erhalten in der Gleichung, wodurch die Momentensumme aller auf das Centrifugalpendel wirkenden Kräfte für die Axe C desselben $=$ Null gesetzt wird. Diese Kräfte sind die Centrifugalkräfte der Massenelemente, die im Schwerpunkte S angreifend zu denkende Schwerkraft $= G$ des Pendels und der in B angreifende Reactionsdruck der Platte D, der vertical aufwärts gerichtet und $= G + H$ ist, wenn H die Hälfte des Hülsengewichtes bedeutet.

Bei der eigenthümlichen Form des Pendels kann die Momentensumme $= M$ der Centrifugalkräfte hier nicht so einfach wie beim Watt'schen Regulator gefunden werden, bei dem dazu als Masse nur die in ihrem Mittelpunkte concentrirt gedachte Kugelmasse berücksichtigt zu werden brauchte, höchstens mit kleiner Correction hinsichtlich des untergeordneten Einflusses der Stangenmassen. Ist vielmehr hier dm ein Massenelement des Pendels im augenblicklichen Abstande r von AA, so kann seine radial auswärts gerichtete Centrifugalkraft $= \omega^2 r\,dm$ zunächst in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine normal zur Ebene XY, die andere nach der Axe CY gerichtet ist. Erstere ist ohne Einfluss auf das Moment M, während letztere $= \omega^2 (c + y)\,dm$ ist und das Moment

$$\omega^2 x\,(c + y)\,dm$$

für die Axe C hat, wenn c den kürzesten Abstand dieser Axe von AA bedeutet und wenn x, y die Coordinaten des Punktes sind, in welchem sich das Massenelement dm bezw. ein Punkt desselben auf die Ebene XY projicirt. Hiernach ist

$$M = \omega^2 \int x\,(c + y)\,dm = \omega^2 \left(c \int x\,dm + \int xy\,dm\right)$$
$$= \omega^2 \left(c\,\frac{G}{g}\,a \cos\alpha + \int xy\,dm\right),$$

unter a den Abstand des Schwerpunktes S von der Axe C verstanden. Nun besteht aber die Eigenthümlichkeit des Gruson'schen Pendels, derentwegen es als Cosinus-Pendel, der Regulator selbst als Cosinus-Regulator bezeichnet wird, darin, dass bei ihm für alle Lagen

$$J = \int xy\,dm = 0$$

und somit

$$M = \frac{\omega^2}{g} G a c \cos\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

also bei gegebener Winkelgeschwindigkeit ω dem Cosinus des Ausschlagwinkels α proportional ist. Wie in der That die Massenvertheilung des Pendels so gewählt werden kann, dass das Integral J beständig $= 0$ ist, ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Es seien ξ, η die unveränderlichen Coordinaten des Massenelementes dm für zwei beliebige rechtwinklige Coordinatenaxen von einerlei Ebene XCY und Ursprung C mit den Axen CX, CY, aber von fester Lage im Pendel, und es sei φ der Winkel, um welchen diese Axen gegen CX und CY im Sinne XY bei irgend einer Lage des Pendels gedreht sind. Dann ist

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi; \quad y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi$$

$$xy = (\xi^2 - \eta^2)\sin\varphi\cos\varphi + \xi\eta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$= (\xi^2 - \eta^2)\frac{\sin 2\varphi}{2} + \xi\eta\cos 2\varphi,$$

folglich

$$J = \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\int \xi^2 dm - \int \eta^2 dm\right) + \cos 2\varphi \int \xi\eta\,dm$$

unabhängig vom Winkel φ, d. h. bei jeder Lage des Pendels $=$ Null, wenn zugleich

$$\int \xi^2 dm - \int \eta^2 dm = 0 \quad \text{und} \quad \int \xi\eta\,dm = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

ist. Dass diesen Bedingungen stets und zwar auf unendlich mannigfache Weise durch passende Massenvertheilung des Pendels genügt werden kann, ist einleuchtend. Hätte sich etwa nach vorläufiger Annahme seiner Gestalt und Masse ergeben:

$$\int \xi^2 dm - \int \eta^2 dm = A \quad \text{und} \quad \int \xi\eta\,dm = B,$$

so wäre eine weitere Masse m von solcher Grösse und Lage hinzuzufügen, dass für sie

$$\int \xi^2 dm - \int \eta^2 dm = -A \quad \text{und} \quad \int \xi\eta\,dm = -B$$

ist, und wenn dazu behufs einer ersten Annäherung die Masse m als materieller Punkt mit den Coordinaten ξ, η so bestimmt wird, dass

$$(\xi^2 - \eta^2)\,m = -A \quad \text{und} \quad \xi\eta m = -B$$

ist, was immer noch auf unendlich mannigfache Weise geschehen kann, so werden, wenn auch thatsächlich nur der Schwerpunkt dieser zusätzlichen

Masse in den so bestimmten Punkt ξ, η oder einen ihm nahe kommenden Punkt gelegt wird, doch für die jetzige Gesammtmasse die oben mit A und B bezeichneten Grössen schon weniger von Null verschieden sein, und können sie auf dieselbe Weise durch wiederholte Hinzufügung einer Ergänzungsmasse der Null noch näher gebracht werden u. s. f.

Durch ein aus nur zwei materiellen Punkten bestehendes Pendel würde den Bedingungen (2) Genüge geleistet, wenn die Massen und Coordinaten dieser Punkte (m_1, ξ_1, η_1 für den ersten, m_2, ξ_2, η_2 für den zweiten) so bestimmt würden, dass

$$\eta_1 = 0, \quad \xi_2 = 0 \quad \text{und} \quad m_1 \xi_1{}^2 = m_2 \eta_2{}^2$$

ist. An diesen idealen Fall schliesst sich das Gruson'sche Pendel insofern an, als die durch die Axe C gehenden Schwerpunktsebenen seiner Hauptmassen K und M (Fig. 118) nahe rechtwinklig gegen einander gerichtet und die Trägheitsmomente dieser Massen für die Axe C nahe gleich gross sind, vorbehaltlich der Correction, die nach solcher vorläufigen Annahme den vorstehenden Bemerkungen zufolge mit Berücksichtigung zugleich der untergeordneten Massenbestandtheile auszuführen ist.

Wenn nun die Entfernung der Axen B, C, Fig. 118, mit b und der Winkel BCS mit β bezeichnet wird, so ist mit Rücksicht auf Gl. (1) die dem mittleren Gleichgewichtszustande entsprechende Momentengleichung:

$$\frac{\omega^2}{g} Gac \cos\alpha = Ga \sin\alpha + (G+H) b \sin(\beta - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$= [Ga - (G+H) b \cos\beta] \sin\alpha + (G+H) b \sin\beta \cos\alpha$$

$$\frac{\omega^2}{g} Gac = (G+H) b \sin\beta + [Ga - (G+H) b \cos\beta] \, tg\,\alpha \quad \ldots\ldots (4).$$

Wäre $\quad Ga - (G+H) b \cos\beta = 0, \quad$ also $\quad \cos\beta = \frac{G}{G+H} \frac{a}{b} \quad \ldots (5),$

so wäre hiernach ω unabhängig von α, d. h. der Regulator astatisch. Um ihn etwas statisch, d. h. um zu machen, dass ω mit wachsendem Ausschlagwinkel etwas zunimmt, muss nach Gl. (4)

$$Ga - (G+H) b \cos\beta \quad \text{etwas} \quad > 0,$$

somit β etwas grösser, als der durch Gl. (5) bestimmte Grenzwerth gemacht werden. Behufs Regulirung des Winkels β ist bei dem Gruson'schen Regulator die Einrichtung getroffen, dass der Zapfen B der Frictionsrolle im Sinne normal zur Richtung CB etwas versetzt werden kann, wodurch dem Regulator bis zu einem gewissen Betrage jeder beliebige Stabilitätsgrad zu ertheilen ist. Diese Regulirung der Stabilität ist dann am feinsten, wenn, um $tg\,\alpha$ innerhalb des angenommenen Schwingungswinkels $= \alpha' - \alpha''$ des

Pendels möglichst wenig veränderlich zu erhalten, die Anordnung so getroffen wird, dass $\alpha'' = -\alpha'$ und somit in der Mittellage $\alpha = 0$ ist. Zugleich wird dadurch die gesammte Verschiebung der Hülse bei gegebener Grösse von $\alpha' - \alpha''$ so gross wie möglich.

Was den Unempfindlichkeitsgrad ε oder die Energie E betrifft, so seien wieder ω_1 und ω_2 die Werthe, bis zu welchen ω zu- oder abnehmen muss, um eine Bewegung der Hülse auf- oder abwärts entgegen dem Widerstande W zur Folge zu haben. Dann ist nach Gl. (3):

$$\frac{\omega_1^2}{g} G a c \cos\alpha = G a \sin\alpha + \left(G + H + \frac{W}{2}\right) b \sin(\beta - \alpha)$$

$$\frac{\omega_2^2}{g} G a c \cos\alpha = G a \sin\alpha + \left(G + H - \frac{W}{2}\right) b \sin(\beta - \alpha),$$

woraus, wenn, wie in §. 113 und §. 114 mit sehr kleinem Fehler

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2 \varepsilon \omega^2$$

gesetzt wird, durch Subtraction folgt:

$$\frac{2 \varepsilon \omega^2}{g} G a c \cos\alpha = W b \sin(\beta - \alpha)$$

$$E = \frac{W}{\varepsilon} = 2 \frac{\frac{\omega^2}{g} G a c \cos\alpha}{b \sin(\beta - \alpha)}$$

oder nach Gl. (3):

$$E = 2\left(G \frac{a}{b} \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} + G + H\right) \quad \ldots \ldots (6.$$

Der Mittelwerth der hiernach etwas variablen Energie ist entsprechend $\alpha = 0$:

$$E = 2(G + H)$$

= dem ganzen Gewichte aller beweglichen Theile. Endlich ist der Hülsenschub:

$$s = b\left[\cos(\beta - \alpha') - \cos(\beta - \alpha'')\right]$$

oder mit $\alpha'' = -\alpha'$:

$$s = b\left[\cos(\beta - \alpha') - \cos(\beta + \alpha')\right] = 2 b \sin\beta \sin\alpha' \quad \ldots \ldots (7.$$

Beispielsweise ist bei einer Ausführung dieses Regulators angenommen worden:

$$H = 3\,G \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{2} a,$$

womit nach Gl. (5) der vollkommenen Astasie entsprechen würde:

$$\cos\beta = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}; \quad \beta = 80^0 24'.$$

Wird statt dessen $\beta = 90^0$ gemacht, so ergiebt sich nach Gl. (3) oder (4):

$$\omega^2 = \frac{g}{c}(6 + tg\,\alpha)$$

und daraus mit $\alpha' = -\alpha'' = 20^0$:

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \sqrt{\frac{6 + tg\,20^0}{6 - tg\,20^0}} = 1{,}062$$

$$\delta = 2\,\frac{\frac{\omega'}{\omega''} - 1}{\frac{\omega'}{\omega''} + 1} = 0{,}06$$

sowie endlich der Hülsenschub nach Gl. (7):

$$s = 2b\sin\alpha' = 0{,}684\,b = 1{,}026\,a.$$

Die Grösse dieses Hülsenschubes, die Vollkommenheit der Verwerthung aller Massen zur Steigerung der Energie und die Gedrungenheit der Form dieses Regulators, sowie die Leichtigkeit, mit welcher sein Ungleichförmigkeitsgrad regulirbar ist, lassen kaum etwas zu wünschen übrig. Auch würde es keine allzu grosse Schwierigkeit haben, ihn ohne Aenderung seiner Eigenschaften für verschiedene Mittelwerthe von ω, also nach Gl. (3) mit $\alpha = 0$ für verschiedene Werthe von

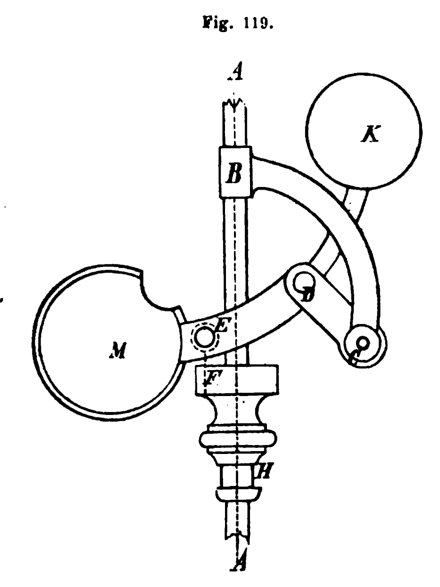
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{c}\,\frac{G + H}{G}\,\frac{b}{a}\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

adjustirbar zu machen, wenn die Einrichtung getroffen würde, den Abstand c der Pendelaxen C von der Axe AA zwischen gewissen Grenzen ändern zu können. Ein Uebelstand ist höchstens mit der seitlichen Lage der Massen M ausserhalb der durch AA gehenden, zu den Axen C senkrechten Mittelebene verbunden, insofern dadurch nicht unbeträchtliche normal gegen diese Mittelebene gerichtete Centrifugalkräfte veranlasst werden, die trotz der mit Rücksicht hierauf vortheilhaften Länge der Naben, mit denen die Pendel um die Stahlstifte C drehbar sind, doch wesentlich zur Vergrösserung der betreffenden Reibung und Abnutzung beitragen werden. Indessen ist dieser Umstand nicht nothwendig mit dem Princip des Cosinus-Regulators, sondern nur zufällig mit der abänderungsfähigen hier gewählten Pendelform verbunden.

§. 120. Regulator von Buss.*

Auch bei diesem Regulator bestehen die beweglichen Theile ausser der Hülse aus zwei eigenthümlich geformten Centrifugalpendeln und aus zwei Verbindungsgliedern, die aber, während sie beim Cosinus-Regulator (als Frictionsrollen) zur Verkettung der Pendel mit der Regulatorwelle dienen, hier die Verkettung der Pendel mit der Hülse vermitteln; während dort die zur Energie nöthige Masse hauptsächlich der hohlkugelförmigen Hülse zugetheilt war, ist sie hier fast ausschliesslich in den Pendeln selbst enthalten. Zu relativ fester Lagerung der Drehungsaxen C dieser massigen Pendel gegen die Axe A der Regulatorwelle dient ein auf letzterer bei B, Fig. 119, befestigter, aus vier kreuzweise nach unten gebogenen Armen bestehender Pendelträger. In Fig. 119 ist derselbe nur zur Hälfte gezeichnet. und zwar ist diese Hälfte vorzustellen als zwei in der Zeichnung sich deckende krumme Arme BC, von denen der eine sich vor, der andere hinter die als Zeichnungsebene angenommene Mittelebene des Regulators erstreckt. An

Fig. 119.



seinem unteren Ende trägt jeder dieser Arme einen horizontalen Zapfen. so dass die Axen beider in derselben Geraden, der Drehungsaxe C des in der Figur dargestellten Pendels liegen. Letzteres besteht ähnlich wie beim Cosinus-Regulator aus zwei Hauptmassen, deren durch C gehende Schwerpunktsebenen auch hier nahe rechtwinklig gegen einander gerichtet sind: aus der Kugel K und der Masse M; seine übrigen, gleichfalls ziemlich massigen Bestandtheile sind die Nabenarme CD mit ihrer Querverbindung bei D und zwei von letzterer ausgehende krumme Arme, von denen der die Kugel K tragende in der Mittelebene, der die Masse M tragende seitlich abgezweigt ist, so dass er an der Regulatorwelle vorbeigehen kann.

* Civilingenieur, 1872, S. 1.

Die Masse M selbst, von fassförmiger Gestalt, ist aber so angebracht, dass ihr Schwerpunkt ebenso wie der Kugelmittelpunkt K in der Mittelebene liegt und somit ein Centrifugalkräftepaar auf die Axe C hier nur in geringem Maasse von dem kurzen Arme DM herrühren kann, das von um so geringerer Bedeutung ist, als die zwei coaxialen Stahlzapfen C möglichst weit aus einander gelegt sind. Indem die fassförmige Masse M eine solche Länge erhalten hat, dass sie zwischen den Nabenarmen CD des anderen, in Fig. 119 nicht gezeichneten Centrifugalpendels gerade Platz findet, ebenso wie die Masse M dieses letzteren Pendels, deren Arm DM hinter der Regulatorwelle vorbeigeht, zwischen den Armen CD der Figur mit kleinem Spielraume schwebend zu denken ist, und indem ferner jede dieser Massen geeignete Aussparungen erhalten hat für die Querverbindung D und den Kugelarm DK des anderen Pendels, ist es möglich geworden, beide Pendel unter sich und mit dem vierzinkigen Pendelträger so zu verschlingen, dass ihnen trotz dieser Massenanhäufung in kleinem Raume doch eine gewisse Beweglichkeit blieb, die freilich nicht so gross ist und somit auch nicht einen so grossen Hülsenschub gestattet, wie es beim Cosinus-Regulator der Fall ist.

Was nun das Verbindungsglied zwischen einem Centrifugalpendel und der Hülse H betrifft, so könnte es am einfachsten ein Schieber sein, der, in einer prismatischen Nuth der Hülse rechtwinklig gegen die Axen A und C gleitend, zugleich um einen am Arme DM sitzenden Stift E drehbar wäre, dessen Axe mit der Axe C parallel ist; der Mechanismus wäre dann eine rechtwinklige Kreuzschieberkurbel mit dem Gliede CE (dem Pendel) als Kurbel und der Hülse als Kreuzschieber. Statt dessen ist beim Regulator von Buss auf dem in zwei hochkantigen flachen Rippen des krummen Pendelarmes DM befestigten Stahlstifte E ein entsprechender etwas kürzerer Hohlcylinder zugleich drehbar und verschieblich, entsprechend der Paarung nicht sowohl durch ein Drehkörperpaar, als vielmehr durch ein Cylinderpaar, und es bildet dieser Hohlcylinder zugleich den Kopf einer Schraube F, die mit verticaler Axe abwärts in ein Muttergewinde der somit daran hängenden Hülse H eindringt, während endlich letztere jetzt mit der Regulatorwelle nicht prismatisch (durch Feder und Nuth), sondern cylindrisch gepaart ist behufs Ermöglichung einer mit der relativen Gleitung verbundenen geringen Drehung. Die Elementenpaare der aus den vier Gliedern CE (Pendel), EF (Schraube), FA (Hülse) und AC (Regulatorwelle mit Pendelträger) bestehenden kinematischen Kette sind also 1) das Drehkörperpaar C, 2) das ihm gegenüber liegende Schraubenpaar F mit rechtwinklig gegen C geschränkter Axe, 3) und 4) zwei

Cylinderpaare E und A, deren Axen beziehungsweise mit der Drehkörperpaaraxe C und der Schraubenaxe F parallel sind. Denkt man sich jedes dieser Cylinderpaare aufgelöst in ein Drehkörperpaar und ein Prismenpaar, wodurch je ein weiter eingefügtes Glied mit den benachbarten Gliedern gepaart ist, so wird ersichtlich, dass die hier vorliegende kinematische Kette entstanden zu denken ist aus der einen der beiden in §. 50 unter a, 4) als zwangläufig nachgewiesenen sechsgliedrigen Schraubenketten, und zwar aus derjenigen, bei welcher die Schraubenpaare mit unter sich parallelen, gegen die der anderen geschränkten Axen zwei Gruppen von je drei benachbarten Paaren bilden. Aus dieser Kette entsteht die hier in Rede stehende als Specialfall dadurch, dass von den drei Schraubenpaaren der einen Gruppe zwei durch Drehkörperpaare, das dritte durch ein Prismenpaar, von den drei Schraubenpaaren der anderen Gruppe aber eines durch ein Drehkörperpaar, ein zweites durch ein Prismenpaar ersetzt wird, und dass endlich diese sechsgliedrige singuläre Schraubenkette auf eine viergliedrige reducirt wird durch Vereinigung je eines Prismenpaares mit einem benachbarten Drehkörperpaare, dessen Axe seiner Schubrichtung parallel ist, zu einem Cylinderpaare unter Beseitigung des zwischenliegenden Gliedes.

Diese eigenthümlich complicirte Beschaffenheit der kinematischen Kette des Buss'schen Regulators ist übrigens auf die Eigenschaften desselben in dynamischer Hinsicht nur von untergeordnetem Einflusse. Analog wie beim Cosinus-Regulator ist die mittlere Gleichgewichtslage eines Pendels bedingt durch die Centrifugal- und Schwerkräfte seiner Massenelemente und durch den bei E angreifenden Theil des Hülsengewichtes, der nur wenig von der Hälfte dieses Gewichtes verschieden ist, weil durch die geringe Verdrehung der Schraube F gegen das Muttergewinde der Hülse eine nur kleine Verschiedenheit der Verticalbewegung dieser letzteren von derjenigen des Stiftes E bedingt wird. Auch ist nicht zu bestreiten und wird es durch bewährte Ausführungen bestätigt, dass die Dimensionen und Massen der beiden Pendel so gewählt werden können, dass dadurch nicht nur ein gewünschter Zusammenhang zwischen ihren Ausschlagwinkeln und der Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle erzielt, sondern auch den Ansprüchen der Energie und der praktischen Anordnung in sehr befriedigender Weise Genüge geleistet wird; allein es ist ein Nachtheil gegenüber dem Cosinus-Regulator, dass jene Wahl, insoweit wenigstens Mittheilungen darüber gemacht worden sind, nicht ebenso wie dort auf ein einfaches und durchsichtiges Princip zurückgeführt erscheint, in Ermangelung dessen solche Wahl lediglich auf weitläufigen Proberechnungen beruht, von einer Theorie aber kaum die Rede sein kann. Auch entbehrt der Regulator von



Buss des Vorzuges der Adjustirbarkeit für verschiedene Ungleichförmigkeitsgrade, die durch Verstellung des Stiftes E (analog derjenigen des Zapfens B bei Fig. 118) schon deshalb hier kaum zu erreichen wäre, weil das an demselben angreifende Hülsengewicht hier von allzu untergeordneter Bedeutung für das Gleichgewicht des Pendels ist. Als weiterer Nachtheil erscheint der geringere Hülsenschub, der bei gegebener Grösse der von der Hülse zu leistenden Widerstandsarbeit eine entsprechend grössere Intensität dieses Widerstandes W und somit einen grösseren Ungleichförmigkeitsgrad ε zur Folge hat, nicht zu gedenken der massigen Pendelträger, die im Gegensatze zu der vollkommenen Massenverwerthung beim Gruson'schen Regulator nichts zur Vergrösserung der Energie beitragen. Ueberhaupt dürfte der Cosinus-Regulator sowohl im Princip, wie auch in Bezug auf die Gedrungenheit seiner Form und die verhältnissmässige Leichtigkeit seiner Ausführung als die bis jetzt vollkommenste Gestaltung eines Centrifugalregulators zu bezeichnen sein.

§. 121. Centrifugalregulatoren mit Federkraft- statt Schwerkraftwirkung.

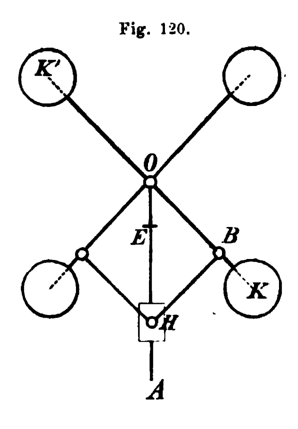
Indem die im Vorhergehenden besprochenen Centrifugalregulatoren eine verticale Regulatorwelle voraussetzen, sind sie im Allgemeinen nur bei stationären, d. h. bei solchen Maschinen anwendbar, deren Gestell von unveränderlicher Lage gegen die Erde ist. In anderen Fällen, z. B. bei Schiffsdampfmaschinen, müssen die Schwerkräfte der beweglichen Glieder möglichst vollständig aufgehoben werden, da ihre Wirkung mit den Lagen des Maschinengestelles, z. B. mit den Schwankungen des Schiffes, sich ändern würde. Die gewünschte Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Configuration des Regulators ist dann herbeizuführen durch das Gleichgewicht zwischen den von ersterer abhängigen Centrifugalkräften mit einer davon unabhängigen anderweitigen Kraft, als welche sich hier am einfachsten der Druck einer Feder darbietet, z. B. einer Spiralfeder, welche, die Regulatorwelle umgebend, zwischen einem vorspringenden Ringe auf derselben und der Hülse eingefügt ist.

Der solchem Zwecke dienende Centrifugalregulator von Silver z. B. geht aus dem Watt'schen Regulator mit rhombischer Anordnung und centraler Aufhängung (entsprechend $a = b$ und $c = e = 0$ in Fig. 112) dadurch hervor, dass nach Fig. 120 die Kugelstangen über ihre gemeinsame Aufhängungsaxe O hinaus um je ein gleich langes Stück $OK' = OK$ verlängert, an den Enden mit Kugeln K' von gleicher Masse mit den Kugeln K



versehen und gleichzeitig die Hülsenstangen BH, sowie die Hülse selbst möglichst leicht ausgeführt werden. Um auch die Schwerkräfte dieser letzteren Theile unwirksam zu machen, wäre nur nöthig, die Kugeln K etwas leichter zu halten, als die Kugeln K', und zwar um den Betrag der Summe des auf den Punkt K reducirten Gewichtes einer Hülsenstange und halben Gewichtes der Hülse selbst. Diese Reduction ist zu bewirken durch Multiplication des Gewichtes $= B$ der Hülsenstange bezw. des halben Gewichtes $= \frac{1}{2} H$ der Hülse mit den Verhältnissen der gleichzeitigen Bewegungen der Schwerpunkte dieser Theile und des Punktes K im Sinne der Regulatoraxe A. Ist also $OB = BH = a$ und $OK = l$, so ist das Gewicht der Kugel K um

Fig. 120.

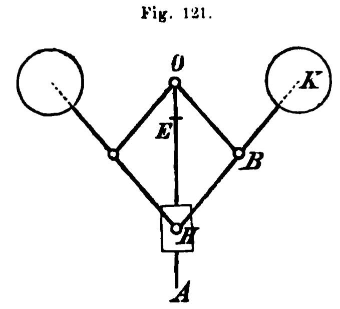


$$B \cdot \frac{3}{2} \frac{a}{l} + \frac{1}{2} H \cdot 2 \frac{a}{l} = \left(\frac{3}{2} B + H\right) \frac{a}{l}$$

kleiner zu machen, als das der Kugel K'. Bei E, Fig. 120, ist der Vorsprung auf der Regulatorwelle angedeutet, gegen welchen die Spiralfeder sich stützt, um andererseits auf die Hülse einen Druck auszuüben, der den Centrifugalkräften der Kugeln und der Stangen entgegenwirkt.

Wie derselbe Zweck durch einen Regulator mit nur zwei Kugeln und entsprechend kleinerer Constructionshöhe erreicht werden kann, zeigt Fig. 121. Wenn dabei $OB = BH = BK = a$ ist, bewegen sich bei den Configurationsänderungen des Regulators die Kugelmittelpunkte in einer durch O gehenden zur Axe A senkrechten Geraden, und liegt der Gesammtschwerpunkt beständig im Punkte O, falls von den Schwerkräften der Stangen und der Hülse zunächst wieder abgesehen wird. Um auch ihnen Rechnung zu tragen, kann man die einerseits bis zur Regulatoraxe A, andererseits bis zum Kugelmittelpunkte gerechnete Länge der Stange

Fig. 121.



$$HK = l = 2a + x$$

machen und dabei x so wählen, dass, wenn das Gewicht einer Kugel $= G$, einer Stange $OB = A$, einer Stange $HK = B$ und der Hülse $= H$ gesetzt wird, für irgend eine Configurationsänderung des Regulators die Summe

der Arbeiten der Schwerkräfte G, A, B und $\frac{1}{2}H =$ Null ist. Dieser Forderung entspricht die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2}A + B\right)a + \frac{1}{2}H \cdot 2a = Gx$$

und folgt daraus:

$$x = \frac{\frac{1}{2}A + B + H}{G}\,a.$$

Ist nun bei einem solchen Regulator mit vollständig ausgeglichenen Schwerkräften:

G das Gewicht einer Kugel (Fig. 121) oder die Summe der Gewichte beider an derselben Stange sitzenden Kugeln (Fig. 120),

Q der Druck, den die einerseits gegen den Vorsprung an der Regulatorwelle sich stützende Spiralfeder andererseits gegen die Hülse ausübt,

α der Winkel, unter dem die Stangen gegen die Axe der Regulatorwelle geneigt sind,

ω die Winkelgeschwindigkeit der letzteren, während a und l die im Vorhergehenden angegebenen Bedeutungen haben, so ist die Bedingungsgleichung des mittleren Gleichgewichtszustandes, welche ausdrückt, dass die Summe der Arbeiten der Centrifugalkräfte einer Kugel bezw. eines Kugelpaares und des halben Federdruckes auf die Hülse, die einer unendlich kleinen Configurationsänderung des Regulators entsprechen, = Null ist,

$$\frac{G}{g}\omega^2 l \sin\alpha\, d(l \sin\alpha) + \frac{1}{2} Q d(2a \cos\alpha) = 0$$

$$\frac{G}{g}\omega^2 l^2 \sin\alpha \cos\alpha - Qa \sin\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{h}\frac{a}{l}\frac{Q}{G} \quad \text{mit} \quad h = l\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sind ω_1 und ω_2 die Werthe von ω, bei denen eine Verschiebung der Hülse im Sinne gegen O hin oder im umgekehrten Sinne entgegen dem Widerstande W eintritt, so ist

$$\omega_1^2 = \frac{g}{h}\frac{a}{l}\frac{Q+W}{G}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{h}\frac{a}{l}\frac{Q-W}{G}.$$

Daraus folgt:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2\varepsilon\omega^2 = 2\frac{g}{h}\frac{a}{l}\frac{W}{G}$$

und somit die Energie:

$$E = \frac{W}{\varepsilon} = \omega^2 \frac{h}{g}\frac{l}{a} G = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist e die Entfernung von O, bis zu welcher die ungespannte Feder reicht, und Q_1 die Kraft, durch welche sie um die Längeneinheit zusammengedrückt wird, so ist:

$$Q = Q_1 (e - x) \quad \ldots \ldots (3)$$

mit $x = 2a \cos\alpha = OH$ (Fig. 120 und Fig. 121), und weil dann auch

$$h = l \cos\alpha = \frac{1}{2} \frac{l}{a} x$$

ist, so folgt aus (1) und (3):

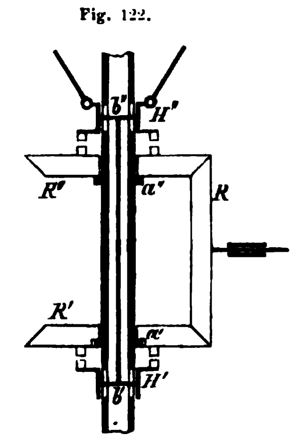
$$\omega^2 = 2g \frac{Q_1 a^2}{G l^2} \frac{e - x}{x} \quad \ldots \ldots (4).$$

Durch Aenderung von e, also durch Verstellung des Vorsprunges E (Fig. 120 und 121) auf der Regulatorwelle ist die Adjustirung für verschiedene Normalgeschwindigkeiten ω zu bewirken. Uebrigens lässt die Gleichung (4) einen in so hohem Grade statischen Charakter, nämlich eine so grosse Veränderlichkeit von ω mit x oder α erkennen, dass ein Regulator von solcher Art indirect wirkend angeordnet werden muss, um die Einschliessung von ω in enge Grenzen zu ermöglichen.

§. 122. Indirect wirkende Regulatoren.

Indirect wirkende Regulatoren, die nach §. 105, wie z. B. die im vorigen Paragraph besprochenen Centrifugalregulatoren mit Federkraft oder wie der gewöhnliche Watt'sche Regulator (Fig. 112) in höherem Grade statisch sein sollen, können auf mancherlei Art angeordnet werden. Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Fig. 122.

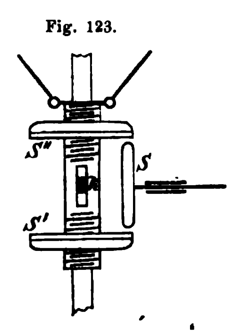


1. Bei einer solchen Anordnung, die namentlich zur Stellung der Schütze eines Wasserrades Anwendung gefunden hat, ist die Regulatorwelle in ihrem unteren Theile röhrenförmig gestaltet und die Hülse in zwei Theile H', H'' (Fig. 122) zerlegt, von denen der obere in üblicher Weise von den Hülsenstangen des Centrifugalregulators getragen wird. Jeder dieser beiden Hülsentheile ist prismatisch mit der röhrenförmigen Welle gepaart, indem H' durch den Keil b', H'' durch den Keil b'', von welchen Keilen jeder durch zwei diametral gegenüber liegende Längsschlitze der Röhrenwand hindurch geht, an relativer Drehung um die Regulator-

welle gehindert wird; zugleich dienen diese Keile dazu, vermittels der Stange $b'b''$ im Inneren der Welle die Hülsentheile H', H'' zu einem Ganzen zu vereinigen. Zwischen ihnen befinden sich zwei Kegelräder R', R'', die mit der Welle cylindrisch gepaart sind, jedoch von ringförmigen Vorsprüngen a', a'' der Welle getragen werden, so dass jene cylindrische Paarung thatsächlich einer solchen durch Drehkörperpaare gleich kommt; diese Räder R', R'' sind mit einem mittleren Kegelrade R in Eingriff, dessen Axe die Axe der Regulatorwelle rechtwinklig schneidet. An den einander zugekehrten Flächen sind H' und R', H'' und R'' mit Kuppelungszähnen versehen der Art, dass die Regulatorwelle bei mittlerer Höhenlage der Hülse weder mit R' noch mit R'' gekuppelt und somit R sowie das mit R verkettete Stellzeug, z. B. die Schütze des Wasserrades in Ruhe ist, dass aber, jenachdem die Hülse bei zunehmender Geschwindigkeit der Maschine etwas herauf oder bei abnehmender Geschwindigkeit etwas herunter geht, entweder R' oder R'' mit der Regulatorwelle gekuppelt und somit durch diese das Rad R sammt dem Stellzeuge im einen oder anderen Sinne bewegt wird. Das Getriebe, durch welches die Drehung des Rades R z. B. auf die Wasserradschütze übertragen wird, kann wieder auf sehr verschiedene Arten, z. B. so angeordnet werden, dass eine Schraube ohne Ende auf der Welle von R in ein entsprechendes Schraubenrad, ein Zahnrad auf der Welle des letzteren in eine Zahnstange an der Schütze eingreift.

2. Wenn, wie bei Dampfmaschinen, der Widerstand des Stellzeuges weniger gross ist, kann die Einrichtung durch Anwendung von Frictionsscheiben statt der Kegelräder vereinfacht werden. So wurde von Kayser bei einer Walzwerksmaschine die verlängerte Hülse eines Watt'schen Regulators, während sie vermittels zwei diametral gegenüber liegender Schlitze und eines entsprechenden durch die Regulatorwelle gesteckten Keils k (Fig. 123) an relativer Drehung gegen letztere gehindert ist, unten und oben mit Frictionsscheiben S', S'' ausgerüstet, die an ihren einander zugekehrten Flächen mit aufgeschraubten Holzscheiben und auf diesen mit aufgeleimten Lederscheiben versehen sind. Die mit kleinem Spielraume dazwischen liegende gusseiserne Frictionsscheibe S überträgt die bei zu grosser oder zu kleiner Geschwindigkeit der Maschine von S' oder S'' im einen oder anderen Sinne empfangene Drehung durch ihre Welle und eine darauf sitzende Schraube ohne Ende auf ein Schraubenradsegment zu entsprechender Aenderung des Expansionsgrades der Dampfmaschine. In die

Fig. 123.



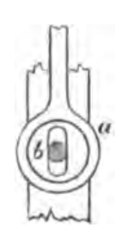
Hülse sind feine Schraubengewinde eingeschnitten, zu denen die Scheiben S', S'' die entsprechenden Muttergewinde enthalten, und kann so durch Verstellung der letzteren der Spielraum zwischen ihnen und der Scheibe S, somit der Ungleichförmigkeitsgrad beliebig geändert, auch der Regulator durch Verstellung beider Scheiben S', S'' in gleichem Sinne für eine andere Normalgeschwindigkeit eingerichtet werden.

3. Bei Regulatoren, die zur Schützenstellung hydraulischer Motoren dienen, kann die indirecte Wirkung zweckmässig auch dadurch vermittelt werden, dass durch den Regulator eine Riemengabel verschoben wird, um einen von der Maschine aus bewegten Riemen, der bei normaler Geschwindigkeit und mittlerer Configuration des Regulators auf einer Leer-Rolle liegt, auf die eine oder andere von zwei festen Rollen zu schieben, durch welche dann vermittels entsprechender Mechanismen die Schütze im einen oder anderen Sinne bewegt wird.

4. Anstatt die indirecte Wirkung eines Regulators durch entsprechende Kuppelung des Stellzeuges mit der Regulatorwelle zu vermitteln, hat man auch wohl einen besonderen Hülfsmotor benutzt, der durch entgegengesetzte Bewegungen der Regulatorhülse selbst im entgegengesetzten Sinne, d. h. so gesteuert wird, dass er entgegengesetzte Bewegungen des Stellzeuges zur Folge hat. So ist z. B. der im §. 121 besprochene Silver'sche Regulator bei Schiffsdampfmaschinen so angeordnet worden, dass er einen kleinen Dampfcylinder steuerte, dessen Kolben mit dem Stellzeug verbunden war.

5. Indem es der Fall sein kann, dass das Stellzeug in die eine oder andere Grenzlage (z. B. der ganz geöffneten oder ganz geschlossenen Drosselklappe einer Dampfmaschine entsprechend) gelangt, während es noch mit der Regulatorwelle oder dem Hülfsmotor gekuppelt ist und somit zu weiterer Bewegung in demselben Sinne angetrieben wird, ohne diesem Antriebe folgen zu können, so muss die daraus hervorgehende Gefahr eines Bruches durch geeignete Vorkehrung beseitigt werden. Sehr einfach und ohne Weiteres geschieht das durch die Frictionskuppelungen bei den unter 2) und 3) besprochenen Anordnungen oder auch durch Anwendung eines Schaltwerkes, wie bei dem Regulator von Bersch.* Bei demselben ist an der Regulatorhülse vermittels einer durch eingeschaltete Mutter ihrer Länge nach regulirbaren Stange ein länglicher Rahmen aufgehängt, indem das nach unten gabelförmig auslaufende Ende jener Stange mit zwei Augen a (Fig. 124) starke Zapfen b umfasst.

Fig. 124.



* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1858, S. 182.

die von dem Rahmen seitwärts vortreten. Mit diesen Zapfen ist der Rahmen um eine horizontale Spindel (in Fig. 124 mit schraffirtem Querschnitt angedeutet) lose drehbar so, dass er sich zugleich etwas heben und senken kann, zu welchem Zwecke die Zapfen b geschlitzt sind. Fest auf der Spindel sitzt centrisch eine kreisförmige Scheibe, die an zwei gegenüber liegenden Bögen mit Sperrzähnen versehen und dadurch zu einem Schaltrade gemacht ist; ihm entsprechen zwei zugehörige Klinken, die oben und unten so am Rahmen um Bolzen drehbar und durch Stellschrauben regulirbar sind, dass zwischen ihnen und dem Klinkrade bei mittlerer Höhenlage des Rahmens ein sehr kleiner Zwischenraum bleibt. Indem nun der Rahmen durch eine Zugstange von der zu regulirenden Maschine oder auch von einem Hülfsmotor in beständig pendelnder Bewegung um die Spindel erhalten wird, bewirkt das Hinauf- oder Hinabgehen des Rahmens den Eingriff der unteren oder oberen Klinke, mithin die Drehung der Spindel im einen oder anderen Sinne, bis die Klinke den ungezahnten Theil des Klinkrades erreicht. Durch Verlängerung oder Verkürzung der Aufhängestange des Rahmens lässt sich der Regulator für eine andere Normalgeschwindigkeit einrichten.

6. Bei allen vorher angeführten, sowie überhaupt bei den seither üblich gewesenen Anordnungen eines indirect wirkenden Regulators ist die Configuration des letzteren nur zwischen sehr engen Grenzen variabel und das Stellzeug nur bei der mittleren dieser wenig verschiedenen Configurationen, also nur bei einer bestimmten Normalgeschwindigkeit ω_0 der Maschine in Ruhe. Weicht die Geschwindigkeit ω von dieser normalen Grösse ab, so ist der Sinn, in welchem das Stellzeug bewegt wird, bestimmt durch den Sinn, in welchem ω von ω_0 abweicht, unabhängig davon, ob ω augenblicklich zu- oder abnimmt, während bei directer Wirkung der Sinn der Bewegung des Stellzeuges gerade umgekehrt durch die Bewegungsrichtung der Hülse unabhängig davon bestimmt wird, ob diese augenblicklich auf der einen oder anderen Seite ihrer Mittellage sich befindet. Während im letzteren Falle angemessener Weise die Schnelligkeit und die Grösse der Bewegung des Stellzeuges der Schnelligkeit und Grösse der Hülsenbewegung, im Wesentlichen also auch der Geschwindigkeitsänderung der Maschine entspricht, ist bei der üblichen Art von indirecter Wirkung die Schnelligkeit der Bewegung des Stellzeuges unveränderlich (abgesehen von den immerhin kleinen Geschwindigkeitsänderungen der Maschine selbst) gegeben durch das Umsetzungsverhältniss, nach welchem die Bewegungsübertragung von der Regulatorwelle auf das Stellzeug nach Einrückung der betreffenden Kuppelung stattfindet, wogegen die Grösse der Lagenänderung des Stell-

zeuges nur von der Zeit abhängt, während welcher die Einrückung dauert, während welcher also die Geschwindigkeit der Maschine von der Normalgeschwindigkeit abweicht, einerlei, ob diese Abweichung gross oder klein, mit grösserer oder kleinerer Geschwindigkeit in der Zu- oder Abnahme begriffen ist. Schon ohne nähere Untersuchung ist die Unvollkommenheit dieser Art von indirecter Wirkung begreiflich, bei welcher es insbesondere der Fall sein kann, dass die regulirende Bewegung des Stellzeuges bei schneller und beträchtlicher Geschwindigkeitsänderung der Maschine zu langsam oder bei langsamer Geschwindigkeitsänderung zu rasch und zu viel stattfindet. Auf Grund solcher Erwägungen sind deshalb in neuester Zeit* von Hartmann (deutsches Reichspatent vom 4. Juli 1878) und von Knüttel (Patent vom 21. Juli 1879) solche Einrichtungen von indirect wirkenden Regulatoren erfunden worden, welche zur Folge haben, dass die Bewegung der Hülse ebenso wie bei directer Wirkung zwischen weiteren Grenzen stattfindet und dass ihr die Bewegung des Stellzeuges fast ebenso vollkommen wie bei directer Wirkung entsprechend ist, so dass solche Regulatoren eine ähnlich regulirende Wirkung haben, als ob sie mit unbegrenzter Energie direct wirkend wären.

Dieser Zweck wird dadurch erreicht, dass die Kuppelungshülse eines Wendegetriebes, die bei der üblichen Anordnung (z. B. nach Fig. 122 oder Fig. 123) ein unmittelbarer Fortsatz der Regulatorhülse ist und deshalb letztere zu einer der ihrigen gleichen sehr eng begrenzten Bewegung nöthigt, als ein besonderes Glied ausgebildet und dessen kleine Verschiebung im einen oder anderen Sinne zugleich von der Bewegung der Regulatorhülse und von derjenigen des Stellzeuges so abhängig gemacht ist, dass die Einrückung behufs Herstellung der Kuppelung bei jeder Lage der Regulatorhülse und entsprechender Lage des Stellzeuges stattfinden kann. Ist jene Kuppelungshülse dadurch, dass eine Bewegung der Regulatorhülse in gewissem Sinne eintrat, in entsprechendem Sinne sehr wenig verschoben und so die Kuppelung hergestellt worden, so bewirkt die entsprechend erfolgende Bewegung des Stellzeuges eine umgekehrte Verschiebung der Kuppelungshülse, also die Auslösung der Kuppelung mit Stillstand des Stellzeuges; wenn aber die Geschwindigkeitsänderung der Maschine in unverändertem Sinne noch andauert, so wird durch die weitere Bewegung der Regulatorhülse die Kuppelung im vorigen Sinne sofort wieder hergestellt, um alsbald wieder gelöst zu werden, wenn dadurch die Regulator-

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1880, S. 341, und Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1880, S. 97.



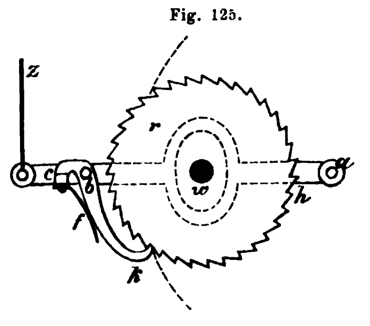
hülse in Ruhe, das Stellzeug in Bewegung gekommen ist u. s. f. Diese sich entsprechenden kleinen alternirenden Bewegungen der Regulatorhülse und des Stellzeuges, verbunden mit schnell auf einander folgenden Ein- und Ausrückungen der Kuppelungshülse, gehen indessen um so mehr in stetige Bewegungen über, je schneller einerseits die Geschwindigkeitsänderung der Maschine und demgemäss die Configurationsänderung des Regulators und je schneller andererseits die Bewegung des Stellzeuges in Folge des gewählten Umsetzungsverhältnisses von der Regulatorwelle aus bei hergestellter Kuppelung stattfindet, besonders wenn letztere nicht als Klauenkuppelung (Fig. 122), sondern als Frictionskuppelung (Fig. 123) ausgeführt ist.

Es lässt sich erwarten, dass bei gegebener plötzlicher Aenderung des von einer Kraftmaschine zu überwindenden Widerstandes dieselbe vermittels eines indirect wirkenden Regulators von der hier besprochenen Art mit wesentlich geringeren Geschwindigkeitsschwankungen in einen neuen Beharrungszustand übergeführt wird, als bei der gewöhnlichen Anordnung; weil aber dann dieser neue Beharrungszustand bei anderer Configuration des Regulators eintritt, ist es nöthig, dass letztere ebenso wie bei directer Wirkung in nur mässigem Grade mit der Geschwindigkeit variabel, d. h. dass der Regulator in nur mässigem Grade statisch sei, wenn die Geschwindigkeit des neuen Beharrungszustandes von derjenigen des früheren nicht zu sehr verschieden sein soll.

§. 123. Intermittirend wirkende Regulatoren.*

1. Als Beispiel eines direct intermittirend wirkenden Regulators zeigt Fig. 125 den wesentlichen Bestandtheil einer patentirten Construction von Hagen. Auf der Welle *w*, um deren Drehung im einen oder anderen Sinne es sich handelt behufs Verminderung oder Vermehrung des Zuflusses der motorischen Substanz, jenachdem die Maschinengeschwindigkeit sich zu- oder abnehmend von der Normalgeschwindigkeit entfernt, sind neben einander zwei Klinkräder *r*, *r'* mit entgegengesetzt gerichteten Sperrzähnen aufgekeilt, von denen hier nur eines *r* gezeichnet ist. Die zugehörigen

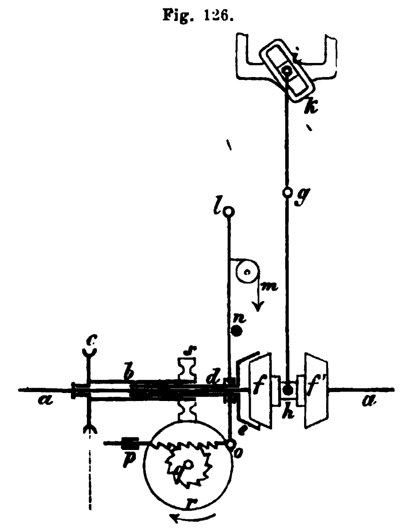
Fig. 125.



* Dingler's polytechnisches Journal, 1875, Bd. 217, S. 1.

Klinken *k* und *k'* (von denen in Fig. 125 auch nur *k* gezeichnet ist) sitzen drehbar um dieselbe Axe *b* an einem Hebel *h*, der einerseits um die feste Axe *a* drehbar, andererseits durch die Zugstange *z* mit der Regulatorhülse verbunden und so gestaltet ist, dass seine dem Hülsenhube entsprechende Schwingung um *a* durch die Welle *w* nicht gehindert wird. Von den Klinken *k*, *k'* ist die eine abwärts, die andere aufwärts gerichtet; beide werden durch Federn *f*, *f'* (*k* durch *f*, *k'* durch *f'*) gegen die Klinkräder *r*, *r'* angedrückt insoweit es die Anschläge *c*, *c'* gestatten. In der Mittellage des Hebels *h*, der Mittellage der Regulatorhülse entsprechend, greifen beide Klinken zwar noch zwischen die Zähne von *r*, *r'* ein, jedoch so, dass sie zugleich gegen die Anschläge sich stützen, und dass somit eine weitere Annäherung ihrer Angriffskanten an die Axe *a* unmöglich ist. Die Folge dieser Anordnung ist, dass, wenn die Hülse von ihrer Mittellage aus in die Höhe geht, das Rad *r* sammt der Welle *w* mit Rechtsdrehung von der Klinke *k* unter Anspannung der Feder *f* mitgenommen wird, während die Angriffskante der Klinke *k'* sich vom Rade *r'* entfernt. Beim Rückgange der Hülse in die Mittellage ist keine Klinke wirksam, da *k'* ausgelöst bleibt, während *k* über die Zähne von *r* weggleitet. Geht aber die Hülse noch weiter hinab, so wird *r'* sammt *w* mit Linksdrehung von *k'* herumgenommen unter Anspannung der Feder *f'*, während *k* ausgelöst wird und auch beim Rückgange in die Mittellage ausgelöst bleibt, indem dann *k'* auf den Zähnen von *r'* gleitet.

Fig. 126.



2. **Indirect intermittirend wirkende Regulatoren** sind, so viel bekannt, bisher nur von Bodemer construirt und mit Erfolg verwendet worden. Ein solcher, zu Regulirung des Füllungsgrades von Dampfmaschinen bestimmt, hat folgende Einrichtung: Fig. 126. Eine Welle *a*, die bei normaler Maschinengeschwindigkeit in Ruhe ist, wird bei wachsender oder abnehmender Geschwindigkeit behufs Verkleinerung oder Vergrösserung des Füllungsgrades im einen oder anderen Sinne dadurch in Umdrehung versetzt, dass sie durch die Wirkung des Regulators mit der einen oder anderen von zwei Hülsen *b*, *b'* fest verbunden wird, die an und

für sich frei drehbar um die Welle *a* sind und durch auf ihnen festgekeilte Schnurrollen *c*, *c'* von einer in Fig. 126 nicht gezeichneten Maschinenwelle aus beständig in entgegengesetztem Sinne in Rotation erhalten werden, indem die eine Schnur offen, die andere gekreuzt ist. Von diesen zwei Hülsen ist in Fig. 126 nur die eine *b* mit zugehörigem sogleich zu besprechendem Mechanismus schematisch gezeichnet, während die andere mit ihrem ganz gleichen Mechanismus auf der anderen Seite der (bei mittlerer Lage) in Bezug auf die Gerade *ih* symmetrischen Figur liegend vorzustellen ist. Die feste Verbindung der Welle *a* mit der Hülse *b* oder *b'* wird aber dadurch bewirkt, dass *b* mit der langen Nabe *d* eines Hohlkegels *e* und ebenso auf der anderen Seite *b'* mit der Nabe *d'* eines Hohlkegels *e'* prismatisch gepaart (durch Laufkeil relativ gleitbar längs der Welle *a* verbunden) ist, wodurch die mit *a* cylindrisch gepaarten Hohlkegel *e*, *e'* zu gleichen Rotationen bezw. mit *b*, *b'*, unter sich also zu entgegengesetzten Rotationen gezwungen sind, und dass ferner durch Verschiebung des mit der Welle *a* prismatisch gepaarten Doppelkegels *ff'* nach links oder nach rechts derselbe in den entsprechenden Hohlkegel *e* oder *e'* hinein gepresst und somit durch Frictionskuppelung auch *a* zu einerlei Drehung mit *e* und *b* oder mit *e'* und *b'* genöthigt wird; seine Verschiebung erhält der Doppelkegel durch den um den Zapfen *g* drehbaren Hebel *hi*, der unten bei *h* die Halsnuth der die Kegel *f*, *f'* verbindenden Hülse umgreift und oben bei *i* in der an der Regulatorhülse hängenden schräg gerichteten Coulisse *k* geführt wird. Jenachdem bei wachsender oder abnehmender Maschinengeschwindigkeit diese Coulisse sich aufwärts oder abwärts bewegt, geht das obere Hebelende *i* nach rechts oder nach links, das untere *h* nach links oder nach rechts und wird folglich *f* in *e* oder *f'* in *e'* hinein gepresst. Wären die Hohlkegel *e*, *e'* fest mit den Hülsen *b*, *b'* verbunden, so dass der Doppelkegel *ff'* nur ein ganz kleines Spiel zwischen *e* und *e'* hätte, so wäre der Regulator indirect continuirlich wirkend; intermittirend wird er durch die prismatische Paarung von *e* mit *b* durch die Nabe *d*, ebenso von *e'* mit *b'* durch die entsprechende Nabe *d'*. Damit unter diesen Umständen der nöthige axiale Druck zwischen *f* und *e* stattfinde, wird die Halsnuth der Nabenhülse *d* von einem um *l* drehbaren Hebel umfasst, der durch eine über eine Leitrolle geführte und mit einem Gewichte belastete Schnur *m* beständig gegen einen Anschlag *n* hin gezogen und dadurch so lange gehemmt wird, bis der nach links gehende Doppelkegel *ff'* den Hohlkegel *e* mit seiner Nabe *d* in die Hülse *b* hinein drückt und dabei jenen Hebel vom Anschlage *n* entfernt. Die intermittirende Wirkung erfordert aber ferner, dass die Rückkehr der Regulatorhülse und somit des Doppel-

kegels ff' in die Mittellage ohne fortgesetzte Drehung der Welle a erfolgen könne, dass also die Frictionskuppelung von f mit e (bezw. von f' mit e' hierbei ausgelöst sei; zu dem Ende ist der um l drehbare Druckhebel über die Halsnuth der Nabe d hinaus verlängert bis zu dem Zapfen o, durch welchen er mit einer bei p prismatisch geführten etwas federnden Sperrstange verbunden ist, deren in ein entsprechendes Sperrrädchen q eingreifende Zähne so gerichtet sind, dass, wenn das Rädchen ruht, die Stange zwar im Sinne op, nicht aber im umgekehrten Sinne beweglich ist. Damit aber endlich der Regulator nach seiner Rückkehr in die Mittellage zu neuer Wirksamkeit in beiderlei Sinn geeignet werde, was voraussetzt, dass der Hohlkegel e, der vorher mit dem Doppelkegel ff' gekuppelt war, hinter diesem her bis zur Stützung des Druckhebels gegen den Anschlag n zurückgehe, ist mit dem Sperrrädchen q ein Schneckenrad r coaxial fest verbunden, das im Sinne des beigesetzten Pfeils durch die auf der Hülse b sitzende Schnecke s in beständiger langsamer Drehung erhalten wird. Sollte die Maschinengeschwindigkeit, nachdem sie ein Maximum erreicht hatte, nicht sofort bis zur Normalgeschwindigkeit wieder abnehmen, sondern ein neuer Beharrungszustand mit noch übernormaler Geschwindigkeit eintreten, so würde der noch vor der Mittellage zur Ruhe kommende Doppelkegel alsbald von dem nachfolgenden rotirenden Hohlkegel e eingeholt und auf's Neue mit ihm gekuppelt werden; die Folge wäre eine abermalige Drehung der Welle a im vorigen Sinne, somit weitere Abnahme der Maschinengeschwindigkeit mit wiederholtem Rückgange von e und ff' gegen die Mittellage hin bis der Druckhebel vom Anschlage n aufgehalten wird und damit der Doppelkegel ausser Berührung mit e in der Mittellage dauernd zur Ruhe kommen kann, entsprechend einem dauernden Beharrungszustande der Maschine bei normaler Geschwindigkeit. Dass sich in Folge der in Fig. 126 nicht gezeichneten, auf der anderen Seite von ff' befindlichen Mechanismen, die den gezeichneten symmetrisch gleich sind, Alles gerade umgekehrt verhält, wenn die Geschwindigkeit der Maschine unter ihren Normalwerth sinkt und zu demselben zurückkehrt, bedarf keiner weiteren Ausführung. Auch mag wegen der Schwingungen der Regulatorhülse, die durch den Hebel ih auf den Doppelkegel ff' übertragen werden, in Wirklichkeit der Vorgang weniger einfach sich gestalten, vielmehr erst nach mehrmaliger Ein- und Auslösung der Frictionskuppelung zwischen e und f bezw. e' und f', oder auch abwechselungsweise der einen und anderen, ein neuer Beharrungszustand bei normaler Geschwindigkeit eintreten.

3. Wenn der so eben besprochene Regulator in solchen Fällen angewendet werden sollte, in denen, wie bei hydraulischen Kraftmaschinen,



die Bewegung des Stellzeuges und somit die Drehung der Welle a, Fig. 126, mit einem beträchtlichen Widerstande verbunden ist, so würde die Herstellung der Frictionskuppelung einen allzu grossen Druck erfordern, als dass er durch die Regulatorhülse bei genügend kleiner Geschwindigkeitsänderung, also mit hinlänglich kleinem Unempfindlichkeitsgrade ausgeübt werden könnte. Für solche Fälle hat deshalb Bodemer einen anderen indirect intermittirend wirkenden Regulator construirt, der ebenso wie der vorige durch die Weltausstellung zu Philadelphia vom Jahre 1876 bekannt wurde. Bei dieser sehr sinnreichen, aber freilich noch wesentlich complicirteren Construction hat die Regulatorhülse nur die Aufgabe der Aus- und Einlösung einer Hemmung, um dadurch die Frictionskuppelung des Stellzeuges mit der Maschine von letzterer aus zu veranlassen oder zu unterbrechen. Anstatt des Schalt- und Schneckenradmechanismus $opqrs$ in Fig. 126 wird dabei durch einen sogenannten Correcturapparat von wesentlich anderer Einrichtung bewirkt, dass beim Rückgange der Geschwindigkeit von einem Maximum oder Minimum nicht bei über- oder unternormaler Geschwindigkeit dauernd ein neuer Beharrungszustand eintreten kann, dass vielmehr ein solcher ebenso wie bei indirect continuirlich wirkenden Regulatoren von gewöhnlicher Anordnung, jedoch ohne die denselben eigenthümlichen erheblichen Schwankungen, nur bei normaler Geschwindigkeit dauernd möglich ist mit selbstthätig wieder herbeigeführter solcher Lage aller Theile des ganzen Mechanismus, dass er bei geringster Störung dieser normalen Geschwindigkeit auf's Neue sofort in Function tritt.

5. Verhalten des Regulators und Einfluss desselben auf den Gang der Maschine bei einer Störung ihres Beharrungszustandes.

§. 124. Vorbemerkungen.

Wenn der Beharrungszustand einer Kraftmaschine durch plötzliche Aenderung des Widerstandes, z. B. durch das Ein- oder Ausrücken von Arbeitsmaschinen oder durch Aenderung der von einzelnen derselben erforderten Leistungen gestört wird, so besteht die Aufgabe des Regulators darin, durch entsprechende Aenderung der Triebkraft zu bewirken, dass nicht nur ein neuer Beharrungszustand bei einer von der früheren möglichst wenig abweichenden Geschwindigkeit eintrete, sondern dass auch der Uebergang des einen in den anderen möglichst stetig in unveränderlichem Sinne, nämlich ohne solche Schwankungen der Geschwindigkeit stattfinde, bei denen dieselbe sich vorübergehend noch wesentlich mehr von

der früheren unterscheidet, als im neuen Beharrungszustande, dessen thatsächlicher Eintritt anderen Falles durch dergleichen Schwankungen sehr weit hinausgerückt oder ganz unmöglich gemacht werden könnte. Unter der Maschinengeschwindigkeit werde dabei wie bisher die Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle, d. h. der rotirenden Welle verstanden, die den Zusammenhang der zu regulirenden Maschine mit dem Regulator vermittelt. Diese Winkelgeschwindigkeit sei für den ursprünglichen Beharrungszustand hier mit ω_0, für irgend einen Augenblick nach erfolgter Störung mit ω bezeichnet. Dabei wird von periodischen Aenderungen, welche, dem Wirkungsgesetze der Kräfte und dem kinematischen Bau der Maschine entsprechend, durch ihr Schwungrad und überhaupt durch ihre bewegte Masse in engere Grenzen eingeschlossen werden, abgesehen, unter ω_0 folglich die mittlere Winkelgeschwindigkeit für jede Periode des ursprünglichen Beharrungszustandes, unter ω diejenige Winkelgeschwindigkeit verstanden, welche sich von der augenblicklich stattfindenden um denselben, der periodischen Veränderlichkeit des Ganges entsprechenden Betrag unterscheidet, wie ω_0 von der Geschwindigkeit, die bei der Fortdauer des ursprünglichen Beharrungszustandes bei derselben Configuration der Maschine stattgefunden hätte.

Dasjenige Glied des Regulators, welches seinen Zusammenhang mit dem Stellzeug vermittelt, heisse hier allgemein (auch bei anderen, als Centrifugalregulatoren) die Hülse. Sie bestimmt durch ihre Entfernung x von der dem ursprünglichen Beharrungszustande entsprechenden Lage die augenblickliche Configuration des Regulators. Dabei soll x positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem die dadurch bestimmte Hülsenlage bei mittlerem Gleichgewichtszustande des Regulators einer vergrösserten oder verkleinerten Maschinengeschwindigkeit, somit einer zu bewirkenden Verkleinerung oder Vergrösserung der Triebkraft entspricht.

Das Stellzeug ist im Allgemeinen ein Getriebe, von dessen Gliedern eines beständig oder zeitweilig mit der Regulatorhülse gepaart ist, während ein anderes den Zufluss der motorischen Substanz unmittelbar durch seine Lage bedingt; diese Lage sei bestimmt durch die Entfernung $= \xi$ von derjenigen, die dem ursprünglichen Beharrungszustande entsprach, indem ξ positiv oder negativ gesetzt wird unter denselben Umständen wie x. Bei direct continuirlich wirkenden Regulatoren, bei denen beständig zwangläufige Verkettung des Stellzeuges mit dem Regulator stattfindet, ist ξ eine Function nur von x.

Reducirt auf einen Punkt im Abstande $= 1$ von der Axe der Regulatorwelle und abgesehen wieder von den periodischen Aenderungen, die

selbst im Beharrungszustande einer Maschine stattzufinden pflegen, sei P die Triebkraft, Q der gesammte Widerstand und M die Masse der Maschine, d. h. es seien $Pd\varphi$ und $Qd\varphi$ die dem (in Bogenmaass ausgedrückten) elementaren Drehungswinkel $d\varphi$ der Regulatorwelle entsprechenden mittleren elementaren Arbeiten der Triebkraft und des Widerstandes, sowie $\frac{M\omega^2}{2}$ die augenblickliche lebendige Kraft der Maschine. Die elementare Aenderung der letzteren ist $=$ der algebraischen Summe jener elementaren Arbeiten:

$$d\left(\frac{M\omega^2}{2}\right) = (P - Q)\,d\varphi,$$

welche Gleichung, da M constant und $d\varphi = \omega dt$ ist, auch geschrieben werden kann:

$$M\omega d\omega = (P - Q)\,\omega dt; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{P - Q}{M}$$

$=$ der Beschleunigung der Maschine, gemessen als Winkelbeschleunigung der Regulatorwelle. Da hierbei von periodischen, der betreffenden Maschine eigenthümlichen Beschleunigungen abgesehen wird, die nicht sowohl durch den hier in Rede stehenden Regulator, als vielmehr durch ein Schwungrad oder überhaupt durch eine hinlänglich grosse bewegte Masse auszugleichen sind, so ist der Beharrungszustand, charakterisirt durch gleiche Mittelwerthe der Geschwindigkeit in den auf einander folgenden Perioden, auch bestimmt durch $\omega = Const.$, also $P = Q$.

Die Kräfte P und Q sind zum Theil von ω abhängig, und zwar im Allgemeinen so, dass, wenn ω wächst, P abnimmt und Q zunimmt, um so mehr also $P - Q$ abnimmt. Dieses Verhalten giebt sich dadurch zu erkennen, dass, wenn die Differenz $P - Q$, die im Beharrungszustande $=$ Null war, durch Abnahme von Q plötzlich positiv wird, ohne Wirkung eines Regulators die Geschwindigkeit der Maschine nicht ohne Ende zunimmt, sondern sich ihr Bewegungszustand allmählig einem neuen Beharrungszustande mit einer nur um Endliches vergrösserten Geschwindigkeit nähert, wie z. B. ein Eisenbahnzug, wenn während der Fahrt die Wagenkuppelung an irgend einer Stelle bräche, unter übrigens gleich bleibenden Umständen in einen neuen Beharrungszustand mit vergrösserter Fahrgeschwindigkeit übergehen würde. Da es sich aber hier nur um solche Geschwindigkeitsänderungen handelt, die eben durch die Wirkung des Regulators auf mässige Grössen beschränkt werden sollen, so mag auch von der Abhängigkeit der reducirten Triebkraft P und des reducirten Widerstandes Q von der Geschwindigkeit ω im Allgemeinen abgesehen,

somit P als blosse Function von ξ, Q als Constante betrachtet werden, so lange nicht aus irgend einem Anlasse ein plötzlicher Uebergang von Q zu einem anderen, demnächst wieder einstweilen constant bleibenden Werthe stattfindet. Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, ist die Untersuchung des Gesetzes, nach welchem von dem Augenblicke an, in dem nach bis dahin stattgefundenem Beharrungszustande eine solche plötzliche Aenderung von Q eintritt, die Maschinengeschwindigkeit ω sich ändert in Folge der durch den Regulator bewirkten Aenderung von ξ. Da bei entgegengesetzter Aenderung von Q auch der Erfolg offenbar entgegengesetzt ist, genügt es zur Charakterisirung der Regulatorwirkung, die plötzliche Aenderung von Q hier ein für alle Mal als in demselben Sinne stattfindend, etwa als plötzliche Abnahme vorauszusetzen, so dass ω, x und ξ wenigstens anfangs zunehmen, insbesondere x und ξ von Null an wachsend zunächst positiv werden.

Die Unterschiede des fraglichen Wirkungsgesetzes in verschiedenen Fällen werden weniger durch die Beschaffenheit des hier stets als mehr oder weniger statisch vorausgesetzten Regulators an sich, als durch seine Anordnung (Art seiner Verbindung mit dem Stellzeuge) bedingt, hinsichtlich welcher direct und indirect wirkende Regulatoren, sowie ferner die einen und anderen als continuirlich und intermittirend wirkende zu unterscheiden sind. Direct und indirect wirkende Regulatoren unterscheiden sich vor Allem dadurch, dass bei letzteren, wenigstens bei gewöhnlicher Anordnung (§. 122), wie sie im Folgenden vorausgesetzt wird, ein dauernder Beharrungszustand nur bei normaler Geschwindigkeit und bei mittlerer Lage des Regulators stattfinden kann, so dass also dann ω_0 die Normalgeschwindigkeit bedeutet und $x = 0$ der Mittellage der Hülse entspricht, wogegen bei direct wirkenden, wenigstens bei direct continuirlich wirkenden Regulatoren die anfängliche Beharrungsgeschwindigkeit ω_0 von der normalen verschieden sein kann und ebenso dann auch die Anfangslage ($x = 0$) der Hülse nicht ihre Mittellage zu sein braucht; ob Letzteres auch für direct intermittirend wirkende Regulatoren gilt, bleibt näherer Untersuchung (§. 126) vorbehalten.

Inwiefern nun die bezeichnete Aufgabe in diesen verschiedenen Fällen zu lösen ist, ergiebt sich im Princip, nämlich abgesehen von analytischen Schwierigkeiten, die sich der strengen Durchführung entgegenstellen können, durch folgende Erwägung.

Mit Rücksicht auf die kinematische Beschaffenheit des Regulators, die Massen seiner relativ gegen die Regulatorwelle beweglichen Glieder

und die darauf wirkenden Kräfte kann die Beschleunigung der Hülse als Function von x und ω gefunden werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x, \omega) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (1).$$

Dabei ist streng genommen diese Function $\varphi(x, \omega)$ etwas verschieden je nach dem Bewegungssinne der Hülse wegen des Bewegungswiderstandes der letzteren, der ihrem Bewegungssinne stets entgegengesetzt gerichtet ist. Je nach der Art des Motors und der Art, wie der Zufluss seiner motorischen Substanz vom Stellzeuge bedingt wird (z. B. bei Dampfmaschinen, jenachdem der Regulator auf die Drosselklappe oder auf die Expansionsvorrichtung wirkt) ist ferner P als Function von ξ zu ermitteln und somit dann auch die Winkelbeschleunigung der Regulatorwelle:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{P - Q}{M} = f(\xi) \dots \dots \dots \dots \dots \dots (2),$$

unter Q hier den plötzlich geänderten Werth des reducirten Widerstandes verstanden. Die hiernach noch erforderliche dritte Gleichung, um mit Rücksicht auf die Anfangswerthe:

$$x = 0, \quad \xi = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \omega = \omega_0$$

die Grössen x, ξ und ω als Functionen von t bestimmen zu können, ist verschieden je nach der Anordnung des Regulators.

Bei direct continuirlich wirkenden Regulatoren ist ξ eine Function von x, somit nach Gl. (2) auch

$$\frac{d\omega}{dt} = F(x),$$

wodurch in Verbindung mit Gl. (1) und mit Rücksicht auf die Anfangswerthe

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \omega = \omega_0$$

x und ω als Functionen von t bestimmt sind.

Bei direct intermittirend wirkenden Regulatoren findet der Unterschied statt, dass ξ entweder eine Function von x oder constant ist, jenachdem die Entfernung der Hülse von ihrer Mittellage zu- oder abnimmt; auch ist ersteren Falles die Beziehung zwischen ξ und x insofern von anderer Art, als hier ξ nicht durch x an und für sich bestimmt ist, sondern durch den Werth, den ξ im Augenblicke kleinster Entfernung der Hülse von ihrer Mittellage hatte und durch die Aenderung, welche x seitdem erfahren hat.

Bei indirect continuirlich wirkenden Regulatoren ist ξ eine Function der Zeit:

$$\xi = \psi(t)$$

und somit nach Gl. (2):

$$\frac{d\omega}{dt} = \Psi(t),$$

woraus sich durch Integration auch ω als Function der Zeit ergiebt, ohne dass dazu die Gleichung (1) gebraucht würde, die in der That schon wegen der hier verschwindend kleinen Hülsenbewegung ihre Bedeutung verliert. Dabei ist freilich zu berücksichtigen, dass, wenn die Bewegung des Stellzeuges von der zu regulirenden Maschine ausgeht, indem es mit ihr durch den Regulator gekuppelt wird, jene Function $\psi(t)$ sich streng genommen nicht unmittelbar ergiebt, da vielmehr zunächst dann ξ vom Drehungswinkel φ der Regulatorwelle abhängt und erst aus

$$\xi = \psi(\varphi)$$

nach Gl. (2) sich mit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Psi(\varphi)$$

und daraus φ sowie demnächst $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ als Function von t ergiebt. Bei der geringen Veränderlichkeit von ω kann indessen näherungsweise

$$\xi = \psi(\varphi) = \psi(\omega_0 t)$$

gesetzt werden.

Bei indirect intermittirend wirkenden Regulatoren ist endlich ξ abwechselungsweise eine Function von t oder constant, jenachdem die Regulatorhülse sich von ihrer Mittellage entfernt oder derselben nähert.

a. Direct wirkende Regulatoren.

§. 125. Direct continuirlich wirkender Regulator.

Es werde ein Centrifugalregulator mit zwei symmetrisch angeordneten Kugeln betrachtet, deren jede das Gewicht G hat, während das Gewicht der Hülse sammt der sie belastenden Masse $= 2\,mG$ sei unter Abstraction von den Massen und Gewichten der Stangen, durch welche event. die Kugeln mit der Hülse und der verticalen Regulatorwelle charnierartig verbunden sind, sowie auch unter Abstraction von Bewegungswiderständen des Regulators selbst und des Stellzeuges.

Die Kugelmittelpunkte K sind in einer aufwärts concaven Bahn B beweglich, die mit der Regulatorwelle rotirt, in einer durch die Axe der letzteren gehenden verticalen Ebene liegt und in Bezug auf diese Axe symmetrisch ist; y und z seien die augenblicklichen Entfernungen eines Kugelmittelpunktes beziehungsweise von jener Axe und von einer unterhalb der Bahn gelegenen Horizontalebene H, so dass y und z zusammen mit x (§. 124) zu- und abnehmen. Bedeutet ferner ds ein Bogenelement genannter Bahn, dt ein Zeitelement und g die Beschleunigung der Schwere, so ist die Gleichung, welche ausdrückt, dass bei gestörtem relativem Gleichgewichte des Regulators der elementare Zuwachs der relativen lebendigen Kräfte der Kugelmasse $\frac{2G}{g}$ und Hülsenmasse $\frac{2mG}{g}$ zusammen genommen der algebraischen Summe der elementaren Arbeiten der Schwerkräfte dieser beiderlei Massen und der Centrifugalkräfte der Kugeln gleich ist:

$$\frac{mG}{g}d\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{G}{g}d\frac{ds^2}{dt^2}=2\frac{G}{g}\omega^2 y\,dy-2\,mG\,dx-2\,G\,dz$$

oder

$$\frac{d(m\,dx^2+ds^2)}{dt^2}=2\,\omega^2 y\,dy-2\,g\,(m\,dx+dz) \quad \ldots\ldots (1).$$

Um dieser Gleichung eine für die weitere Entwickelung hinlänglich einfache Form zu geben, werde unter der Voraussetzung, dass ihre Integration jeweils zwischen engen Grenzen der überhaupt nur kleinen Configurationsänderung des Regulators ausgeführt wird,

$$\frac{dz}{dx}=a \quad \text{und} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2=b$$

gesetzt, unter a eine Constante und unter b einen Mittelwerth innerhalb der Integrationsgrenzen verstanden. Es ist dann

$$z=ax+z_0 \quad \text{und} \quad b=\left(a\frac{ds}{dz}\right)^2=\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2,$$

wo z_0 den Werth von z für den ursprünglichen Beharrungszustand ($x=0$) und α den mittleren Winkel bedeutet, unter welchem innerhalb der jeweiligen Integrationsgrenzen die Normale der Bahn B für den betreffenden Ort des Kugelmittelpunktes K gegen die Axe der Regulatorwelle geneigt ist. Hiermit und mit

$$d(dx^2)=2\,dx\,d^2x$$

ergiebt sich aus Gl. (1):

$$(m+b)\frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2 y\frac{dy}{dx}-g\,(m+a)=a\,\omega^2 y\frac{dy}{dz}-g\,(m+a) \ldots . (2).$$

Bezeichnet O den Punkt, in welchem die Axe der Regulatorwelle von der Normalen der Bahn B für den Punkt K geschnitten wird (siehe Fig. 112 für den Fall eines Watt'schen Regulators) und H die Höhe des Punktes O über der Ebene H, so ist

$$y\frac{dy'}{dz} = y \, cotg\, \alpha = H - z = H - z_0 - ax = h - ax,$$

unter h die im Allgemeinen zugleich mit x etwas veränderliche Höhe des Punktes O über der dem ursprünglichen Beharrungszustande entsprechenden Lage K_0 des Kugelmittelpunktes K verstanden. Damit erhält Gl. (2) die Form:

$$(m+b)\frac{d^2x}{dt^2} = a(h-ax)\omega^2 - g(m+a) \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Im Gleichgewichtszustande des Regulators ist $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, insbesondere also für den ursprünglichen Beharrungszustand ($x = 0$, $h = h_0$, $\omega = \omega_0$):

$$ah_0\omega_0^2 = g(m+a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

womit der obigen Gleichung auch die Form gegeben werden kann:

$$(m+b)\frac{d^2x}{dt^2} = a(h-ax)\omega^2 - ah_0\omega_0^2.$$

Ihre rechte Seite ist die Aenderung, welche die Function

$$f(x,\omega) = a(h-ax)\omega^2$$

durch den Uebergang der Variablen von 0 in x und ω_0 in ω erfährt, und wenn diese Functionsänderung nach der Taylor'schen Reihe entwickelt wird, wobei zu beachten ist, dass h von x abhängt, so ist es den vorausgesetzten Kleinheiten der Configurationsänderung des Regulators und der Geschwindigkeitsänderung der Maschine entsprechend, dabei nur die Glieder mit den ersten Potenzen von x und $\omega - \omega_0$ zu berücksichtigen, also zu setzen:

$$f(x,\omega) - f(0,\omega_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_0 (\omega - \omega_0),$$

wo $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_0$ die Werthe bedeuten, welche die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial x} = a\left(\frac{dh}{dx} - a\right)\omega^2$$

$$\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial \omega} = 2a(h-ax)\omega$$

dadurch annehmen, dass darin zugleich $x = 0$ und $\omega = \omega_0$ gesetzt wird. Somit ergiebt sich:

$$(m+b)\frac{d^2x}{dt^2}=a\left(\frac{dh_0}{dx}-a\right)\omega_0{}^2x+2\,a h_0\,\omega_0\,(\omega-\omega_0)\;\ldots\ldots(5),$$

unter h_0 und $\frac{dh_0}{dx}$ die Werthe von h und $\frac{dh}{dx}$ verstanden, welche $x=0$, d. h. dem ursprünglichen Beharrungszustande entsprechen. Es ist wesentlich, zu bemerken, dass der Factor

$$\frac{dh_0}{dx}-a$$

des Gliedes mit x in dieser Gleichung jedenfalls negativ ist; denn er bedeutet den Werth des Differentialquotienten

$$\frac{d(h-ax)}{dx}=\frac{d(H-z)}{dx}$$

für $x=0$, während die Stabilität des Gleichgewichtes nach dem Früheren (siehe insbesondere §. 115) erfordert, dass die Subnormale der Bahn B (die Höhe des Punktes O über dem Kugelmittelpunkte K) $=H-z$ abnimmt, wenn ω und somit x wächst. Je statischer der Regulator, desto grösser ist der Absolutwerth jenes negativen Factors.

Was die Art des Motors und die Art betrifft, wie der Zufluss seiner motorischen Substanz durch das vom Regulator bewegte Stellzeug bedingt wird, so werde als gewöhnlichster und wichtigster Fall der Anwendung von direct continuirlich wirkenden Regulatoren eine Dampfmaschine vorausgesetzt und zwar mit einem Cylinder und mit solcher Anordnung des Regulators, dass durch ihn der Füllungsgrad ε des Dampfcylinders den Umständen entsprechend verändert, also bei steigender Hülse verkleinert, bei sinkender vergrössert wird. Indem hier von solchen periodischen Geschwindigkeitsänderungen abgesehen wird, die von der Veränderlichkeit des Dampfdruckes auf den Kolben und des Verhältnisses der Kolbengeschwindigkeit zur Kurbelgeschwindigkeit herrühren, ist der Gang der Maschine für jeden einfachen Kolbenschub als gleichförmig beschleunigt oder verzögert zu betrachten und nur darauf Rücksicht zu nehmen, dass der algebraische (d. h. positive oder negative) Werth der Beschleunigung $=p$ sich von einem zum folgenden Kolbenschube in Folge der inzwischen geänderten Hülsenlage und des entsprechend geänderten Füllungsgrades ε auch verändert. Wenn also die Zeit t vom Anfange eines Kolbenschubes an gerechnet und mit ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle am Anfange desselben bezeichnet wird, ist

$$\omega=\omega_1+pt\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

und gilt diese Gleichung mit unveränderten Werthen von ω_1 und p so lange bis $t=$ der Dauer τ des betreffenden Kolbenschubes geworden ist.

Was letztere betrifft, so sei n das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Regulatorwelle und der Kurbelwelle (Schwungradwelle), die durch einen Schubkurbelmechanismus mit dem Dampfkolben verkettet ist. Dann ist π der Winkelweg der Kurbelwelle, $n\pi$ der Winkelweg der Regulatorwelle während eines Kolbenschubes, somit

$$n\pi = \int_0^\tau \omega\, dt = \int_0^\tau (\omega_1 + pt)\, dt = \omega_1 \tau + \frac{p\tau^2}{2}.$$

Bei der geringen Veränderlichkeit von ω ist näherungsweise $\tau = \frac{n\pi}{\omega_1}$, und wenn dieser Näherungswerth in dem untergeordneten Gliede mit p für τ gesetzt wird, ergiebt sich

$$\tau = \frac{n\pi}{\omega_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{p}{\omega_1}\frac{n\pi}{\omega_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Durch Substitution des Ausdruckes (6) von ω erhält nun Gl. (5) die Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + A_1 t + B_1$$

mit

$$k^2 = \frac{a\omega_0^2}{m+b}\left(a - \frac{dh_0}{dx}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$A_1 = \frac{2ah_0\omega_0}{m+b}\,p; \quad B_1 = \frac{2ah_0\omega_0}{m+b}(\omega_1 - \omega_0).$$

Während k^2 eine positive, für die auf einander folgenden Kolbenschübe nur wenig (als Function von b) verschiedene Constante ist, sind A_1 und B_1 Coefficienten, die mit den Werthen von p und ω_1 sich von einem zum anderen Kolbenschube wesentlich ändern und dabei positiv oder negativ sein können. Setzt man zur Integration jener Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + A_1 t + B_1 = x'',$$

so folgt

$$\frac{d^2x''}{dt^2} = -k^2\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x''$$

mit dem allgemeinen Integral:

$$x'' = C_1 \cos(kt) + D_1 \sin(kt)$$

$$x = \frac{A_1 t + B_1}{k^2} - \frac{C_1}{k^2}\cos(kt) - \frac{D_1}{k^2}\sin(kt)$$

oder mit den Bezeichnungen:

$$A = \frac{A_1}{k^2} = \frac{2h_0}{\omega_0\left(a - \frac{dh_0}{dx}\right)} p$$

$$B = \frac{B_1}{k^2} = \frac{2h_0}{\omega_0\left(a - \frac{dh_0}{dx}\right)} (\omega_1 - \omega_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und

$$C = -\frac{C_1}{k^2}, \quad D = -\frac{D_1}{k^2}$$

$$x = At + B + C\cos(kt) + D\sin(kt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A - Ck\sin(kt) + Dk\cos(kt) \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Zur Bestimmung der Integrations-Constanten C, D dienen die zusammengehörigen Anfangswerthe des betreffenden Kolbenschubes:

$$t = 0, \quad x = x_1, \quad v = v_1,$$

mit welchen sich aus (10) und (11) ergiebt:

$$C = x_1 - B; \quad D = \frac{v_1 - A}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Zu vollständiger Bestimmung der Aufgabe bedarf es schliesslich noch der Beziehung zwischen x und p, bedingt durch die Beziehungen zwischen x und ε, ε und p. In ersterer Hinsicht werde eine solche Verbindung der Hülse mit der Expansionsvorrichtung durch das Stellzeug angenommen, dass die Aenderungen von ε und x einander proportional sind, dass also

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{x}{x'}(\varepsilon_0 - \varepsilon'') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

ist, unter ε_0 den $x = 0$ entsprechenden Füllungsgrad im ursprünglichen Beharrungszustande und unter ε'' den kleinsten Füllungsgrad verstanden, dem der Maximalwerth x' von x entsprechen soll. Um aber nach dieser Gleichung den Werth von ε für einen gewissen Kolbenschub richtig zu finden, muss darin für x der Werth gesetzt werden, der in dem Augenblicke stattfindet, in welchem bei diesem Kolbenschube die Einströmung des Dampfes hinter dem Kolben aufhört und seine Expansion beginnt, also der Werth, der nach Gl. (10) mit $t = t_1$ gefunden wird, unter t_1 die Zeitdauer der betreffenden Dampfeinströmung verstanden. Letztere ist, wenn während derselben sich die Kurbel um den Winkel α_1 dreht und nach Gl. (7) mit hier völlig ausreichender Annäherung $\tau = \frac{n\pi}{\omega_1}$ gesetzt wird:

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{\pi}\tau = \frac{n\alpha_1}{\omega_1}.$$

Der Winkel α_1 ist streng genommen für die im einen und anderen Sinne stattfindenden Kolbenschübe verschieden, wenn der entsprechende mit Dampfeinströmung zurückgelegte Kolbenweg $s_1 = \varepsilon s$, unter s den ganzen Kolbenschub verstanden, in beiden Fällen derselbe ist (siehe §. 93, Gl. 10), und zwar ist dann α_1 im einen Falle grösser, im anderen kleiner, als bei unendlich langer Koppel, d. h. bei dem Ersatze des Schubkurbelmechanismus durch eine Kreuzschieberkurbel. Hier genügt es, das diesem letzteren Falle entsprechende mittlere Verhältniss zwischen α_1 und ε der Rechnung zum Grunde zu legen, also zu setzen:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2}s - s_1}{\frac{1}{2}s} = 1 - 2\varepsilon$$

$$t_1 = \frac{n}{\omega_1} \operatorname{arc} \cos (1 - 2\varepsilon).$$

Der dem betreffenden Kolbenschube zugehörige Füllungsgrad wird nun gefunden, indem dieses t_1 im Ausdrucke (10) von x für t gesetzt und dann dieser Ausdruck dem aus Gl. (13) sich ergebenden gleich gesetzt, indem also die Gleichung

$$A t_1 + B + C \cos (k t_1) + D \sin (k t_1) = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon''} x'$$

nach ε aufgelöst wird. Weil das indessen bei der transcendenten Form der Gleichung sehr unbequem wäre, mag es genügen, als ersten Näherungswerth von ε den Füllungsgrad ε_1 zu bestimmen, der aus Gl. (13) mit $x = x_1$ gefunden wird, dann

$$t_1 = \frac{n}{\omega_1} \operatorname{arc} \cos (1 - 2\varepsilon_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

zu setzen und schliesslich aus Gl. (13) einen corrigirten Werth von ε zu berechnen mit demjenigen Werthe von x, welcher der Gleichung (10) für $t = t_1$ entspricht.

Was endlich die Beziehung zwischen p und ε betrifft, so genügt hier auch in dieser Hinsicht eine nur angenäherte Bestimmung. Wird zu dem Ende mit Abstraction von allen Nebenumständen der Vorderdampfdruck auf den Kolben constant $= P_2$, der Hinterdampfdruck während der Einströmung $= P_1$ und während der Expansion dem durchlaufenen Wege umgekehrt proportional gesetzt (ähnlich wie es in §. 93 behufs der Schwungradbestimmung geschah), so ist die ganze Betriebsarbeit für einen Kolbenschub:

$$L = P_1 s_1 + \int_{s_1}^{s} P_1 \frac{s_1}{s} ds - P_2 s = P_1 s_1 \left(1 + ln \frac{s}{s_1}\right) - P_2 s$$

oder mit $P_2 = \beta P_1$:

$$L = P_1 s \left[\varepsilon \left(1 + ln \frac{1}{\varepsilon}\right) - \beta\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Daraus ergiebt sich dann:

$$P = \frac{L}{n\pi} \quad \text{und} \quad p = \frac{P - Q}{M} \ldots\ldots\ldots\ldots (16),$$

wo Q den der Störung des ursprünglichen Beharrungszustandes entsprechenden geänderten Werth des auf den Abstand $= 1$ von der Axe der Regulatorwelle reducirten Widerstandes bedeutet, M die ebendahin reducirte gesammte bewegte Masse der Maschine.

Um nun die Wirkung des Regulators auf den Gang der Maschine zu untersuchen, werde der Einfachheit wegen angenommen, dass die Störung des ursprünglichen Beharrungszustandes gerade bei Beginn eines Kolbenschubes stattfindet. Für diesen sind dann die Anfangswerthe von ω, x, v und ε: $\omega_1 = \omega_0$, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, und kommt es vor Allem darauf an, hieraus der Reihe nach die Anfangswerthe derselben Grössen für den 2ten, 3ten u. s. w. Kolbenschub seit jener Störung des Beharrungszustandes abzuleiten, eine Aufgabe, die darauf hinauskommt, die Werthe jener Grössen für das Ende irgend eines Kolbenschubes zu finden, wenn sie zu Anfang desselben $= \omega_1$, x_1, v_1, ε_1 bekannt sind.

Zu dem Ende ergiebt sich zunächst, nachdem die Constanten a, n, h_0, $\frac{dh_0}{dx}$, ω_0, ε_0, die für alle Kolbenschübe ohne neue Aenderung von Q dieselben Werthe behalten, sowie auch für den betreffenden Kolbenschub die Coefficienten b und k entsprechend $x = x_1$ bestimmt worden sind, ein Näherungswerth von p für jenen Kolbenschub aus (15) und (16) mit $\varepsilon = \varepsilon_1$. Dazu findet man A und B aus (9), dann C und D aus (12); ferner t_1 aus (14) und ε aus (13) mit dem Werthe von x, welcher $t = t_1$ nach (10) entspricht. Zu diesem Werthe von ε ergiebt sich aus (15) und (16) ein corrigirter Werth von p, womit, wenn es nöthig erscheinen sollte, corrigirte Werthe von A und D nach (9) und (12) gefunden werden können. Endlich findet man τ aus (7), dann mit $t = \tau$ die gesuchten Werthe von ω, x, v für das Ende des Kolbenschubes aus (6), (10) und (11), endlich ε aus (13) mit diesem Werthe von x.

Die Maxima und Minima von ω werden durch diese für die auf einander folgenden Kolbenschübe zu wiederholende Rechnung ohne Weiteres

gefunden, da sie gemäss der Form von Gl. (6) mit den Schubwechseln zusammentreffen. Ein Maximum oder Minimum von x findet dagegen im Allgemeinen während eines Kolbenschubes statt und giebt sich dadurch zu erkennen, dass die dem Anfang und Ende desselben entsprechenden Werthe von v entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Werth von t, dem nach (10) ein solches Maximum oder Minimum von x entspricht, ist bestimmt durch $v = 0$, also nach (11) durch die Gleichung:

$$C \sin(kt) - D \cos(kt) = \frac{A}{k}$$

oder, wenn $\frac{D}{C} = tg\,\gamma$ gesetzt wird, durch die Gleichung:

$$\sin(kt)\cos\gamma - \cos(kt)\sin\gamma = \frac{A}{Ck}\cos\gamma$$

$$\sin(kt - \gamma) = \frac{A\cos\gamma}{Ck} = \frac{A\sin\gamma}{Dk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Hülse keine der beiden Grenzlagen ($x' = max.\,x$ bezw. $x'' = min.\,x$) erreicht. Wäre es der Fall, so würde eine besondere Untersuchung nöthig sein hinsichtlich der Zeit, zu welcher, und des Bewegungszustandes der Maschine, bei welchem die betreffende Grenzlage erreicht wird, sowie in Betreff der Zeitdauer, während welcher die Hülse in der Grenzlage verharrt, und der Aenderung, die unterdessen der Bewegungszustand der Maschine erfährt. —

Als Beispiel werde eine Dampfmaschine von $s = 1$ Mtr. Schublänge des Kolbens und $\frac{6}{31}$ Quadratmtr. wirksamer Kolbenfläche vorausgesetzt, die mit

$$5 \text{ Atm.} = \frac{31}{30}\cdot 5 = \frac{31}{6} \text{ Kgr. pro Quadratcentim.}$$

Anfangsspannung betrieben wird, entsprechend

$$P_1 = 10000\cdot\frac{6}{31}\cdot\frac{31}{6} = 10000 \text{ Kgr.}$$

Der Gegendampfdruck sei 0,2 Atm., also

$$\beta = \frac{0,2}{5} = 0,04.$$

Der ursprüngliche Beharrungszustand finde bei normalem (mittlerem) Gange statt, und es sei dabei der Füllungsgrad:

$$\varepsilon_0 = 0,2$$

und somit nach (15) die Arbeit des Dampfdruckes (indicirte Arbeit) pro Kolbenschub:

$$L_0 = 10000\,[0,2\,(1 + ln\,5) - 0,04] = 4819 \text{ Meterkgr.}$$

Bei diesem normalen Gange sei die Umdrehungszahl der Kurbelwelle pro Minute $= 45$, also die mittlere Kolbengeschwindigkeit $= 1{,}5$ Mtr. pro Secunde und die indicirte Arbeit in Pferdestärken

$$= \frac{1{,}5\, L_0}{75} = 96{,}4.$$

Der Regulator sei ein gewöhnlicher Watt'scher (Fig. 112, §. 114), und zwar von rhombischer Anordnung mit den Dimensionen:

$$l = 0{,}4 \text{ Mtr.}, \quad a = b = 0{,}25 \text{ Mtr.}, \quad c = e = 0{,}04 \text{ Mtr.},$$

so dass bei $\alpha_0 = 30^0$ mittlerem Elongationswinkel der Kugelstangen

$$h_0 = l \cos \alpha_0 + c \cot g\, \alpha_0 = 0{,}4157 \text{ Mtr.}$$

ist und nach obiger Gl. (4) bei Abstraction vom Eigengewichte der übrigens unbelasteten Hülse, d. h. mit $m = 0$:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{h_0} = \frac{9{,}81}{h_0} = 23{,}6; \quad \omega_0 = 4{,}858.$$

Daraus folgt mit Rücksicht darauf, dass die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle bei normalem Gange $= 1{,}5\, \pi$ ist,

$$n = \frac{\omega_0}{1{,}5\, \pi} = 1{,}031; \quad n\pi = 3{,}239; \quad \frac{1}{n\pi} = 0{,}3087.$$

Nach §. 97, Gl. (4) ist die doppelte lebendige Kraft aller rotirenden Massen der Maschine bei normalem Gange:

$$M\omega_0^2 = \frac{\alpha}{\delta} L_0.$$

Dabei ist nach Gl. (10) daselbst, entsprechend dem Verhältnisse $\lambda = 0{,}2$ der Kurbellänge zur Koppellänge, für $\varepsilon_0 = 0{,}2$ und $\beta = 0{,}04$:

$$\alpha = 0{,}3455$$

und ergiebt sich damit und mit $\delta = 0{,}02$ als angenommenem Ungleichförmigkeitsgrade der periodischen Rotationsbewegung der Kurbelwelle:

$$M\omega_0^2 = 50 \,.\, 0{,}3455 \,.\, 4819 = 83250$$

$$M = \frac{83250}{23{,}6} = 3527.$$

Auch ergiebt sich nach (16) der Werth von P für den ursprünglichen Beharrungszustand bei normalem Gange:

$$P_0 = 0{,}3087 \,.\, 4819 = 1488 \text{ Kgr.}$$

Der höchsten Hülsenlage entspreche der Elongationswinkel $\alpha' = 40^0$ der Kugelstangen, also

$$x' = 2 \,.\, 0{,}25\, (\cos 30^0 - \cos 40^0) = 0{,}05 \text{ Mtr.}$$

bei dem kleinsten Füllungsgrade $\varepsilon''=0{,}05$. Die plötzliche Abnahme des Werthes von Q, der im ursprünglichen Beharrungszustande $=P_0=1488$ Kgr. ist, finde jedoch nur bis zu solchem Betrage statt, dass der neue Beharrungszustand bei $\varepsilon=\varepsilon_2=0{,}1$ stattfinden würde, entsprechend nach (15) und (16):

$$L_2=2903 \text{ Meterkgr.},$$

$$Q=P_2=0{,}3087\, L_2=896 \text{ Kgr.}$$

Für die betreffende neue Gleichgewichtslage der Hülse ist nach (13):

$$x=x_2=\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{\varepsilon_0-\varepsilon''}\,x'=\frac{0{,}1}{0{,}15}\,0{,}05=\frac{1}{30}=0{,}0333$$

und folgt damit aus

$$2\,.\,0{,}25\,(\cos 30^0-\cos\alpha_2)=\frac{1}{30}$$

$$\alpha_2=36^0 56'$$

und die Winkelgeschwindigkeit der Regulatorwelle im neuen Beharrungszustande:

$$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{0{,}4\cos\alpha_2+0{,}04\cot g\,\alpha_2}}=5{,}129.$$

Die Constante a ergiebt sich aus den Längenverhältnissen der Kugel- und Hülsenstangen; sie ist hier nicht nur ein Mittelwerth, sondern genau constant, nämlich

$$a=\frac{dz}{dx}=\frac{0{,}4}{0{,}25}\cdot\frac{1}{2}=0{,}8.$$

Indem ferner

$$h=0{,}4\cos\alpha_0+0{,}04\cot g\,\alpha$$

$$x=2\,.\,0{,}25\,(\cos\alpha_0-\cos\alpha)$$

ist, so folgt:

$$\frac{dh}{d\alpha}=-\frac{0{,}04}{\sin^2\alpha} \quad\text{und}\quad \frac{dx}{d\alpha}=0{,}5\sin\alpha$$

$$\frac{dh}{dx}=-\frac{0{,}08}{\sin^3\alpha};\qquad \frac{dh_0}{dx}=-\frac{0{,}08}{\sin^3\alpha_0}=-0{,}64$$

$$a-\frac{dh_0}{dx}=1{,}44.$$

Endlich ist $\quad b=\left(\frac{a}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{0{,}64}{\sin^2\alpha}$

und damit nach Gl. (8):

$$k^2=0{,}8\,\omega_0^2\,.\,1{,}44\,\frac{\sin^2\alpha}{0{,}64}=1{,}8\,\omega_0^2\sin^2\alpha$$

$$k=6{,}517\sin\alpha.$$

Ist α_1 der dem Anfange eines Kolbenschubes entsprechende Werth von α, bestimmt durch die Gleichung

$$x_1 = 0,5\,(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1)$$

oder

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_0 - 2\,x_1 = 0,866 - 2\,x_1,$$

so kann für diesen Schub gesetzt werden:

$$k = 6,517\,\sin\alpha_1.$$

Als Ergebnisse der mit diesen Daten ausgeführten Rechnung für die ersten 10 Kolbenschübe sind in der folgenden Tabelle enthalten: die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der Regulatorwelle, die Erhebung x_1 der Hülse über ihre Anfangslage und ihre Geschwindigkeit v_1 (positiv aufwärts, negativ abwärts) zu Anfang der betreffenden Kolbenschübe, ferner die von diesen Augenblicken an gerechneten Zeiten $= t_1$ Secunden bis zur Dampfabsperrung, die dann stattfindenden Füllungsgrade ε und die daraus sich ergebenden Winkelbeschleunigungen p der Regulatorwelle, ferner die Zeitdauer τ jedes dieser Kolbenschübe und endlich die von den Anfängen derselben gerechneten Zeiten t, zu welchen, wenn überhaupt, die in der letzten Columne enthaltenen Maximal- oder Minimalwerthe von x stattfinden.*

Nr. des Schubes.	ω_1	x_1	v_1	t_1	ε	p	τ	t	$\left.\begin{matrix}max\\min\end{matrix}\right\} x$
1	4,858	0	0	0,197	0,199	0,1666	0,659	0	0
2	4,968	0,0079	0,0306	0,180	0,157	0,1033	0,648		
3	5,035	0,0284	0,0151	0,142	0,112	0,0232	0,642	0,131	0,0294
4	5,050	0,0191	— 0,0246	0,158	0,152	0,0939	0,637	0,250	0,0156
5	5,110	0,0254	0,0455	0,145	0,082	— 0,0387	0,635	0,481	0,0417
6	5,085	0,0394	— 0,0297	0,118	0,095	— 0,0106	0,637		
7	5,078	0,0119	— 0,0050	0,169	0,159	0,1058	0,634	0,025	0,0118
8	5,145	0,0389	0,0629	0,117	0,064	— 0,0798	0,633	0,296	0,0498
9	5,094	0,0344	— 0,0799	0,128	0,128	0,0542	0,634	0,453	0,0082
10	5,128	0,0138	0,0602	0,165	0,121	0,0405	0,630		

Die Einwirkung dieses Regulators auf den Gang der Maschine erscheint befriedigend, indem ω sich hinlänglich allmählig der Winkel-

* Von der ähnlichen Rechnung Kargl's (Der Civilingenieur, 1871, S. 265) unterscheidet sich die hier angestellte u. A. dadurch, dass auf die Verschiedenheit der Coefficienten k für die einzelnen Kolbenschübe, auf die verschiedene Dauer der letzteren, insbesondere aber auf die Verschiedenheit der Zeitintervalle zwischen den aufeinander folgenden Dampfabschlüssen Rücksicht genommen wurde, abgesehen von theilweise anderen Voraussetzungen, z. B. hinsichtlich der Abhängigkeit des Füllungsgrades ε von der augenblicklichen Hülsenlage.

geschwindigkeit $\omega_2 = 5,129$ des neuen Beharrungszustandes nähert, um alsdann nur mässig um diesen Werth hin und her zu schwanken, welches Verhalten nicht nur dem wesentlich statischen Charakter des Regulators, sondern auch dem schweren Schwungrade der Maschine zu danken ist, das selbst bei beträchtlicher Abweichung des Regulators von der neuen Gleichgewichtslage und somit des Füllungsgrades ε von demjenigen $= 0,1$, der dem neuen Beharrungszustande entsprechen würde, doch nur eine mässige Winkelbeschleunigung p der Regulatorwelle möglich macht. Die Schwankungen der Regulatorhülse finden freilich in erheblichem und zwar zunehmendem Grade statt, so dass während des 10. Kolbenschubes die Grenzlage $x = 0,05$ Mtr. erreicht wird und dabei die der augenblicklichen Geschwindigkeit v entsprechende relative lebendige Kraft des Regulators durch Stoss verloren geht bis die Configurationsänderung des Regulators im Sinne gegen die Mittellage hin mit $v = 0$ wieder beginnt; eine messbare Zeit ist dazu hier nicht erforderlich, indem der Werth von ω, mit welchem die Grenzlage des Regulators erreicht wird, schon kleiner ist, als die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{0,4 \cos \alpha' + 0,04 \cot g \alpha'}} = 5,264$$

für die Gleichgewichtslage bei $\alpha' = 40^0$, wegen

$$5,128 + 0,0405\, t < 5,154 \quad \text{für} \quad t < 0,63.$$

Abgesehen davon übrigens, dass diese erheblichen Hülsenschwankungen den Eintritt eines Beharrungszustandes der Maschine selbst nicht nothwendig zu verhindern brauchen, indem dazu nur nöthig ist, dass in den Augenblicken der Dampfabsperrung die Hülse solche Lagen hat, welche $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0,1$ entsprechen, muss berücksichtigt werden, dass hier von Bewegungswiderständen des Regulators selbst und des Stellzeuges abgesehen wurde, durch welche thatsächlich die Geschwindigkeit v der Hülse verkleinert wird, freilich auf Kosten der Empfindlichkeit des Regulators. Ohne solche Beeinträchtigung der Empfindlichkeit und auf noch wirksamere Weise kann die Bewegung der Hülse verlangsamt werden durch Einführung eines mit ihrer Geschwindigkeit wachsenden, bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit selbst verschwindend kleinen Widerstandes, insbesondere z. B. durch Verbindung des Regulators mit einem sogenannten **Katarakt**, d. i. einem Kolben, der anschliessend in einem beiderseits geschlossenen und mit Flüssigkeit erfüllten Cylinder beweglich ist entgegen einem beliebig (durch Hahnstellung) regulirbaren Widerstande in einem die beiden Cylinderenden verbindenden Rohr, das die Flüssigkeit bei der Bewegung des

Kolbens passiren muss, um von der einen auf die andere Seite des Kolbens zu gelangen. —

Um über das Verhalten direct continuirlich wirkender Regulatoren vollständigen Aufschluss zu erhalten, müssten die dem obigen Beispiele zu Grunde liegenden Voraussetzungen mehrfach variirt werden; wenn dabei auch nach wie vor ein Watt'scher Regulator in Verbindung mit der Expansionsvorrichtung einer Dampfmaschine vorausgesetzt würde, so wären doch wenigstens dem Coefficienten m, der oben $= 0$ gesetzt wurde, verschiedene Werthe beizulegen, entsprechend verschiedenen Hülsenbelastungen, und wäre namentlich der Stabilitätsgrad des Regulators nach und nach anders, insbesondere kleiner zu wählen, indem den Abständen c, e der Charnieraxen C, E von der Axe AA (Fig. 112) statt der oben angenommenen positiven die Werthe Null oder gar negative Werthe beigelegt würden nach Maassgabe des im §. 115 besprochenen Watt'schen Regulators mit gekreuzten Stangen (Fig. 113). Indessen ist die Rechnung, die zu den in obiger Zusammenstellung enthaltenen Resultaten geführt hat, so zeitraubend, dass auf ihre Wiederholung bei veränderten Annahmen verzichtet werden mag um so mehr, als sie bei Abstraction von Bewegungswiderständen doch nur sehr beschränkten praktischen Werth hat, bei der Rücksichtnahme auf diese Widerstände aber noch umständlicher ausfallen würde. Um über den Einfluss des Stabilitätsgrades ein allgemeines Urtheil zu gewinnen, mag hier nur noch der Grenzfall eines vollkommen astatischen Regulators in Betracht gezogen werden.

Für einen solchen ist in Gl. (2) die Subnormale der relativen Bahn jedes Kugelmittelpunktes:

$$y\frac{dy}{dz} = y \, cotg \, \alpha = H - z = h_0$$

$=$ einer Constanten zu setzen, also

$$(m+b)\frac{d^2x}{dt^2} = ah_0\omega^2 - g(m+a) = ah_0(\omega^2 - \omega_0^2)$$

nach Gl. (4), oder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C(\omega^2 - \omega_0^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

unter C einen nur wenig veränderlichen Coefficienten verstanden. Wie bei jedem direct continuirlich wirkenden Regulator stehen ausserdem t, x und ω in einer Beziehung von der Form:

$$\frac{d\omega}{dt} = p = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

indem z. B. die Hülsenlage (x) den Füllungsgrad ε einer Dampfmaschine, dieser die (auf den Abstand $= 1$ von der Regulatoraxe) reducirte Triebkraft P und somit bei gegebener Grösse Q des reducirten Widerstandes die Winkelbeschleunigung p der Regulatorwelle bestimmt. Die Function $F(x)$ ist dabei von solcher Art, dass x und p sich in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern, dass also insbesondere

$$x = min \quad \text{und} \quad p = max$$
$$x = max \quad \text{,,} \quad p = min$$

sich gleichzeitig entsprechen. Nach (19) gehören ferner

$$p = 0 \quad \text{und} \quad \omega = max \text{ oder } min$$

zusammen, nach (18) und wegen $\frac{dx}{dt} = v$ auch:

$$\omega = \omega_0 \quad \text{und} \quad v = max \text{ oder } min$$
$$v = 0 \quad \text{,,} \quad x = max \quad \text{,,} \quad min.$$

Wenn nun wieder ein durch

$$x = 0, \quad \omega = \omega_0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

charakterisirter Beharrungszustand durch plötzliche Aenderung von Q, z. B. durch Abnahme von Q gestört wird, so wird p positiv und nimmt

$$\omega = \omega_0 + \int p\,dt$$

zu, so dass die Hülse und zwar mit nach (18) wachsender Beschleunigung in die Höhe geht bis

$$F(x) = 0, \quad \text{also} \quad p = 0$$

und somit ω ein Maximum geworden ist. Die Hülse hat jetzt die Lage, die sie für den dem geänderten Werthe von Q entsprechenden Beharrungszustand der Maschine haben muss; indem sie aber noch in Bewegung und zwar sogar mit dem Maximum ihrer aufwärts gerichteten Beschleunigung in Bewegung ist, geht sie mit jetzt abnehmender Beschleunigung weiter in die Höhe, wobei p negativ wird, also ω abnimmt bis mit $\omega = \omega_0$ nach (18) die Hülsenbeschleunigung $= 0$ geworden ist. Der Regulator würde sich jetzt in einer relativen Gleichgewichtslage befinden, wenn $\omega = \omega_0$ bliebe und wenn nicht die Beschleunigung, sondern die Geschwindigkeit v der Hülse $= 0$ wäre; thatsächlich ist aber v ein Maximum und geht deshalb die Hülse mit jetzt verzögerter Bewegung noch weiter in die Höhe, während mit weiter abnehmender negativer Winkelbeschleunigung p der Regulatorwelle die Winkelgeschwindigkeit ω derselben unter den Anfangswerth ω_0 sinkt, bis endlich $v = 0$, x ein Maximum und p ein negatives Minimum geworden ist. Diesem noch negativen Werthe von p entsprechend

nimmt ω weiter ab und erreicht sein Minimum erst dann, wenn durch den wieder abnehmenden Werth von x die Winkelbeschleunigung p bis Null gewachsen ist u. s. f. Die Zusammengehörigkeit der aufeinander folgenden ausgezeichneten Werthe von x, p, ω, v wird für einen Hin- und Hergang der Hülse, vorausgesetzt, dass sie dabei ihre Grenzlagen noch nicht erreicht, durch folgende, in ähnlicher Weise beliebig fortzusetzende Zusammenstellung veranschaulicht.

$x = 0 = min,$	$p = max,$	$\omega = \omega_0,$	$v = 0 = min$
	$p = 0,$	$\omega = max$	
		$\omega = \omega_0,$	$v = max$
$x = max,$	$p = min,$		$v = 0$
	$p = 0,$	$\omega = min$	
		$\omega = \omega_0,$	$v = min$
$x = min,$	$p = max,$		$v = 0$ u. s. f.

Wie man sieht, kann ohne Vermittelung der hier ausser Acht gebliebenen Bewegungswiderstände ein neuer Beharrungszustand nicht eintreten, da die ihn charakterisirende Gleichzeitigkeit der Werthe

$$p = 0, \quad \omega = \omega_0, \quad v = 0$$

durch den im Allgemeinen dargestellten thatsächlichen Verlauf der gleichzeitigen Bewegungen des Regulators und der Maschine selbst ausgeschlossen ist. Bei einem statischen Regulator verhält es sich insofern anders, als dabei das Maximum und Minimum von v, entsprechend $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, nicht nach Gl. (18) an die Bedingung $\omega = \omega_0$ geknüpft sind, so dass dann auch z. B. beim Uebergange vom Anfangswerthe $v = 0$ zum ersten Maximum von v nicht vorher ω ein Maximum und $p = 0$ zu werden brauchen. Dann braucht auch das dem ersten Maximum von x entsprechende Minimum von p nicht negativ zu sein, ja es könnte dieses Minimum von p = Null, und somit durch das Zusammentreffen von

$$p = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

ein neuer Beharrungszustand vermittelt werden bei einem gewissen Werthe ω_2 von ω, welcher, je statischer der Regulator, desto mehr hier von ω_0 verschieden ist. Mag aber in der That auch ein solches Zusammentreffen noch so unwahrscheinlich sein, so lässt sich doch wenigstens bei dem statischen Regulator auf geringere Maximalabweichungen der Winkelgeschwindigkeit ω von ω_2, als bei dem astatischen von ω_0 rechnen. Dass dabei auch die Differenz

$$max\,\omega - \omega_0$$

im ersten Falle kleiner sein müsse, als im zweiten, kann freilich nicht ohne Weiteres behauptet werden, indem

die Verkleinerung von $max\,\omega - \omega_2$
durch die Vergrösserung von $\omega_2 - \omega_0$

aufgewogen werden kann. Vermuthlich giebt es vielmehr in jedem Falle einen gewissen von der Art des Regulators und den sonstigen Umständen abhängigen vortheilhaftesten Stabilitätsgrad, für welchen die Summe

$$(max\,\omega - \omega_2) + (\omega_2 - \omega_0)$$

am kleinsten ist, indem mit wachsendem Stabilitätsgrade ihr erster Bestandtheil ab-, der zweite zunimmt.

Die theoretische Ermittelung dieser günstigsten Verhältnisse mit Berücksichtigung aller wesentlichen Umstände, insbesondere auch der Bewegungswiderstände, und zwar sowohl der als constant vorauszusetzenden, die Empfindlichkeit benachtheiligenden und deshalb möglichst klein zu haltenden Reibungswiderstände des Regulators selbst und des Stellzeuges, als auch des etwa absichtlich eingeführten, mit v wachsenden hydraulischen Widerstandes eines mit dem Regulator verbundenen Kataraktes oder dergl., scheitert an kaum überwindlichen Schwierigkeiten. Von Nutzen sind deshalb solche Einrichtungen des Regulators, die es gestatten, seinen Stabilitätsgrad innerhalb gewisser Grenzen willkürlich zu ändern und den Verhältnissen durch Probiren anzupassen, wie es z. B. bei dem Cosinus-Regulator (§. 119) verhältnissmässig leicht geschehen kann. —

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass ebenso wie ein zugleich mit v wachsender und abnehmender Widerstand des Regulators durch Verkleinerung seiner Schwingungen von vortheilhaftem Einflusse auf die Regulatorwirkung ist, so auch durch einen mit ω wachsenden und abnehmenden Widerstand der Maschine selbst die Schwankungen von ω vermindert und überhaupt die Aenderungen von ω verlangsamt werden. Denn wenn mit ω auch Q wächst und somit $p = \frac{P - Q}{M}$ (abgesehen von gleichzeitiger Aenderung der Kraft P) abnimmt, so wird dadurch die Schnelligkeit des Wachsens von ω verkleinert; ebenso die Schnelligkeit der Abnahme von ω bei gleichzeitiger Abnahme von Q, also Zunahme von p. Pflegt nun zwar auch dem Sinne nach eine solche Abhängigkeit des Widerstandes Q von der Geschwindigkeit ω thatsächlich zu bestehen (siehe §. 124), so ist sie doch meistens nur von solcher Grösse, dass auf ihren günstigen Einfluss bei so kleinen Geschwindigkeitsänderungen, wie sie hier in Betracht kommen, nicht wesentlich gerechnet werden kann.

§. 126. Direct intermittirend wirkender Regulator.

Um die Wirkungsweise eines direct intermittirend wirkenden und übrigens statischen Regulators, z. B. eines Regulators von der durch Fig. 125 dargestellten, in §. 123 unter 1) besprochenen Einrichtung zu erkennen, besonders auch den Unterschied seines regulirenden Einflusses auf den Gang der betreffenden Maschine und desjenigen eines übrigens gleichen, aber continuirlich wirkenden Regulators, mag zunächst von der Trägheit seiner relativ beweglichen Glieder abgesehen, also angenommen werden, dass die Configuration des Regulators zu jeder Zeit dem Gleichgewichtszustande bei der betreffenden Winkelgeschwindigkeit ω der Regulatorwelle entsprechend und somit durch ω allein bestimmt sei, falls ausserdem von Bewegungswiderständen abgesehen wird, die thatsächlich einen gewissen Spielraum von ω bei derselben Hülsenlage oder der letzteren bei gegebenem Werthe von ω zulassen. Die Geschwindigkeit ω_0 des ursprünglichen Beharrungszustandes sei beispielsweise grösser, als die normale, die entsprechende Hülsenlage folglich oberhalb der mittleren. Wenn dann durch plötzliche Verkleinerung des Widerstandes Q der Maschine eine weitere Zunahme von ω und Aufwärtsbewegung der Hülse verursacht wird, so verhält sich der intermittirend wirkende Regulator, da seine Hülse sich von der Mittellage entfernt, nicht anders, als ein continuirlich wirkender: in beiden Fällen tritt ein neuer Beharrungszustand ein bei einer gewissen Geschwindigkeit $> \omega_0$ und entsprechender noch höherer Hülsenlage, da Schwingungen, bei denen sich beide Regulatoren allerdings verschieden verhalten würden, durch die Abstraction von der Trägheit ihrer bewegten Massen zunächst ausgeschlossen sind. Indessen ist trotz dieser Abstraction das Verhalten der Regulatoren und der Maschine in beiden Fällen dann wesentlich verschieden, wenn der ursprüngliche Beharrungszustand durch plötzliche Vergrösserung von Q gestört wird. Indem dadurch die Winkelbeschleunigung

$$p = \frac{P - Q}{M}$$

der Regulatorwelle, die im Beharrungszustande $= 0$ war, plötzlich einen negativen Werth erhält, nimmt ω ab und geht die Hülse abwärts, bis im Falle des continuirlich wirkenden Regulators bei $\omega = \omega_1$ ein neuer Beharrungszustand dadurch eintritt, dass durch die der gleichzeitigen Bewegung des Stellzeuges entsprechende Vergrösserung der Triebkraft P die Beschleunigung p allmählig bis Null wieder zunimmt. Im Falle des intermittirend wirkenden Regulators ist dagegen bei der Annäherung der

abwärts gehenden Hülse an die Mittellage ihre Verbindung mit dem Stellzeuge aufgehoben, so dass, wie gering auch die plötzlich stattgefundene Vergrösserung von Q gewesen sein und wie wenig demnach $\omega_1 < \omega_0$ sein mag, der plötzlich eingetretene negative Werth von p so lange unverändert bleibt, bis die Hülse ihre Mittellage erreicht und ω bis zur Normalgeschwindigkeit abgenommen hat. Erst dann wird durch die weiter abwärts gehende und somit von ihrer Mittellage sich nach der anderen Seite wieder entfernende Hülse das Stellzeug in solchem Sinne bewegt, dass P zunimmt, bis dadurch p wieder auf Null gebracht und ein neuer Beharrungszustand herbeigeführt ist bei einer Geschwindigkeit ω_2, die nun jedenfalls kleiner, als die Normalgeschwindigkeit Ω sein wird um so mehr, je mehr im Falle des continuirlich wirkenden Regulators unter übrigens gleichen Umständen $\omega_1 < \omega_0$ ist. Nur wenn

$$\omega_0 - \omega_1 < \omega_1 - \Omega$$

ist, lässt sich somit erwarten, dass auch

$$\Omega - \omega_2 < \omega_1 - \Omega$$

sein, dass also der intermittirend wirkende Regulator durch grössere Annäherung der Geschwindigkeit ω an den normalen Werth Ω einen besser regulirenden Einfluss, als der continuirlich wirkende, ausüben werde. Wäre dagegen z. B. $\omega_1 = \Omega$, die continuirlich regulirende Wirkung also vollkommen, so würde die Hülse des intermittirend wirkenden Regulators nahe ebenso tief unter die Mittellage gelangen, wie sie vorher darüber sich befand, bei einer Geschwindigkeit ω_2, die nahe ebenso viel $< \Omega$ wäre, wie vorher $\omega_0 > \Omega$ war.

Wenn nun auch hieraus ein Vorzug der direct intermittirenden vor der continuirlichen Wirkung nicht zu erkennen ist, so könnte es jedoch der Fall sein, dass ein solcher durch die hier einstweilen ausser Acht gelassenen, den Massen seiner relativ beweglichen Glieder entsprechenden Schwingungen des Regulators vermittelt wird. Die folgende Ueberlegung lässt darauf in der That schliessen.

Würde nämlich im Beharrungszustande bei beliebiger, im Allgemeinen von der normalen abweichender Geschwindigkeit ω_0 die Hülse eines continuirlich wirkenden Regulators ohne Aenderung von Q durch äusseren Anstoss in Schwingungen versetzt, so würde dadurch P periodisch vergrössert und verkleinert, p entsprechend positiv und negativ und ω zu Schwankungen um den Mittelwerth ω_0 veranlasst werden. Die gleicher Weise in Schwingungen versetzte Hülse eines intermittirend wirkenden Regulators würde dagegen nur zeitweilig, so lange ihre Entfernung von der Mittellage zunimmt, eine Aenderung von P und zwar in solchem Sinne

bewirken, dass dadurch die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit ω von ihrem normalen Werth verkleinert wird; die Schwingungen der Hülse würden also um eine Lage herum stattfinden, die sich immer mehr der Mittellage nähert, und dann zuletzt ω nicht, wie im vorigen Falle, um ω_0, sondern um Ω hin und her schwanken nach Anfangs stetiger Annäherung an Ω.

Wenn also auch durch stattgefundene Aenderung von Q zunächst eine grössere Entfernung der Hülse von ihrer Mittellage und der Geschwindigkeit ω von ihrem normalen Werthe Ω bewirkt worden sein mag, so werden doch die Schwingungen der Hülse eines direct intermittirend wirkenden Regulators alsbald eine Annäherung derselben an die Mittellage und von ω an Ω bewirken, ermöglicht durch den Umstand, dass die augenblickliche Lage des Stellzeuges hier nicht sowohl durch die gleichzeitige Lage der Hülse, als vielmehr durch die vorhergegangene Bewegung derselben bestimmt wird und somit jede beliebige, der Gleichheit von P mit dem augenblicklichen Werthe von Q entsprechende sein kann, während die Hülse in der Mittellage und $\omega = \Omega$ ist. —

Um dieses Verhalten des intermittirend wirkenden Regulators für einen bestimmten Fall zu prüfen, werde das Beispiel des vorigen Paragraph unter übrigens gleichen Voraussetzungen auf den Fall der intermittirenden Wirkung übertragen. Es gelten dann die dortigen Gleichungen mit dem einzigen Unterschiede, dass der Füllungsgrad ε für einen Kolbenschub, der nach Gl. (13) daselbst und gemäss den Daten des Beispiels

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{x}{x'}(\varepsilon_0 - \varepsilon'') = 0{,}2 - 3x$$

war, unter x die Entfernung der Hülse (positiv nach oben) von der als Anfangslage angenommenen Mittellage verstanden, jetzt constant zu setzen ist, so lange der Absolutwerth von x abnimmt, dagegen

$$\varepsilon = (\varepsilon) - 3 \cdot \Delta x$$

während der Zunahme des Absolutwerthes von x, falls (ε) den Füllungsgrad bedeutet, der während der vorhergegangenen Abnahme des Absolutwerthes von x, insbesondere also auch noch zur Zeit des kleinsten Hülsenabstandes von der Mittellage stattfand, und Δx die seitdem stattgefundene Aenderung des algebraischen Werthes von x bis zum Augenblicke der Dampfabsperrung für den betreffenden Kolbenschub. Auch hat die Begrenzung des Hülsenweges jetzt nicht entsprechende Grenzen von ε zur Folge. Die Rechnungsergebnisse sind für die ersten 8 Kolbenschübe der betreffenden Dampfmaschine in folgender Zusammenstellung enthalten.

Nr. des Schubes.	ω_1	$\dot{x}_1$	v_1	t_1	ε	p	τ	t	$\left.\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}\right\} x$
1	4,858	0	0	0,197	0,199	0,1666	0,659	0	0
2	4,968	0,0079	0,0306	0,180	0,157	0,1033	0,648		
3	5,035	0,0284	0,0151	0,142	0,112	0,0232	0,642	0,131	0,0294
4	5,050	0,0191	— 0,0246	0,158	0,112	0,0232	0,640	0,280	0,0153
5	5,065	0,0218	0,0315	0,126	0,080	— 0,0417	0,641	0,464	0,0324
6	5,038	0,0303	— 0,0240	0,102	0,061	— 0,0873	0,646		
7	4,982	0,0055	— 0,0202	0,103	0,061	— 0,0873	0,654	0,185	0,0036
8	4,925	0,0111	0,0206	0,082	0,033	— 0,1602	0,665	0,233	0,0140
9	4,818	0,0014	— 0,0543						

Für die drei ersten Kolbenschübe sind diese Zahlen übereinstimmend mit denjenigen der Zusammenstellung im vorigen Paragraph; bei dem dritten Schube tritt zwar das Maximum von x nach $t = 0{,}131$ Secunden vom Anfange des Schubes an gerechnet schon während der Dampfeinströmung ein, die $t_1 = 0{,}142$ Secunden dauert, allein der von jenem Augenblicke des Maximums von x an zunächst constant bleibende Füllungsgrad ε ist fast ebenso gross wie derjenige $= 0{,}112$, welcher dem zur Zeit der Absperrung wieder etwas kleiner gewordenen x im vorigen Falle des continuirlich wirkenden Regulators entsprach. Bei den folgenden Kolbenschüben geht das Verhalten der beiden Regulatoren mehr und mehr auseinander. Bei der Anordnung für intermittirende Wirkung bleibt ω wesentlich kleiner, als im anderen Falle, auch wird eine Grenzlage von der schwingenden Hülse nicht erreicht. Bei Beginn des 9ten Schubes ist ω, von dem zu Anfange des 5ten Schubes erreichten Maximum $= 5{,}065$ zurückgehend, schon etwas kleiner als die Normalgeschwindigkeit $= 4{,}858$ geworden, während die Hülse im Begriffe ist, abwärts gehend die Mittellage zu überschreiten; sobald das geschieht, nehmen ε und p wieder zu sowie demnächst auch ω, nachdem p wieder positiv geworden ist. Ueberhaupt wird dann ω um die Normalgeschwindigkeit, die Hülse um ihre Mittellage oscilliren, und erweist sich die intermittirende Wirkung entschieden besser, als die continuirliche. Während dabei die Schwingungen der Hülse stets auf Annäherung von ω an die Normalgeschwindigkeit bei mittlerer Hülsenlage hinwirken, wird durch die Bewegungswiderstände des Regulators und des Stellzeuges der wirkliche Eintritt eines neuen Beharrungszustandes bei normaler Geschwindigkeit vermittelt, so dass die obige Betrachtung, nach welcher sich die intermittirende Wirkung unter Umständen als schlechter regulirend zu ergeben schien, nicht nur wegen Abstraction von den bis zu gewissem Grade hier erwünschten Schwingungen des Regulators, sondern

auch deshalb auf nicht zutreffenden Voraussetzungen beruhte, weil dabei von einem anfänglichen Beharrungszustande mit grösserer oder kleinerer Geschwindigkeit, als der Normalgeschwindigkeit, ausgegangen wurde.

β. Indirect wirkende Regulatoren.

§. 127. Indirect continuirlich wirkender Regulator.

Wenn der Beharrungszustand einer mit einem solchen Regulator in üblicher Weise ausgerüsteten Maschine, der bei normaler Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Regulatorwelle stattfindet und bei welchem, reducirt auf den Abstand $=1$ von der Axe dieser Welle (§. 124), die Triebkraft $=$ dem Widerstande $=P_0$ sei, durch plötzliche Abnahme des Widerstandes bis zum Betrage Q gestört wird, so wächst die Winkelgeschwindigkeit ω mit Anfangs constanter Beschleunigung

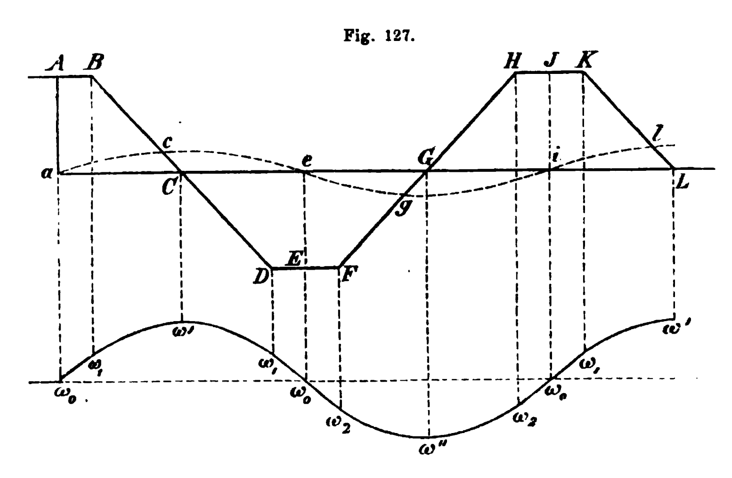
$$p=\frac{P_0-Q}{M}$$

von ω_0 bis zu einem gewissen Werthe ω_1, bei welchem die Kuppelung des Regulators mit dem Stellzeuge erzielt wird und somit die Triebkraft von P_0 an stetig abzunehmen beginnt. Die vorher gleichförmig beschleunigte Bewegung der Maschine geht dadurch in eine abnehmend beschleunigte über bis $P=Q$, die Beschleunigung $=0$, die Geschwindigkeit ω ein Maximum $=\omega'$ geworden ist. Indem aber die Kuppelung des Regulators mit dem Stellzeuge andauert, nimmt P weiter ab, bis bei jetzt zunehmend verzögerter Bewegung der Maschine ω wieder $=\omega_1$ geworden ist und die Kuppelung ausgelöst wird. Mit dem erreichten Maximum der Verzögerung, also mit gleichförmig verzögerter Bewegung sinkt die Geschwindigkeit weiter auf ω_0 und darunter, bis bei einem gewissen Werthe ω_2, der nahe ebenso viel $<\omega_0$ wie $\omega_1>\omega_0$ ist, die entgegengesetzte Kuppelung eingerückt wird, durch welche P wieder zunimmt, die Bewegung der Maschine also abnehmend verzögert wird, bis P wieder $=Q$, die Verzögerung $=0$, die Geschwindigkeit ω ein Minimum $=\omega''$ geworden ist. Die andauernde Kuppelung des Regulators mit dem Stellzeuge bewirkt aber fortgesetzte Zunahme von P, bis bei jetzt zunehmend beschleunigter Bewegung ω wieder $=\omega_2$ geworden ist und die Kuppelung ausgerückt wird, um auf der anderen Seite im Sinne abnehmender Triebkraft wieder eingerückt zu werden, wenn mit gleichförmig beschleunigter Bewegung ω nach dem Durchgange durch die Normalgeschwindigkeit ω_0 wieder bis ω_1 zugenommen hat u. s. f.



Der beschriebene Vorgang wird durch Fig. 127 veranschaulicht. Dieselbe enthält im oberen Theile zwei Linien, deren von einer gemeinsamen (nicht gezeichneten) horizontalen Abscissenaxe an gerechnete Ordinaten = den Werthen von P und Q sind, die den Werthen des stetig wachsenden Drehungswinkels φ der Regulatorwelle als Abscissen entsprechen; die Curve im unteren Theile der Figur stellt durch ihre von einer anderen Abscissenaxe an gerechneten Ordinaten, entsprechend denselben Drehungswinkeln φ als Abscissen, die gleichzeitig stattfindenden Geschwindigkeiten ω dar. Die Kraftlinie $ABCDEFGHJK$.. besteht aus im Allgemeinen krummen, hier nur der Einfachheit wegen geradlinig gezeichneten, abwechselungsweise schräg abfallenden und ansteigenden Strecken BD, FH...,

Fig. 127.



die durch horizontale gerade Strecken AB, DEF, HJK..., den Perioden unterbrochener Kuppelung des Regulators mit dem Stellzeuge entsprechend, getrennt sind. Die Widerstandslinie $aCeGiL$... ist gemäss der vorläufigen Annahme eines constanten Widerstandes Q als eine mit der Abscissenaxe parallele Gerade gezeichnet. Den horizontalen Strecken AB, DEF, HJK... der Kraftlinie entsprechen die am stärksten gegen die Abscissenaxe geneigten Strecken $\omega_0\omega_1$, $\omega_1\omega_0\omega_2$, $\omega_2\omega_0\omega_1$... der Geschwindigkeitscurve, die näherungsweise, nämlich mit derjenigen Annäherung geradlinig sind, mit welcher der Drehungswinkel φ proportional der Zeit gesetzt werden kann. Den abfallenden und ansteigenden Theilen BD, FH... der Kraftlinie entsprechen dagegen die entgegengesetzt gekrümmten Theile $\omega_1\omega'\omega_1$, $\omega_2\omega''\omega_2$... der Geschwindigkeitscurve, insbesondere die Scheitelpunkte ω', ω''... der letzteren den Durchschnittspunkten C, G... der Kraft- und der Widerstandslinie.

Eine Fläche, die von der Kraftlinie, der Widerstandslinie und von zwei den Abscissen φ_1 und φ_2 entsprechenden Ordinaten begrenzt wird, ist

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (P - Q)\, d\varphi$$

= der positiven oder negativen Arbeit der Kräfte während des Drehungswinkels $= \varphi_2 - \varphi_1$ der Regulatorwelle, positiv oder negativ, jenachdem die Kraftlinie an der betreffenden Stelle über oder unter der Widerstandslinie liegt. So ist insbesondere die Fläche $aABC$ die zum Uebergange aus der Normalgeschwindigkeit ω_0 in die Maximalgeschwindigkeit ω' verbrauchte Arbeit:

$$aABC = M \frac{\omega'^2 - \omega_0^2}{2}$$

und die Fläche $CDEe$ die durch den Rückgang der Geschwindigkeit von ω' zu ω_0 gewonnene Arbeit:

$$M \frac{\omega'^2 - \omega_0^2}{2} = CDEe.$$

Beide Flächen $aABC$ und $CDEe$ sind folglich gleich gross, ebenso aus gleichem Grunde die Flächen $eEFG$ und $GHJi$ u. s. f. Insofern ausserdem die Einwirkung der Maschine auf das Stellzeug bei der Kuppelung im einen und anderen Sinne demselben Gesetze folgt, die Theile BD und FH etc. der Kraftlinie somit einander paarweise symmetrisch sind, ergiebt sich, dass in dem hier einstweilen angenommenen Falle eines constanten Widerstandes Q auch die Flächen $CDEe$ und $eEFG$ gleich gross, weil symmetrisch liegend congruent sind, also $\omega'^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega''^2$ ist, dann auch die Flächen $aABC$ und $GHJi$ symmetrisch liegend congruent, weil inhaltsgleich, $aABC$ und $iJKL$ gleich gross, weil gleich liegend congruent sind, dass also das zweite Maximum ω' dem ersten gleich ist u. s. f. Daraus folgt, dass die wellenförmige Geschwindigkeitscurve aus aufeinander folgenden gleichen Wellen besteht, dass also die Geschwindigkeit ω ohne Ende zwischen denselben Grenzen ω' und ω'', deren Quadrate bezw. um gleich viel grösser und kleiner, als ω_0^2 sind, hin und her schwanken würde, wenn nicht thatsächlich Umstände vorhanden wären, die eine allmählige Abnahme dieser Wellen, somit die Annäherung an einen neuen Beharrungszustand mit der Normalgeschwindigkeit ω_0 zur Folge haben.

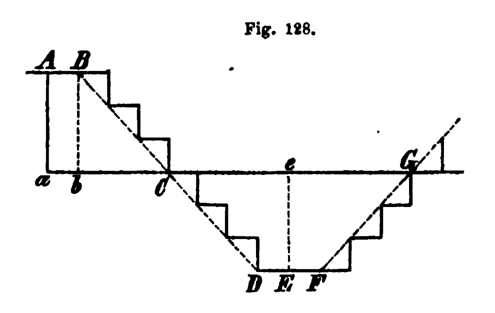
Ein solcher Umstand ist besonders die stets in gewissem Grade stattfindende Abhängigkeit des Widerstandes Q von der Geschwindigkeit ω der Art, dass beide gleichzeitig zu- und abnehmen (§. 124), und somit Q nach seiner plötzlichen Abnahme von P_0 etwa bis Q_0 demnächst periodischen

Schwankungen unterworfen ist entsprechend den Schwankungen von ω. Die Widerstandslinie (Fig. 127) ist dann nicht eine mit der Abscissenaxe parallele Gerade $aCeGiL\ldots$, sondern eine wellenförmige Linie $acegil\ldots$, die mit jener Geraden nur die den Normalgeschwindigkeiten ω_0 entsprechenden Punkte a, e, $i\ldots$ gemein hat. Unter diesen Umständen ist die zum erstmaligen Wachsen der Geschwindigkeit von ω_0 bis ω' disponible Arbeit = der Fläche $aABc$ etwas kleiner, somit auch schon das erste Maximum ω' der Geschwindigkeit etwas kleiner, als im vorigen Falle. Indem ferner die Fläche $aABc$ wieder = der Fläche $cDEe$ sein muss, ist in Fig. 127 die Horizontale DF hinauf-, die Verticale Ee nach links gerückt zu zeichnen, und da der Figur zufolge die Fläche $eEFg$ jetzt offenbar kleiner, als die Fläche $cDEe$ ist, so folgt, dass das Quadrat des ersten Minimums ω'' der Geschwindigkeit sich noch weniger von ${\omega_0}^2$ unterscheidet, als das Quadrat des ersten Maximums ω'. Da ferner die Fläche $eEFg$ nothwendig = der Fläche $gHJi$ ist, die deshalb in Fig. 127 jetzt so gezeichnet werden muss, dass die Punkte H und i näher an G gerückt erscheinen, die Fläche $iJKl$ aber offenbar $< gHJi$ ist, so muss das Quadrat des zweiten Maximums ω' der Geschwindigkeit wieder weniger, als das des ersten Minimums ω'', vom Quadrat der Normalgeschwindigkeit ω_0 verschieden sein u. s. f. So ist ersichtlich, dass die aufeinander folgenden Maxima und Minima von P sich immer mehr dem Mittelwerthe Q_0 von Q, sowie die Maximal- und Minimalwerthe ω' und ω'' von ω immer mehr der Normalgeschwindigkeit ω_0 nähern.

Wenn es sich, wie bei den Beispielen der vorigen Paragraphen, um den Regulator einer Dampfmaschine handelt, der so angeordnet ist, dass er seine regulirende Wirkung durch Aenderung des Füllungsgrades des Dampfcylinders ausübt, so ist die reducirte Triebkraft P während je eines Kolbenschubes constant und nur bei jedesmaligem Schubwechsel sprungweise veränderlich anzunehmen, entsprechend den Unterschieden der Arbeit des Dampfdruckes für die aufeinander folgenden Kolbenschübe; denn die periodischen Aenderungen von ω, die der Veränderlichkeit von P während der einzelnen Schübe entsprechen, können und sollen nicht durch den hier in Rede stehenden Regulator ausgeglichen, sondern durch das Schwungrad, überhaupt durch Vergrösserung der bewegten rotirenden Masse in engere Grenzen eingeschlossen werden. Unter diesen Umständen treten dann an die Stelle der stetigen Kraftlinien BD, $FH\ldots$ von Fig. 127 treppenförmig gebrochene Linien nach Art von Fig. 128, deren einzelne Stufen aus je einer horizontalen Strecke von überall gleicher Länge und aus einer vertical bis zur (punktirt gezeichneten) stetigen Kraftlinie abfallenden oder

ansteigenden Strecke zusammengesetzt sind. Indem durch diese Abänderung der stetigen Kraftlinie von Fig. 127 die Fläche $aABC$ dieser Figur vergrössert, die Fläche $CDEe$ verkleinert, $eEFG$ wieder vergrössert wird u. s. f., ist ihr Einfluss entgegengesetzt demjenigen so eben als vortheilhaft erkannten, der durch die wellenförmige Krümmung der Widerstandslinie $acegil\ldots$ ausgeübt wird. Indem diese Krümmung um so schwächer wird, je weniger ω' und ω'' von ω_0 verschieden geworden sind, wird bei gewissen Werthen von ω' und ω'' der günstige Einfluss dieser Krümmung der Widerstandslinie von dem nachtheiligen Einflusse der gebrochenen Kraftlinie compensirt, so dass dann ω beständig zwischen diesen Grenzwerthen hin und her schwanken muss, ein neuer Beharrungszustand also nicht eintreten kann. Ein indirect continuirlich wirkender Regulator ist deshalb weniger vortheilhaft so zu verwenden, dass er den Zufluss der motorischen Substanz absatzweise, als so, dass er ihn stetig ändert (so lange die Kuppelung nicht unterbrochen wird), wie bei hydraulischen Kraftmaschinen durch Aenderung der Schützenstellung oder auch bei Dampfmaschinen durch Stellungsänderung der Drosselklappe.

Fig. 128.



Der günstige Einfluss, den die in gleichem Sinne mit der von ω stattfindende Veränderlichkeit von Q auf die Wirkung eines Regulators von der hier in Rede stehenden Art ausübt, wird verstärkt, wenn auch P von ω abhängt, aber in umgekehrtem Sinne, nämlich so, dass P ab- oder zunimmt, wenn ω zu- oder abnimmt, wie es in der That der Fall zu sein pflegt. Bei einer Dampfmaschine z. B. wird durch die mit der Geschwindigkeit wachsenden hydraulischen Widerstände, die der Dampf bei seinem Eintritt in den Cylinder und beim Austritt zu überwinden hat, bei zunehmender Geschwindigkeit der Dampfdruck hinter dem Kolben verkleinert, vor demselben vergrössert. Bei hydraulischen Kraftmaschinen findet eine solche dem Verhalten des indirect continuirlich wirkenden Regulators vortheilhafte Abhängigkeit der Triebkraft P von der Geschwindigkeit ω in noch höherem Grade statt.

Wenn nun auch verschiedene Umstände zusammenwirken, um die aufeinander folgenden Maxima und Minima von ω der ursprünglichen Normalgeschwindigkeit ω_0 immer näher zu bringen, so muss doch verlangt werden,



dass auch schon die ersten jener Maxima und Minima nur wenig von ω_0 verschieden seien. Mit Bezug auf Fig. 127 wird aber das erste Maximum ω' um so weniger $> \omega_0$ sein, auf eine je grössere reducirte Masse M sich die der Fläche $aABc$ gleiche Arbeit des Kraftüberschusses erstreckt und je kleiner jene Fläche selbst bei gegebener Grösse $= Aa$ der plötzlichen Widerstandsabnahme ist, je kleiner also die Strecke AB der Kraftlinie ist und je steiler der Theil BC derselben gegen die Abscissenaxe geneigt abfällt. Die regulirende Wirkung wird folglich unterstützt:

1) durch das Vorhandensein eines schweren Schwungrades;

2) durch Schnelligkeit der Einrückung der das Stellzeug mit dem Regulator und dadurch mit der Maschine selbst verbindenden Kuppelung;

3) durch rasche Bewegung des Stellzeuges nach Herstellung jener Verbindung.

Die vortheilhafte Wirkung eines Schwungrades ist allen Regulatoren für Maschinen mit rotirender Bewegung gemeinsam. Mit Rücksicht auf die Schnelligkeit der Einrückung sind solche Kuppelungen von Vortheil, die eine feine Regulirung des Spielraumes der Hülse gestatten, wie z. B. die unter 2) und 5) in §. 122 besprochenen Einrichtungen; auch wirkt die Klauen- oder Zahnkuppelung nach 1) und 5) daselbst schneller, als die Frictionskuppelung gemäss der Einrichtung unter 2), bei der die Kuppelung um so grösseren Druck zwischen den Frictionsscheiben, also um so grössere Geschwindigkeitsänderung der Regulatorwelle erfordert, je grösser der Bewegungswiderstand des Stellzeuges ist, so dass bei Regulatoren für hydraulische Kraftmaschinen diese Frictionskuppelung jedenfalls nicht am Platze wäre. Was endlich die Steilheit der Curven BD, $FH\ldots$, Fig. 127, nämlich die Schnelligkeit der Bewegung des Stellzeuges betrifft, so ist sie, wenn dadurch der Füllungsgrad einer Dampfmaschine entsprechend verändert werden soll, durch die Rücksicht darauf beschränkt, dass der oben besprochene nachtheilige Einfluss, den die dann treppenförmige Gestaltung jener Curven gemäss Fig. 128 auf die Regulatorwirkung ausübt, bei gegebener Grösse $= h$ der horizontalen Strecken dieser gebrochenen Linien in um so höherem Grade stattfindet, je steiler die Curven ihrem (punktirt gezeichneten) mittleren Verlaufe nach gegen die Abscissenaxe geneigt sind. Ist z. B. $BC = a$ in Fig. 128 eine unter dem Winkel α gegen die Abscissenaxe geneigte gerade Linie, so ist das Verhältniss der Inhaltssumme der dreieckigen Hervorragungen über diese Gerade BC zu dem Inhalte des Dreiecks BbC

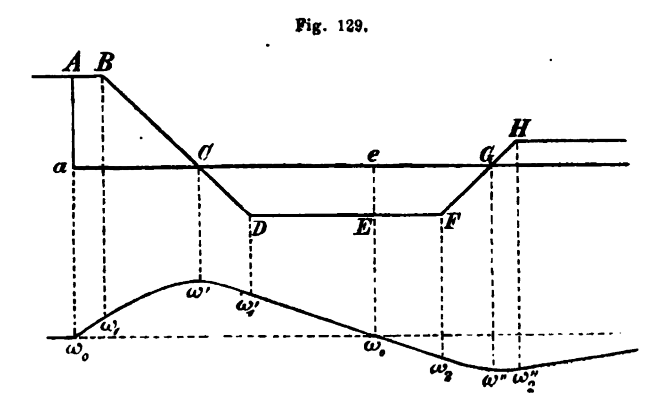
$$= \frac{h a \sin\alpha}{2} : \frac{a^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2} = \frac{h}{a \cos\alpha}$$

um so grösser, je grösser α ist.

§. 128. Indirect intermittirend wirkender Regulator.

Die Wirkungsweise eines solchen Regulators (§. 123) wird im Princip, nämlich abgesehen zunächst von allen Nebenumständen, insbesondere von den durch die Trägheit seiner beweglichen Glieder bedingten Schwingungen des Regulators, durch Fig. 129 veranschaulicht, die der Fig. 127 des vorigen Paragraph entsprechend gezeichnet ist mit $ABCDEFGH\ldots$ als Kraftlinie, $aCeG\ldots$ als Widerstandslinie und $\omega_0\omega_1\omega'\omega_1{}'\omega_0\omega_2\omega''\omega_2{}''\ldots$ als Geschwindigkeitslinie. Nachdem die hier wieder vorausgesetzte plötzliche Abnahme des Widerstandes stattgefunden hat, stimmt zunächst, nämlich entsprechend den Stücken ABC, aC und $\omega_0\omega_1\omega'$ der genannten

Fig. 129.



drei Linien, die Wirkung dieses Regulators mit derjenigen des im vorigen Paragraph besprochenen überein ausschliesslich des Umstandes, dass die Regulatorhülse, die jetzt nicht nur zwischen sehr engen, sondern zwischen weiteren Grenzen beweglich ist, ihre aufwärts gerichtete Bewegung selbst während der Kraftabnahme von P_0 bis Q und der Geschwindigkeitszunahme von ω_0 bis ω' fortgesetzt hat. In Folge der lebendigen Kraft, die in dem Augenblicke, in welchem $P = Q$ und $\omega = \omega'$ geworden ist, den in relativer Bewegung begriffenen Theilen des Regulators eigen ist, setzt sich zudem die Configurationsänderung des letzteren auch über den genannten Augenblick hinaus in gleichem Sinne noch weiter fort, also auch die Abnahme von P gemäss der Kraftlinie CD, Fig. 129, so dass nun ω wieder abnimmt bis bei einem gewissen Werthe, der, sofern er im Allgemeinen zwischen ω' und ω_1 liegen wird, mit $\omega_1{}'$ bezeichnet sei, die Regulatorhülse ihre rückläufige Bewegung beginnt und damit die Einwirkung auf das Stellzeug zeitweilig unterbrochen wird. Die Kraft bleibt jetzt vorläufig unverändert,

entsprechend der Kraftlinie DE, während ω mit constanter Verzögerung, entsprechend dem geradlinigen Stücke $\omega_1{}'\omega_0$ der Geschwindigkeitslinie, abzunehmen fortfährt, langsamer als sie vorher zugenommen hatte, bis bei einem gewissen Werthe ω_2, der nahe ebenso viel $< \omega_0$ wie $\omega_1 > \omega_0$ ist, die Einwirkung auf das Stellzeug im Sinne zunehmender Kraft P beginnt und so lange dauert, bis, nachdem ω einen Minimalwerth ω'' erreicht hatte, bei einem gewissen zwischen ω'' und ω_2 liegenden Werthe $\omega_2{}''$ der Geschwindigkeit die Einwirkung auf das Stellzeug abermals unterbrochen wird u. s. f. Indem unter diesen Umständen $EF < ED$ und somit, da die Kraftlinien CD und FG symmetrisch gleich sind, die Fläche $eEFG$ kleiner als die der Fläche $aABC$ gleiche Fläche $CDEe$ ist, ergiebt sich ω''^2 weniger von $\omega_0{}^2$ verschieden, als ω'^2, ebenso dann das zweite Maximum von ω^2 wieder weniger, als ω''^2 u. s. f., so dass es nur noch darauf ankommen würde, die erstmalige grösste Abweichung von der Normalgeschwindigkeit möglichst klein zu erhalten, in welcher Hinsicht auch hier die im vorigen Paragraph unter 1), 2) und 3) angeführten Gesichtspunkte maassgebend sind.

Auch in Betreff des günstigen Einflusses einer zwischen P, Q und ω stattfindenden Beziehung der Art, dass mit wachsender Geschwindigkeit ω die Kraft P ab- und der Widerstand Q zunimmt, sowie der nachtheiligen Wirkung einer absatzweise anstatt continuirlich stattfindenden Kraftänderung durch das Stellzeug gemäss der treppenförmig gebrochenen Kraftlinie von Fig. 128 behalten die im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen ihre Gültigkeit. Erheblicher indessen, als durch diese Umstände, kann das durch Fig. 129 dargestellte ideale Wirkungsgesetz eines Regulators von der hier in Rede stehenden Art durch die von der Trägheit seiner Glieder herrührenden Schwingungen des Regulators modificirt werden.

Die strenge Untersuchung dieses letzteren Einflusses erfordert weitläufige Entwickelungen. Z. B. bei der in §. 123 unter 2) besprochenen, durch Fig. 126 skizzenhaft dargestellten Einrichtung eines solchen Regulators müsste vor Allem ermittelt werden, wo und wann, nachdem bei Beginn einer rückläufigen Schwingung der Regulatorhülse und somit des Doppelkegels ff' gegen die Mittellage hin die Frictionskuppelung des Kegels f mit dem Hohlkegel e gelöst worden war, dieser letztere, indem er durch das Gewicht m mit einer durch die Wirksamkeit des Getriebes $srqpo$ bedingten Geschwindigkeit auch gegen die Mittellage hin bewegt wird, mit dem schwingenden Doppelkegel wieder zusammentrifft. Wenn man aber annimmt, dass dieses Zusammentreffen in demselben Augenblicke erfolgt, in welchem ff' sich wieder von der Mittellage weg zu bewegen

beginnt, so unterscheidet sich die hier in Rede stehende indirecte von der in §. 126 an einem Beispiele näher geprüften directen intermittirenden Wirkung bei Abstraction vom Bewegungswiderstande des Stellzeuges nur dadurch, dass, während dort die Stellungsänderung des letzteren (bezw. für das fragliche Beispiel die entsprechende Aenderung des Füllungsgrades einer Dampfmaschine) vom Wege der Hülse bei ihrer Bewegung von der Mittellage weg abhing (im Beispiele diesem Wege proportional erfolgte), sie hier proportional der Zeit ist, welche dieser Hülsenweg erfordert oder vielmehr proportional dem Winkel, um den sich die Regulatorwelle während der fraglichen Hülsenbewegung dreht. Durch diesen Unterschied kann an und für sich eine wesentlich verschiedene Wirkungsweise beider Anordnungen des Regulators kaum bedingt werden, wenigstens keine grössere Verschiedenheit, als sie beim direct intermittirend wirkenden Regulator durch verschiedene Abhängigkeitsgesetze z. B. der Aenderung des Füllungsgrades einer Dampfmaschine vom Wege der Regulatorhülse verursacht werden kann. Es lässt sich somit annehmen, dass unter übrigens ähnlichen Umständen, insbesondere bei nahe gleicher Schnelligkeit der Einwirkung auf das Stellzeug nach erfolgter Kuppelung, der indirect intermittirend wirkende Regulator auf ganz ähnlich vortheilhafte Weise seinen Zweck erfüllt, wie es im §. 126 hinsichtlich des direct intermittirend wirkenden erkannt wurde. Auch dieser vermittelt einen neuen Beharrungszustand mit normaler Geschwindigkeit, nur mit dem Unterschiede, dass die Schwingungen dazu wesentlich sind, die hier nur als ein nebensächlicher Umstand erscheinen.

Je mannigfaltiger übrigens die Umstände sind, von welchen, und je weniger einfach die Gesetze, nach welchen von ihnen die Eigenschaften eines Regulators abhängen, so dass es, wie hier, kaum möglich oder wenigstens allzu umständlich ist, dieselben in jedem Falle theoretisch genügend nachzuweisen, desto mehr sind solche Einrichtungen zweckmässig, durch welche die wesentlichsten der fraglichen Umstände willkürlich verändert und den jeweiligen Verhältnissen durch Probiren angepasst werden können, wie namentlich der Stabilitätsgrad des Regulators und die Schnelligkeit seiner Einwirkung auf das Stellzeug, bedingt durch das Geschwindigkeitsverhältniss seines von der Regulatorhülse angegriffenen Anfangspunktes und seines andererseits auf eine Drosselklappe, Expansionsvorrichtung, Schütze etc. wirkenden, somit die Zuflussmenge der motorischen Flüssigkeit unmittelbar bestimmenden Endpunktes.

ZWEITER ABSCHNITT.

Theorie der mechanischen Messinstrumente.

§. 129. Einleitung.

Die Fortschritte exacter Wissenschaften beruhen grossentheils auf planmässig messender Beobachtung. Indem deshalb dieser Abschnitt von der principiellen Einrichtung, Gebrauchs- und Wirkungsweise der Instrumente handelt, die zur Messung der verschiedenen Grössen dienen, mit welchen sich die Mechanik und somit auch die Maschinenlehre als angewandte Mechanik beschäftigt, ist es nöthig, zunächst diese Grössen und die ihrer Messung zu Grunde liegenden Einheiten näher zu bezeichnen. Sie sind theils solche, die der Mechanik mit der Geometrie gemeinsam, theils solche, die ihr eigenthümlich sind.

Geometrische Grössen sind: Längen, Winkel, Flächen und Räume (Volumina). Während die Einheit der Winkel ein Verhältniss zweier Längen, nämlich das Verhältniss eines Kreisbogens zum Radius des Kreises ist, wobei es nur darauf ankommt, dass beide mit derselben übrigens willkürlichen Längeneinheit gemessen werden, sind die Flächen- und Raumeinheiten von der Längeneinheit als somit einziger fundamentaler geometrischen Einheit abgeleitet. Letztere ist in allen Culturstaaten gesetzlich festgestellt als die Länge eines gewissen unter Staatscontrole hergestellten und aufbewahrten materiellen Stabes bei einer gewissen Temperatur, insbesondere z. B. das Meter als die Länge eines im französischen Staatsarchiv aufbewahrten Platinstabes bei der Temperatur des schmelzenden Eises, mit welchem der als Längen-Urmaass für das deutsche Reich gesetzlich geltende Platinstab durch eine gemischte Commission verglichen und bei der Temperatur des schmelzenden Eises = 1,000003 jenes Mètre des Archives gefunden worden ist.



Ausser Instrumenten zur Messung des von einem bewegten Körper zurückgelegten Weges fallen mechanische Vorrichtungen zur Längen- und Winkelmessung theils in das Gebiet der praktischen Geometrie, theils pflegen sie, wie z. B. Vorrichtungen zur Längenmessung von Gespinnsten und Geweben, so speciellen technischen Zwecken zu dienen, dass ihre Besprechung angemessener Weise der Technologie zu überlassen ist. Ebenso wenig kann es sich hier um die von der Geometrie gelehrten rechnerischen Methoden zur Ausmessung von Flächen und Räumen handeln. Von vielseitigem Interesse für die messende Beobachtung auch im Gebiete des Maschinenwesens sind aber sogenannte Planimeter, nämlich Instrumente zur Inhaltsbestimmung ebener Flächen, wie sie namentlich von den Zeichenstiften gewisser anderer mechanischer Messinstrumente als graphische unmittelbare Beobachtungsergebnisse geliefert werden behufs ihrer namentlich auf Inhaltsbestimmung beruhenden Verwerthung zu weiteren Folgerungen. Instrumente zur Messung von Räumen endlich sind von Wichtigkeit behufs der Volumenbestimmung von Flüssigkeiten, die nicht in Gefässen von geometrisch einfacher Form enthalten sind, insbesondere derjenigen zweierlei besonderen Flüssigkeiten, des Wassers und des Leuchtgases, die zu häuslichen, gewerblichen und öffentlichen Zwecken in grossen Quantitäten vom Gewinnungsorte aus durch Röhren an verschiedene Verbrauchsstellen geleitet zu werden pflegen, sofern es sich darum handelt, die an diesen Stellen in gewissen Zeiten verbrauchten Quantitäten zu registriren. Von Instrumenten zur Messung geometrischer Grössen sollen hiernach nur Wegmesser, Planimeter, Wasser- und Gasmesser im Folgenden besprochen werden. —

Die der Mechanik eigenthümlichen Grössen sind: Zeiten, Massen und solche, die davon durch Combination mit geometrischen Grössen abgeleitet sind.

Die Zeiteinheit wird von den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper abgeleitet, und zwar ist die in der Mechanik ebenso wie im bürgerlichen Leben angenommene Zeiteinheit der mittlere Sonnentag, d. h. die mittlere Zeitdauer zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen des Sonnenmittelpunktes durch den Meridian eines Beobachtungsortes auf der Erde; er wird in 24 Stunden oder $24 \cdot 60 = 1440$ Minuten oder $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ Secunden eingetheilt. Instrumente zur Zeitmessung heissen Uhren. —

Die Vergleichung einer Länge mit der Zeit, während welcher sie als Weglänge von einem beweglichen Punkte durchlaufen wird, führt zu den Begriffen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung als abge-

leiteter Grössen. Die Geschwindigkeit eines Punktes in einem gewissen Augenblicke ist $=\frac{ds}{dt}$, wenn im nächstfolgenden unendlich kleinen Zeitelement dt das Wegelement ds von ihm durchlaufen wird. Ist dx die Projection von ds auf eine gewisse Richtung OX, also das nach dieser Richtung vom Punkte während dt durchlaufene Wegelement, so heisst $v=\frac{dx}{dt}$ die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes nach der Richtung OX. Seine Beschleunigung nach dieser Richtung ist $=\frac{dv}{dt}$, wenn dv die Aenderung von v im Zeitelemente dt bedeutet. — Ebenso wie die Vergleichung der Bahnlänge eines Punktes mit der entsprechenden Zeit zum Begriffe der Geschwindigkeit (Längen- oder Bahngeschwindigkeit) führt, ergeben sich durch Vergleichung der Fläche, die von einer beweglichen Linie, oder des Raumes, der von einer beweglichen Fläche in einer gewissen Zeit durchlaufen wird, mit letzterer die Begriffe der Flächengeschwindigkeit und Raumgeschwindigkeit. Wichtiger ist indessen der Begriff der Winkelgeschwindigkeit und der daraus abgeleitete der Winkelbeschleunigung. Für eine gewisse Axe ist erstere: $\omega=\frac{d\psi}{dt}$, wenn $d\psi$ der Drehungswinkel um diese Axe im Zeitelemente dt ist; ändert sich während desselben ω um $d\omega$, so ist $\frac{d\omega}{dt}$ die betreffende Winkelbeschleunigung.

Die Einheiten zur Messung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Art ergeben sich ihren Definitionen gemäss aus der Längen- und Zeiteinheit. Instrumente sind nur gebräuchlich zum Messen von schlechtweg sogenannten Geschwindigkeiten (Längen- oder Bahngeschwindigkeiten) und von Winkelgeschwindigkeiten; sie heissen **Tachometer**. —

Die **Masseneinheit** wird definirt entweder als die Masse eines individuell bestimmten Körpers oder als die Masse eines bestimmten Volumens einer gewissen Substanz, in letzterem Sinne namentlich das **Kilogramm** als die Masse eines Cubikdecimeters destillirten Wassers bei der Temperatur von 4° C. Wenn indessen nach dieser letzteren Definition verschiedene Körper direct als Urkilogramme hergestellt würden, so liessen die damit verbundenen wahrscheinlichen Fehler bei nachträglicher Vergleichung solche Unterschiede erwarten, die sehr viel grösser, als die Fehler wären, welche bei der üblichen Methode der Massenvergleichung individuell bestimmter Körper, z. B. des Urkilogramms und einer Copie desselben, zu befürchten sind. Ebenso wie das Meter, obschon es der



ursprünglichen Absicht und Definition gemäss = 0,0000001 der Länge eines Meridianquadranten der Erde sein sollte, doch thatsächlich durch einen materiell hergestellten Stab fixirt werden musste, dessen Abweichung von jener Definition sich in der Folge als sehr merklich herausstellte, ist deshalb auch die Masseneinheit in allen Culturstaaten thatsächlich als die Masse eines unter Staatscontrole individuell hergestellten und aufbewahrten Körpers gesetzlich festgestellt, insbesondere z. B. das Kilogramm als ein im französischen Staatsarchiv aufbewahrter Körper aus Platin. Der für das deutsche Reich als Urkilogramm gesetzlich geltende Platinkörper ist mit jenem Kilogramme prototype durch eine gemischte Commission verglichen und um 0,16 Milligramm leichter gefunden worden.

Die zur Messung und Vergleichung von Massen dienenden Instrumente, die **Waagen**, beruhen darauf, dass zwei Massen gleich gross sind (durch Definition gleich gross genannt werden), wenn sie gleich schwer sind, d. h. an demselben Orte gleich stark von der Erde angezogen werden. Indem somit durch die Waage unmittelbar die Schwerkräfte zweier Körper oder Körperaggregate verglichen werden, um aus ihrer Grössengleichheit auf diejenige ihrer Massen zu schliessen, heisst die Grösse der Schwerkraft eines Körpers sein **Gewicht**. Bei unveränderlicher Masse ist also das Gewicht eines Körpers veränderlich mit seinem relativen Orte gegen die Erde, mit der geographischen Breite dieses Ortes und seiner Höhe über dem Meere. Im uneigentlichen Sinne wird das Wort „Gewicht“ auch wohl als gleichbedeutend mit Masse gebraucht, nämlich zur Bezeichnung der substanziellen Quantität eines Dinges, insofern sie durch die Operation des Wägens bestimmt wird; die Körper, deren Massen = gewissen Vielfachen oder aliquoten Theilen der Masseneinheit gemacht worden sind (nach den Grössen dieser Massen z. B. als Centner, Kilogramme, Gramme, Milligramme etc. bezeichnet) und deren man sich bedient, um vermittels der Waage durch Vergleichung ihrer Gewichte mit dem Gewichte eines anderen Körpers oder Körperaggregats die Masse des letzteren zu bestimmen, heissen auch wohl selbst Gewichte (Normalgewichte) anstatt besser **Gewichtstücke**. Die mechanisch-wissenschaftliche Bedeutung des Wortes „Gewicht“ bleibt indessen stets die von Schwere oder Grösse einer Schwerkraft, sofern letztere ausser in Bezug auf ihre Grösse auch wie jede andere Kraft in Bezug auf Richtung und Angriffspunkt in Betracht kommt. Dass dieses eigentliche Gewicht eines zur Wägung benutzten sogenannten Gewichtsatzes (Sortiments von Gewichtstücken) an verschiedenen Orten verschieden ist, beeinträchtigt nicht die Correctheit solcher Benutzung, weil in demselben Verhältnisse, in welchem die Schwere eines Gewichtstückes

sich ändert, auch die Schwere aller anderen Körper für denselben Ortswechsel veränderlich ist und deshalb doch thatsächlich die mit Hülfe der Waage ausgeführte Vergleichung von Schwerkräften (Gewichten) auf eine correcte Vergleichung von Massen hinausläuft. —

Aus dem fundamentalen Begriffe einer Masse entspringen durch Verbindung mit den Begriffen von Volumen, Geschwindigkeit und Beschleunigung gewisse abgeleitete mechanische Grössenbegriffe.

Die Masse, welche bei einem gewissen inneren Zustande einer Substanz in der Volumeneinheit derselben enthalten ist, heisst ihre specifische Masse für diesen Zustand. Ihre betreffende Dichtigkeit ist das Verhältniss jener specifischen Masse zu derjenigen einer gewissen anderen conventionell zur Vergleichung gewählten Substanz, als welche zum Ausdrucke der Dichtigkeit eines festen oder flüssigen Körpers Wasser bei der Temperatur von 4° C., eines luftförmigen Körpers atmosphärische Luft bei gleicher Temperatur und Pressung mit dem betreffenden Körper benutzt zu werden pflegt. Die Dichtigkeit ist also keine Grösse, sondern ein Grössenverhältniss; ihre experimentelle Bestimmung und die dazu dienenden besonderen Arten von Waagen und sonstigen Hülfsmittel sind als dem Gebiete der Physik angehörig zu betrachten. Auch in Betreff dieses Begriffes ist übrigens der Mangel eines festen, allgemein anerkannten Sprachgebrauchs zu beklagen, nach welchem vielmehr die specifische Masse vielfach als Dichtigkeit, diese als specifisches Gewicht bezeichnet wird. —

Aus den Begriffen von Masse und Geschwindigkeit entspringen die von Bewegungsgrösse und Bewegungsenergie. Die Bewegungsgrösse eines materiellen Punktes oder Massenelementes ist das Product aus seiner Masse und Geschwindigkeit, die Bewegungsgrösse nach einer gewissen Richtung das Product aus Masse und Geschwindigkeit nach dieser Richtung. Durch Summation ergiebt sich daraus die Bewegungsgrösse bezw. die auf eine gewisse Richtung bezogene Bewegungsgrösse eines Körpers oder Massensystems. Die Bewegungsenergie (freies Arbeitsvermögen, lebendige Kraft) eines materiellen Punktes oder Massenelementes ist das halbe Product aus seiner Masse und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, die Bewegungsenergie eines Körpers oder Massensystems ist die halbe Summe dieser Producte für alle seine Massenelemente zusammen. Zu besonderen Messungsinstrumenten dieser Grössen geben die Bedürfnisse des Maschinenwesens keinen Anlass. —

Die Aenderungen der Bewegungszustände von Körpern werden Kräften als ihren Ursachen zugeschrieben. Wenn insbesondere so die



Masse eines materiellen Punktes und v seine augenblickliche Geschwindigkeit nach einer gewissen Richtung OX ist, so wird die Aenderung dv, welche v im Zeitelement dt erfährt, einer Kraft zugeschrieben, die auf den materiellen Punkt nach der Richtung OX und zwar mit der augenblicklichen Intensität oder Grösse $m\frac{dv}{dt}$ wirkt; dasselbe gilt für den Fall eines ausgedehnten Körpers von der Masse m, wenn die Bewegungen aller Körperpunkte gleich sind. Indem

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}$$

ist, kann man sagen, es werde die Grösse einer Kraft gemessen durch das Product aus einer Masse und der ihr im Sinne der Kraft ertheilten Beschleunigung, oder auch sie sei = dem Zuwachs an Bewegungsgrösse, den sie nach ihrer Richtung in der Zeiteinheit verursacht. Dieser Kraftmessung entspricht die obige, dem Gebrauch einer Waage zu Grunde liegende Definition der Gleichheit zweier Massen als solcher, die an demselben Orte gleich schwer sind, insofern als an demselben Orte die Beschleunigung des (durch die Schwerkraft verursachten) freien Falles für alle Körper gleich ist; das Gewicht oder die Grösse der Schwerkraft eines Körpers von der Masse m ist $= mg$ an einem Orte, wo die Beschleunigung des freien Falles $= g$ ist.

Die Krafteinheit ist somit bestimmt durch die Massen-, Längen- und Zeiteinheit. Bei der grossen Bedeutung indessen, welche Schwerkräfte sowohl an und für sich wie zur Vergleichung mit anderen Kräften haben, ist es ausserdem üblich geworden, das Gewicht der Masseneinheit nicht nur als Gewichtseinheit der Messung von Schwerkräften, sondern überhaupt als Krafteinheit der Messung von beliebigen Kräften zu Grunde zu legen, also z. B. die Grösse der Schwerkraft einer Masse m, die nach absolutem Maass $= mg$ ist, nach diesem relativen oder Gravitationsmaass $= m$ zu setzen, obschon dann die betreffende relative Krafteinheit einen veränderlichen, der Beschleunigung g proportionalen Werth hat. Indem dabei ferner ein einzelnes Wort zu möglichst kurzer Bezeichnung dieser relativen Krafteinheit erwünscht ist, bezeichnet man sie (nicht zum Vortheil der Deutlichkeit) mit demselben Worte wie die Masseneinheit, deren Gewicht sie thatsächlich ist, so dass z. B. die Pressung einer Flüssigkeit $= p$ Kgr. pro Quadratmeter gesetzt wird, um auszudrücken, dass ihr Druck pro Quadratmeter ebenso gross ist wie das Gewicht einer Masse von p Kgr. an dem betreffenden Orte, bezw. gemäss der an diesem Orte stattfindenden Grösse der Beschleunigung des freien Falles. Bei technischen Unter-

suchungen kann von der Veränderlichkeit dieser Beschleunigung im Allgemeinen abgesehen, somit die relative Krafteinheit = dem $g$fachen der absoluten Krafteinheit, oder die Grösse einer gewissen Kraft in absolutem Maasse = dem $g$fachen ihrer Grösse in relativem Kraftmaasse (Gravitationsmaass) gesetzt werden, unter g eine Constante verstanden, etwa = 9,81 bei Voraussetzung des Meters als Längeneinheit und der Secunde als Zeiteinheit.

Mit Bezug auf die besprochene Gravitationsmessung von Kräften ist es übrigens wesentlich zu bemerken, dass sie natürlich auch eine entsprechend veränderte Wahl der Masseneinheit erfordert, damit die durch Definition festgestellte Beziehung zwischen Kräften, Massen und Beschleunigungen nicht dadurch beeinträchtigt werde, damit also, wenn allgemein P eine Kraft bedeutet, die nach ihrer Richtung der Masse m die Beschleunigung φ ertheilt, insbesondere z. B. G das Gewicht eines Körpers für die Beschleunigung g des freien Falles, nach wie vor die Gleichungen bestehen:

$$P = m\varphi, \quad G = mg;$$

denn indem jetzt als Einheit des Gewichtes G dasjenige eines gewissen Körpers, z. B. eines sogenannten Kilogrammstückes gewählt wird, muss die Masse dieses Gewichtstückes nicht mehr $= 1$, sondern $= \frac{1}{g}$ gesetzt werden, entsprechend einer in gleichem Verhältnisse mit der Krafteinheit vergrösserten, nämlich $g$mal so grossen Masseneinheit.

Instrumente zur Messung von Kräften heissen im Allgemeinen **Dynamometer**, insbesondere auch **Manometer**, wenn sie zur Messung des Druckes von Flüssigkeiten dienen. Besondere Arten von Manometern sind die zur Messung des Luftdruckes dienenden Barometer, deren Einrichtungen und Gebrauch indessen als in das Lehrgebiet der Physik gehörig zu betrachten und hier als bekannt vorauszusetzen sind. —

Der Begriff einer Kraft führt zu weiter zusammengesetzten mechanischen Grössenbegriffen, insbesondere zum Begriffe einer **mechanischen Arbeit** = dem Product aus der Grösse einer Kraft und dem nach ihrer Richtung genommenen (auf ihre Richtung projicirten) Wege ihres Angriffspunktes. Der im metrischen System üblichen Arbeitseinheit, dem **Meterkilogramm**, liegt die Gravitationsmessung der Kräfte zum Grunde, so dass aus der in Meterkilogrammen ausgedrückten Grösse einer Arbeit sich ihre Grösse in absolutem Maasse durch Multiplication mit g ergiebt. Nach mechanischen Principien kann übrigens die Arbeit einer Kraft auch gemessen werden durch die ihr gleiche, von dieser Kraft während ihrer betreffenden Arbeitsleistung verursachte Aenderung einer Bewegungsenergie

oder sogenannten lebendigen Kraft. Die zur Messung mechanischer Arbeiten dienenden verschiedenartigen Instrumente pflegen je nach ihrer Art und besonderen Bestimmung mit verschiedenen Specialnamen bezeichnet zu werden (Prony'scher Zaum, Indikator u. s. w.).

Die Vergleichung einer Arbeit mit der Zeit, in welcher sie geleistet wird, führt zum Begriffe der Arbeitstärke = der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit, oder auch = einem in der Zeiteinheit dadurch verursachten Zuwachs an Bewegungsenergie. Ihre gewöhnliche Einheit ist das Secundenmeterkilogramm oder Meterkilogramm pro Secunde. Zur Vermeidung unbequem grosser Maasszahlen ist jedoch auch die Pferdestärke als eine 75 mal so grosse Einheit in Gebrauch. Die Messung einer Arbeitstärke ist das Ergebniss gleichzeitiger Arbeits- und Zeitmessung durch die dazu dienenden Instrumente. —

Die Benutzung der nach vorstehenden Bemerkungen im Folgenden zu besprechenden Instrumente zur Messung von geometrischen Grössen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Massen, Kräften und mechanischen Arbeiten erfordert vielfach die Zählung und Registrirung der Umdrehungen einer Welle, Schwingungen oder Hübe eines hin- und hergehenden Körpers u. s. w. in einer gewissen Zeit, und ist es deshalb angemessen, die dazu dienenden Zählwerke vorab im Zusammenhange kurz zu besprechen. Instrumente zum Rechnen schliessen sich daran naturgemäss an, sofern das Rechnen als ein gesetzmässig combinirtes Zählen betrachtet werden kann, die betreffenden Instrumente aber in neuerer Zeit erhöhte Ausbildung und Verwendung gefunden haben und besonders dann von Nutzen sein können, wenn es sich um vielfach nach derselben Regel zu wiederholende Rechnungen handelt, wie sie u. A. durch die Verwerthung von Messungsergebnissen zu daraus abzuleitenden Mittelwerthen, Gesetzen und sonstigen Resultaten veranlasst werden können.

A. Instrumente zum Zählen und Rechnen.

§. 130. Zählwerke.

Durch diese Instrumente wird bezweckt, die Zahl von Umdrehungen, Schwingungen oder Schüben, welche ein rotirendes, bezw. schwingendes oder hin- und hergehendes Glied einer Maschine in einer gewissen Zeit macht, auf einfache und leicht übersichtliche Weise, nämlich im Allgemeinen so zu registriren, dass jene Zahl aus den Stellungen von Zeigern auf ent-

sprechenden Kreistheilungen oder aus den unter Schaulöchern sichtbar gewordenen Zahlen von Zifferscheiben unmittelbar abgelesen werden kann. Die dazu dienenden Getriebe sind meistens Zahnrädergetriebe, Schneckengetriebe, Schaltgetriebe oder durch Combination aus solchen gebildet.

Handelt es sich z. B. um die Umdrehungszahl einer Welle A, so ist es nahe liegend und sehr gebräuchlich, parallel mit der Welle die festen Axen A_1, A_2, $A_3 \ldots$, um welche je ein grösseres und ein kleineres Zahnrad unter sich fest verbunden drehbar ist, etwa R_1 mit r_1 um A_1, R_2 mit r_2 um A_2 u. s. f., so anzuordnen, dass ein auf A fest sitzendes kleineres Rad r mit R_1, r_1 mit R_2, r_2 mit R_3 u. s. f. in Eingriff ist, ferner die Räder R_1, R_2, $R_3 \ldots$ auf ihren nach derselben Seite (gegen den Beobachter hin) gekehrten Flächen mit Kreistheilungen zu versehen, auf welche Zeiger Z_1, Z_2, $Z_3 \ldots$ weisen, die mit den betreffenden festen Axen A_1, A_2, $A_3 \ldots$ fest verbunden sind (Z_1 mit A_1, Z_2 mit A_2 u. s. f.). Ist dann etwa n die Zähnezahl jedes der Räder r, r_1, $r_2 \ldots$, $10\,n$ die eines jeden der Räder R_1, R_2, $R_3 \ldots$ und wird jede Kreistheilung aus 10 in gleichen Entfernungen befindlichen, der Reihe nach mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bezeichneten Theilstrichen gebildet, so zeigt der Zeiger Z_1 auf der Theilung von R_1 die einzelnen Umdrehungen der Welle A, Z_2 auf der Theilung von R_2 die Zehner, Z_3 auf der Theilung von R_3 die Hunderter u. s. f. dieser Umdrehungen, indem dieselben den Ziffern der zuletzt an den betreffenden Zeigern vorbei gegangenen Theilstriche gleich sind. Steht z. B. Z_1 zwischen den mit 6 und 7, Z_2 zwischen den mit 0 und 1, Z_3 zwischen den mit 4 und 5 bezeichneten Theilstrichen bezw. auf den Rädern R_1, R_2, R_3, während die etwa folgenden Zeiger noch sämmtlich auf Null stehen, so ist die betreffende Umdrehungszahl der Welle $A = 406$, abgesehen von einem nach der Stellung des Zeigers Z_1 zu schätzenden Bruch. Dabei ist vorausgesetzt, dass vorher alle Zeiger auf Null standen, widrigenfalls sich die gesuchte Umdrehungszahl als Differenz von zwei Zahlen ergeben würde, die der anfänglichen und der schliesslichen Zeigerstellung zu entnehmen sind.

Sollen durch die beschriebene Vorrichtung nicht die Rotationen einer Welle, sondern die Schwingungen eines um eine Axe schwingenden oder die Schübe eines in einer Führung hin- und hergehenden Maschinengliedes S gezählt werden, so kann statt des Rades R_1 mit dem um A_1 drehbaren Rädchen r_1 ein zehnzähniges Schaltrad (§. 58) fest verbunden werden, in welches eine Klinke K eingreift, die von dem Maschinentheile S aus so hin- und herbewegt wird, dass sie bei jeder Bewegung im einen Sinne auf einem Zahne z_1 des Schaltrades ganz, auf dem folgenden z_2 nur zum Theil



gleitet und somit bei der darauf folgenden Bewegung im umgekehrten Sinne zuerst auf z_2 zurückgleitet, dann aber vermittels des Zahnes z_1 dem Schaltrade mit dem Rädchen r_1 eine Zehnteldrehung ertheilt. Indem hier bei den Schwingungen von S und K im ersteren Sinne das Schaltrad ruht (zu grösserer Sicherheit durch eine Sperrung festgehalten wird), sind es nicht einfache, sondern nur Doppelschwingungen, die auf solche Weise gezählt werden. Die Verbindung der Schaltklinke K mit dem Maschinentheile S geschieht hier und in ähnlichen Fällen passend durch eine Schnur, nämlich so, dass durch einen von S ausgehenden Zug an derselben die Schaltbewegung (Drehung des Schaltrades) unter gleichzeitiger Anspannung einer Feder, dann aber durch letztere die rückläufige Bewegung von K auf dem gesperrten Schaltrade vermittelt wird in dem Maasse, wie es die dabei gespannt bleibende Schnur zulässt.

Wenn die zu registrirende Umdrehungszahl einer Welle nicht sehr gross, nur etwa so gross oder doppelt so gross ist wie die Zahl der Theilstriche, die auf einer Kreistheilung von üblichem Durchmesser leicht unterscheidbar angebracht werden können, so lässt sich einem solchen Zählwerke mit Zahnrädergetriebe eine compendiösere Form geben, die darauf beruht, dass wegen des Spielraumes der Zähne eines jeden von zwei in Eingriff befindlichen Rädern in den Zahnlücken des anderen Rades, d. h. wegen des kleinen Ueberschusses der Lückenweite über die betreffende Zahndicke (beide in den zugehörigen Theilkreisen gemessen) die Theilungen der beiden Theilkreise nicht genau gleich gross, die Zahnzahlen also nicht genau den Theilrisshalbmessern proportional zu sein brauchen, dass vielmehr mit demselben Rade ohne Schwierigkeit zwei andere Räder in Eingriff gebracht werden können, deren Zahnzahlen um 1 verschieden, wenn nur beide ziemlich gross sind. Sitzt also fest auf der Welle A, deren Umdrehungszahl bestimmt werden soll, ein Rad R mit z Zähnen und von genügender Breite, um zugleich in zwei Räder R_1, R_2 von gleichen Durchmessern eingreifen zu können, von welchen R_1 mit z_1 Zähnen auf einer mit A parallelen Axe A_1 fest sitzt, während R_2 mit z_2 Zähnen lose um A_1 drehbar ist, so kann $z_2 = z_1 + 1$ gemacht werden und ist dann bei einer Umdrehung von A

die Umdrehungszahl von R_1 mit $A_1 = \frac{z}{z_1}$,

„ „ „ $R_2 = \frac{z}{z_1 + 1}$,

also die relative Drehung von A_1 gegen R_2

$$= \frac{z}{z_1} - \frac{z}{z_1 + 1} = \frac{z}{z_1 (z_1 + 1)} \text{ Umdrehungen,}$$

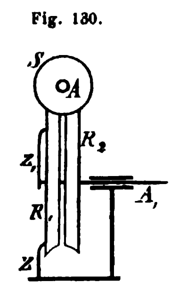
messbar durch einen Zeiger Z_1, welcher, mit A_1 fest verbunden, auf eine Kreistheilung des Rades R_2 zeigt. Der Zeiger durchläuft also einmal die ganze Kreistheilung auf R_2 nach

$$\frac{z_1(z_1+1)}{z} \text{ Umdrehungen von } A,$$

z. B. mit $z = 18$ und $z_1 = 80$ nach 360 Umdrehungen, so dass bei gleichfalls 360 Theilstrichen und vorbehaltlich einer Schätzung halber Skalentheile bis zu 720 Umdrehungen der Welle A auf solche Weise gezählt werden können, bevor der anfängliche Zeigerstand auf der Kreistheilung wiederkehrt. Wenn zur Registrirung der Doppelschübe eines hin- und hergehenden Maschinentheiles S auf der Welle A noch ein Schaltrad mit 10 Zähnen befestigt und zugleich mit dieser Welle eine kleinere 10theilige Kreisskala verbunden würde, die sich an einem festen Zeiger Z vorbei dreht, oder umgekehrt ein Zeiger Z mit ihr verbunden würde, der auf die am Maschinengestelle feste Kreisskala zeigt, so könnten auf letzterer die Einer, auf der Kreistheilung von R_2 die Zehner der betreffenden Zahl von Doppelschüben abgelesen werden, und liesse sich z. B. mit $z = 18$ und $z_1 = 80$ im Ganzen bis 3600 zählen, indem die blosse Schätzung einer Zwischenlage des Zeigers Z_1 zwischen zwei Theilstrichen auf R_2 jetzt durch Ablesung der Angabe des Zeigers Z ersetzt wird.

Durch den besprochenen Eingriff eines Zahnrades mit zwei anderen, deren Zahnzahlen bei gleichen Durchmessern nicht ganz gleich sind, wurde eine beträchtliche Uebersetzung der rotirenden Bewegung ins Langsame ermöglicht. Derselbe Zweck kann auch durch den Eingriff einer Schnecke (Schraube ohne Ende) mit einem vielzahnigen Schneckenrade, in noch höherem Grade folglich durch ihren Eingriff mit zwei Schneckenrädern, deren Zahnzahlen nicht ganz gleich sind, erreicht werden. So ergiebt sich das in Fig. 130 seinem Wesen nach skizzirte sehr compendiöse und doch die Registrirung einer grossen Zahl von Rotationen gestattende Zählwerk.

Fig. 130.



Die um die Axe A drehbare Schnecke S greift zugleich in die Schneckenräder R_1 und R_2, von welchen R_1 mit 100 Zähnen um die rechtwinklig gegen A gerichtete Welle A_1 lose drehbar ist, während R_2 mit 101 Zähnen fest auf ihr sitzt. Das lose Rad R_1 hat zwei concentrische Kreistheilungen: eine äussere von 100 Theilen, auf welche der am Gestell feste Zeiger Z weist, und eine innere von 101 Theilen, entsprechend der Spitze des mit A_1 fest verbundenen Zeigers Z_1. Unter

diesen Umständen markirt Z die einzelnen Umdrehungen von S bis 100, Z_1 dagegen die Hunderter bis $101 \cdot 100$; denn bei einer Umdrehung von S ist die relative Drehung des Zeigers Z auf seiner Theilung $= \frac{1}{100}$ und somit die des Zeigers Z_1 auf der seinigen

$$= \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{10100} \text{ Umdrehung,}$$

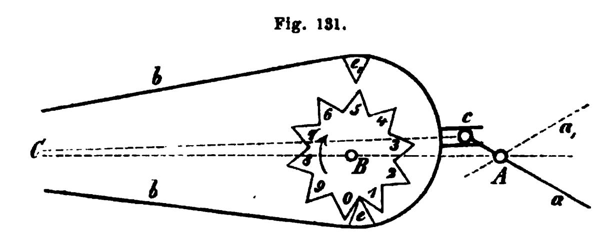
folglich $\frac{1}{101}$ Umdrehung bei 100 Rotationen von S. Erst nach 10100 Rotationen von S kehren beide Zeiger zugleich in die anfänglichen Stellungen gegen ihre Skalen zurück. Wie das Instrument zum Zählen von Schwingungen eingerichtet werden kann, bedarf nach Obigem keiner weiteren Ausführung.

Die Bewegungsübertragung durch Zahnräder- oder Schneckengetriebe hat bei den bisher besprochenen Zählwerken eine Art von schleichender Bewegung der die Zehner, Hunderter etc. angebenden Zeiger zur Folge, so dass, wenn auch im Falle eines Hubzählers dem durch ein Schaltgetriebe bewegten Einer-Zeiger eine springende Bewegung von je einem zum folgenden Theilstriche der betreffenden Skala ertheilt wird, doch die übrigen Zeiger bei der Ablesung im Allgemeinen zwischen zwei Theilstrichen sich befinden. Ist dann z. B. der die Hunderter angebende Zeiger nur sehr wenig von einem Theilstriche entfernt, so dass es mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit der Ausführung zweifelhaft sein kann, ob thatsächlich der Zeiger noch als vor oder schon als hinter demselben befindlich zu gelten hat, so ist zwar ein solcher Zweifel alsbald durch die Stellung des Zehner-Zeigers zu entscheiden, allein es ist doch das Bedürfniss solcher Ueberlegung überhaupt einer schnellen und sicheren Ablesung nicht förderlich. Besser in dieser Hinsicht ist die durch Schaltgetriebe vermittelte springende Bewegung um die betreffenden Axen, wobei dann auch die Ablesung dadurch noch mehr erleichtert werden kann, dass Zeiger und Kreistheilungen durch Zifferscheiben ersetzt werden, deren ringsum stehende Ziffern der Reihe nach hinter entsprechende Schaulöcher einer Deckplatte vorspringen. Von solcher Art ist z. B. der folgende sehr gebräuchliche Hubzähler.

Das um die Axe A, Fig. 131, drehbare Stäbchen a wird durch geeignete Verbindung mit dem hin- und hergehenden Maschinentheile, dessen Hübe gezählt werden sollen, in schwingende Bewegung versetzt, und indem es mit dem Zapfen c in einen Schlitz am Ende des Bügels bb eingreift, wird dadurch auch letzterer zu entsprechenden Schwingungen um

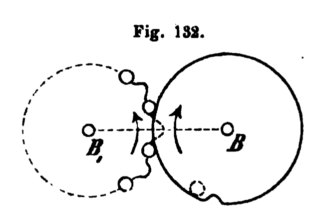
eine mit A parallele Axe C veranlasst. An dem Bügel sitzen die Stahlkeile e und e_1, die bei jeder einfachen Schwingung dem mit 10 keilförmigen Zähnen

Fig. 131.



versehenen Rädchen B eine Drehung um eine halbe Theilung, d. h. $^1/_{20}$ einer vollen Umdrehung um seine in der Ebene AC liegende, mit A und C parallele Axe B ertheilen. Schwingt nämlich das Stäbchen a in die Lage a_1, so drückt der Keil e_1 auf die schräge Fläche des Zahnes 5 und gelangt dadurch der andere Keil e in dieselbe Lage gegen den Zahn 1, etwas gegen 2 hin, in welcher sich in der Figur der Keil e_1 gegen den Zahn 5, etwas gegen 6 hin, befindet. Schwingt also dann das Stäbchen in seine Lage a zurück, so drückt der Keil e auf die schräge Fläche des Zahnes 1 und kommt am Ende dieser Schwingung in dieselbe Lage zwischen den Zähnen 1 und 2, in welcher er sich in der Figur zwischen 0 und 1 befindet. Jeder Doppelschwingung des Stäbchens a entspricht sonach $^1/_{10}$ Umdrehung des Rädchens B. Zur Angabe der Zehner, Hunderter etc. einer abzulesenden Schwingungszahl sind nun zwischen B und C noch weitere Wellen B_1, B_2... parallel mit B angeordnet. Auf der Welle B_1, welche $^1/_{10}$ Umdrehung machen soll nach jeder vollen Umdrehung von B, sitzt ein 10zähniges Zahnrädchen, von dessen einer Seitenfläche in den verhältnissmässig weiten Zahnlücken runde Stifte (Triebstöcke) hervorragen (Fig. 132); entsprechend sitzt auf der Welle B eine dünne runde Scheibe an solcher Stelle, dass sie dicht über den Zähnen von B_1 auf der Seite jener Stifte hinweg streift. Die Axen B und B_1 befinden sich dabei in solcher Entfernung, dass die Scheibe B gerade zwei

Fig. 132.



Stifte von B_1 berührt, wenn dieselben symmetrisch gegen die Centrale BB_1 liegen; auf diese Weise wirkt das Getriebe als eine die willkürliche Drehung der Welle B_1 hindernde Sperrung. Indem aber ausserdem die Scheibe B dicht an ihrem Rande auf der Seite, auf welcher die Zähne des Rädchens B_1 sich befinden, einen cylindrischen Stift (Triebstock) trägt und dicht daneben mit einem Ausschnitte versehen ist, wird dadurch

zugleich die Wirkung des Getriebes als Schaltung vermittelt. Beginnt nämlich das Stäbchen *a* seine 10te Doppelschwingung, so stösst zunächst, nämlich bei der 19ten einfachen Schwingung der Stift von B gegen den in der Centrale BB_1 befindlichen Zahn von B_1 und bringt dadurch einen Stift von B_1 in diese Centrale, in welche jetzt auch der Einschnitt von B eingetreten ist; bei der 20ten einfachen Schwingung des Stäbchens *a* wird dann auch dieser Stift von B_1 fortgeschoben und sind es jetzt also die beiden folgenden Stifte von B_1, durch welche vermittels der sie berührenden Scheibe die Welle B_1, nachdem sie $^1/_{10}$ Umdrehung gemacht hat, bis nach Vollendung der folgenden Umdrehung von B gehemmt wird. Ebenso wie von der Einerwelle B auf die Zehnerwelle B_1 wird von dieser die Bewegung auf die Hunderterwelle B_2 u. s. f. übertragen. Alle diese Wellen tragen Scheiben mit den im Umkreise darauf verzeichneten Zahlen 0, 1, 2, 3; 4, 5, 6, 7, 8, 9, die in dieser Reihenfolge nach je $^1/_{10}$ Umdrehung der betreffenden Scheiben unter entsprechende runde Ausschnitte der Deckplatte des Instrumentes vorspringen.

Um einen solchen Hubzähler als Rotationszähler zu benutzen, kann die betreffende rotirende Welle mit einem Anschlagdaumen ausgerüstet werden, der bei jeder Umdrehung ein mal durch sein Zusammentreffen mit dem Stäbchen *a* des Instrumentes dasselbe in entsprechendem Sinne dreht entgegen der Wirkung einer Feder, durch welche demnächst das Stäbchen in seine vorige Lage zurückgeschnellt wird bis zum folgenden Anschlage des Daumens u. s. f.

Dergleichen Hub- und Rotationszähler werden übrigens in mehrfach modificirten Anordnungen, insbesondere z. B. von Schäffer und Budenberg verfertigt. Unter Anderem ist dabei wohl eine sogenannte Nullstellung, d. h. ein Mechanismus hinzugefügt, wodurch eine schnelle Zurückführung aller Zifferscheiben in die Stellung ermöglicht wird, bei welcher hinter jedem Schauloche der Deckplatte die Ziffer 0 steht. Weitere Abänderungen des oben beschriebenen Instrumentes bestehen darin, dass die Sperrung durch Federn bewirkt wird und dass die Drehung der Einerscheibe stets nur bei der 2ten, 4ten, 6ten... einfachen Schwingung des Stäbchens und zwar um je $^1/_{10}$ Umdrehung geschieht. Indessen ist solche Nullstellung eine ziemlich überflüssige Complication, wodurch nur die Subtraction zweier Zahlen, dem Anfang und Ende der Beobachtung entsprechend, erspart wird; gegen die Verwendung von Federn ist einzuwenden, dass sie bei schneller Bewegung in Schwingungen gerathen und dadurch die Sicherheit der Sperrung, somit die Zuverlässigkeit der Zählung beeinträchtigen können.

Nach dem Vorgange von Evrard in Paris werden solche Zählwerke auch in sogenannter cylindrischer Anordnung ausgeführt, wobei 3 runde Scheiben unabhängig von einander um dieselbe Axe drehbar über einander liegen und an ihren Mantelflächen mit Theilungen (hier den Zahlen 0 bis 99 entsprechend) versehen sind. Jede Scheibe ist mit einem Klinkrade verbunden, in dessen Zahnlücken je eine Schaltklinke und eine Sperrklinke eingreift. Die erste Scheibe wird vermittels ihrer Schaltklinke durch einen mit dem betreffenden Maschinentheile verbundenen schwingenden Hebel in ruckweise Bewegung um je 0,01 Umdrehung für jede Doppelschwingung versetzt, während die Schaltklinke der zweiten Scheibe nur nach je einer vollen Umdrehung der ersten, die der dritten nach je einer vollen Umdrehung der zweiten vermittels eines Anschlagstiftes zur Wirkung kommt und dadurch der betreffenden Scheibe 0,01 Umdrehung ertheilt.

Hinsichtlich dieser und anderer Modificationen, die weniger das Princip, als die constructive Anordnung oder den speciellen Verwendungszweck betreffen, sei auf das bezügliche Capitel von Rühlmann's allgemeiner Maschinenlehre, Bd. I, verwiesen. Nur in Betreff der Verbindungsart des Zählwerkes mit dem Körper K, dessen Rotationen oder Schwingungen dadurch gezählt werden sollen, mag noch eine Bemerkung hier Platz finden. Bisher war das Gestell oder Gehäuse des Instrumentes als fest verbunden mit dem Maschinengestelle, somit als festgestellt in dem Raume vorausgesetzt, bezüglich auf welchen die Bewegung von K als relative Bewegung in Betracht kommt; unter Umständen jedoch ist das entweder gar nicht thunlich oder wenigstens ein anderes Verfahren vorzuziehen. Wenn insbesondere K um eine horizontale Axe A rotirt, so kann das Instrument wie ein Pendel an derselben Axe aufgehängt werden, so dass es, obschon nicht befestigt, doch durch die Wirkung seiner Schwere in unveränderlicher Lage gegen eine durch A gehende verticale Ebene V bleibt, worauf es allein ankommt, um die Rotationen des Körpers K gegen dieselbe Ebene V zu zählen; eine solche Anordnung des Instrumentes kann namentlich dann am Platze sein, wenn die Rotationsaxe A ihren Ort beständig ändert, z. B. als Axe eines rollenden Rades K, dessen Umdrehungen gezählt werden sollen. Ebenso kann verfahren werden, wenn der Körper K um eine horizontale Axe A nicht rotirt, sondern zwischen Grenzlagen schwingt. Weil es übrigens in beiden Fällen nur auf die relative Bewegung einer durch die Gerade A gehenden Ebene von K gegen die durch A gehende verticale Ebene V ankommt, kann ebenso gut auch umgekehrt das Gehäuse des Zählwerkes fest mit K verbunden und an seiner Axe ein besonderes Pendel relativ drehbar um A aufgehängt werden, dessen Schwere in

Verbindung mit hinlänglich grosser Entfernung seines Schwerpunktes von der Geraden A ihm eine fast unveränderliche Lage gegen die Ebene V sichert.

Handelt es sich um solche schwingende Bewegungen eines Körpers K, bei welchen die Geschwindigkeit gegen eine Grenzlage hin nicht allmählig bis Null abnimmt, sondern stossweise plötzlich verloren geht, so kann statt der Schwerkraft die Trägheitskraft eines hinlänglich massenhaften um eine bezüglich auf K feste Axe A' drehbaren Hebels H benutzt werden, um ihn nach jeder Doppelschwingung des Körpers K gegen das fest mit letzterem verbundene Zählwerk in entsprechende relative Bewegung zu versetzen, falls nur der Axe A' und dem Massenmittelpunkte M des Hebels H solche Lagen gegeben werden, dass die durch A' und M gehende Ebene möglichst rechtwinklig gegen die am Ende der Schwingung stattfindende und plötzlich verloren gehende Geschwindigkeit des Körpers K gerichtet ist. Ist dann nämlich der Drehungswinkel von H um A' durch zwei Anschläge a_1 und a_2 passend begrenzt (entsprechend der Forderung, dass jeweils durch solche Drehung eine mit dem Hebel verbundene Schaltklinke nur über einen Zahn des betreffenden Klinkrades hinweg bewegt werden soll), und wird der Hebel H durch eine Feder gegen einen dieser Anschläge, etwa gegen a_1 für gewöhnlich angedrückt, so wird stets am Ende der im Sinne $a_1 a_2$ stattfindenden einfachen Schwingung von K der Hebel sich durch sein Beharrungsvermögen (durch seine lebendige Kraft im Moment der Bewegungsumkehr von K) von a_1 gegen a_2 hin entfernen, um dann durch die Feder gegen a_1 hin zurückgeschnellt zu werden und so durch entsprechende Wirkung eines Schaltgetriebes die betreffende Doppelschwingung des Körpers K zu registriren. Anwendung hat dieses Princip besonders bei dem wie eine Uhr in der Westentasche zu tragenden, mehrfach nachgebildeten Schrittzähler des Engländers Payne gefunden, wobei der schwingende Körper K der menschliche Körper, dessen Schwerpunkt nämlich in auf- und niedergehender Bewegung begriffen ist und jeweils zu Ende eines Schrittes durch das Aufsetzen des Fusses ein Stoss in verticaler Richtung stattfindet; das Instrument ist deshalb so zu tragen, dass die Ebene $A'M$ horizontal ist und der Anschlag a_1 über, a_2 unter dem Hebel H liegt, der durch eine Feder von unten her gegen a_1 gedrückt wird. Auch über die Einrichtung dieses Schrittzählers giebt Rühlmann's allgemeine Maschinenlehre a. a. O. weitere Auskunft.

§. 131. Instrumente zur Ausführung der arithmetischen Grundoperationen.

Von den sogenannten vier Species, den Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens, werden die zwei letzteren rechnungsmässig mit Hülfe der Logarithmen auf die zwei ersteren zurückgeführt gemäss den Gleichungen:

$$lg(ab) = lg\,a + lg\,b, \quad lg\frac{a}{b} = lg\,a - lg\,b.$$

Es lag nahe und ist in der That fast gleichzeitig mit dem Gebrauch der Logarithmen überhaupt in Anwendung gekommen, jene mit Hülfe logarithmischer Tabellen auszuführenden Rechnungsoperationen durch graphische Operationen mit Hülfe logarithmisch getheilter Maassstäbe zu ersetzen. Werden auf einem solchen die Logarithmen von a und b als ihnen proportionale Strecken mit dem Zirkel abgegriffen, so ergeben sich durch additive oder subtractive Zusammensetzung dieser Strecken solche, die den Logarithmen von ab bezw. von $\frac{a}{b}$ nach demselben Verhältnisse proportional sind und somit nur wieder auf dem betreffenden logarithmischen Maassstabe mit dem Zirkel abgegriffen zu werden brauchen, um ab bezw. $\frac{a}{b}$ selbst zu finden.

Erleichtert und verbessert wurde dieses Verfahren durch den bekannten und vielfach in Gebrauch gekommenen Rechenschieber, welchem als einer durch prismatische Paarung hergestellten Verbindung von zwei gleich getheilten logarithmischen Maassstäben erst eigentlich die Bezeichnung als Recheninstrument zukommt; die relative Verschiebung dieser Maassstäbe gestattet die Bildung von $lg\,a + lg\,b$ oder $lg\,a - lg\,b$, sowie die Ablesung der Werthe von ab oder $\frac{a}{b}$ ohne Hülfe eines Zirkels.

Indem die Genauigkeit der Theilung und Ablesung natürlich mit der Länge der Skala wächst, die Länge eines Rechenschiebers aber ohne Beeinträchtigung seiner Handlichkeit, sowie aus praktischen Gründen eine gewisse mässige Grösse nicht wohl überschreiten darf, ist später der Vorschlag gemacht und ausgeführt worden, die geraden durch kreisförmige Skalen, somit das Lineal des Rechenschiebers durch eine Kreisscheibe, den Schieber durch einen die Scheibe umgebenden und um ihn drehbaren Ring zu ersetzen, während beide an ihren einander zugekehrten Umfängen mit gleichen logarithmischen Skalen versehen sind. Weil indessen diese Anordnung mit dem gewöhnlichen Rechenschieber die Uebelstände gemein

hat, die darauf beruhen, dass die als Träger der beiden Skalen gepaarten zwei Bestandtheile des Instrumentes den Einflüssen der Luft-Temperatur und Feuchtigkeit und zwar im Allgemeinen beide auf verschiedene Weise und in verschiedenem Grade unterworfen sind, und weil zudem bei der Rechenscheibe mit Ringschieber selbst die Vortheile nicht auf einfache Weise erreichbar sind, die der gerade Rechenschieber durch verschiedene Skalen auf den entgegengesetzten Seiten des Schiebers behufs gewisser anderer oft vorkommender Rechnungsoperationen (insbesondere z. B. zum Wurzelausziehen) darbietet, hat Prof. Herrmann der Rechenscheibe eine solche Einrichtung gegeben, dass dabei die Rechnung mit nur einer Skala nach dem oben angeführten ursprünglichen Princip des Zirkelrechnens vorgenommen wird. Nur ist hier die Skala kreisförmig und der Zirkel mit ihr zu einem Instrumente verbunden, indem er durch zwei radiale Nadeln (Zeiger) ersetzt wird, die unabhängig von einander relativ gegen die Scheibe um ihre Axe drehbar sind.

Specieller hat dieser sogenannte Rechenknecht von Herrmann folgende Einrichtung.* Die aus Metall verfertigte Kreisscheibe ist um einen centralen verticalen Zapfen drehbar, der von einem Stativ getragen wird, während von den zwei vorgenannten radialen Nadeln die eine, der sogenannte Steg S, mit dem Zapfen und folglich mit dem Stativ fest verbunden ist. Die andere Nadel, der sogenannte Läufer L, ist unabhängig von der Scheibe um die verticale Zapfenaxe drehbar. An ihrer oberen Fläche und nahe dem Rande ist auf der Scheibe die kreisförmige Hauptskala von 145 Millim. Durchmesser, also etwa 455 Millim. Umfang angebracht, enthaltend als proportionale Bogenlängen die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10, nämlich der um je

	0,01	0,02	0,05
wachsenden Zahlen	1 bis 3,	3 bis 6,	6 bis 10.

Die Anzahl der wirklich angebrachten Skalentheile ist hiernach

$$= 2 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 430,$$

ein Skalentheil folglich im Mittel

$$= \frac{455}{430} = 1{,}058 \text{ Millimeter.}$$

Was die hiernach erreichbare Genauigkeit der Ablesung einer Zahl z betrifft, so ist anzunehmen, dass im Mittel etwa $^1/_5$ Skalentheil (stark $^1/_5$ Millim.) noch mit Sicherheit geschätzt werden kann, entsprechend

$$\frac{1}{5 \cdot 430} = \frac{1}{2150} = 0{,}000465$$

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1877, S. 456 mit Tafel XXIII.

der ganzen Skalenlänge $= lg\,10 = 1$. Ebenso gross $= 0{,}000465$ ist also höchstens die Genauigkeit der Ablesung eines Logarithmus auf der Skala, und indem ein solcher additiver oder subtractiver Fehler λ von $lg\,z$ einer fehlerhaften Multiplication der Zahl z mit $1 + \zeta$ entspricht, so dass

$$lg\,[z\,(1 + \zeta)] = lg\,z + lg\,(1 + \zeta) = lg\,z + \lambda,$$

folglich

$$\lambda = lg\,(1 + \zeta)$$

ist, muss auf einen Fehler der Zahl z selbst von wenigstens

$$\begin{aligned} \zeta z &= (num\ lg\,\lambda - 1)\,z \\ &= (num\ lg\,0{,}000465 - 1)\,z = 0{,}001\,z \end{aligned}$$

gerechnet werden.

Die Art, wie mit Hülfe dieses Instrumentes multiplicirt oder dividirt werden kann, ergiebt sich daraus, wie mit seiner Hülfe der Werth des Ausdruckes $\frac{ab}{c}$ zu ermitteln ist, in welchem nur $c = 1$ oder $b = 1$ gesetzt zu werden braucht, um ihn in das Product ab oder in den Quotient $\frac{a}{c}$ übergehen zu lassen. Jener Ausdruck wird aber berechnet, indem durch Drehung der Scheibe der Steg S auf $lg\,a$ (auf der Skala mit a bezeichnet) eingestellt wird, dann der Läufer L zuerst durch seine eigene Drehung auf $lg\,c$ und schliesslich durch Drehung der Scheibe auf $lg\,b$ eingestellt wird; der Steg steht dann auf $lg\frac{ab}{c}$ und lässt somit $\frac{ab}{c}$ ablesen. In der That erhält man nach der Einstellung von S auf $lg\,a$ und von L auf $lg\,c$ zwischen S und L einen Bogen der Skala $= lg\,a - lg\,c = lg\frac{a}{c}$, so dass, wenn jetzt ohne Aenderung dieses Winkels zwischen S und L durch Drehung der Scheibe der Läufer L auf $lg\,b$ eingestellt wird, zwischen S und dem mit 1 bezeichneten Anfange der Skalentheilung ($lg\,1 = 0$) sich ein Bogen

$$= lg\,b + lg\frac{a}{c} = lg\frac{ab}{c}$$

befindet. Dabei ist vorausgesetzt, dass a, b und c zwischen 1 und 10 enthalten sind, was durch Absonderung ganzer positiver oder negativer Potenzen von 10 herbeizuführen und mit Rücksicht worauf schliesslich im Resultat nur das Komma entsprechend zu versetzen ist.

Innerhalb der besprochenen ersten oder Hauptskala, die nach den Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 getheilt und mit diesen Zahlen selbst bezeichnet ist, enthält die Scheibe von Herrmann's Rechenknecht noch 9 andere, nach ihrer Wichtigkeit für den technischen Gebrauch successive

kleiner werdende, zu jener concentrische Kreisskalen, zunächst von aussen nach innen gerechnet eine zweite mit den Quadraten und eine dritte mit den Cuben der Zahlen 1 bis 10 der Art, dass jeder Zahl n der ersten (äussersten) Skala auf demselben Radius (zu markiren durch eine der Nadeln S, L) der Zahlenwerth von n^2 in der zweiten, sowie von n^3 in der dritten Skala entspricht. Umgekehrt erhält man dann natürlich $n^{\frac{1}{2}}$ bezw. $n^{\frac{1}{3}}$ aus der ersten Skala durch Einstellen einer Nadel auf die Zahl n in der zweiten bezw. dritten Skala. Auch entspricht der Zahl n in der zweiten Skala $n^{\frac{3}{2}}$ in der dritten, der Zahl n in der dritten $n^{\frac{2}{3}}$ in der zweiten.

Aus dem Umstande, dass die Logarithmen von n^2 und n^3 den Logarithmen von n proportional, dass also auch die zweite und dritte Skala logarithmisch getheilt sind wie die erste, ergiebt sich leicht, wie diese drei Skalen dazu dienen können, Ausdrücke von der Form

$$\frac{a^\alpha b^\beta}{c^\gamma}$$

durch dasselbe Verfahren direct, d. h. ohne vorherige Ermittelung von a^α, b^β und c^γ zu berechnen, nach welchem $\frac{ab}{c}$ mit Hülfe der ersten Skala allein berechnet wird, sofern nur die Exponenten α, β, γ die Werthe $1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ haben und dabei so beschaffen sind, dass sie als Brüche geschrieben werden können, deren Zähler und Nenner $= 1, 2$ oder 3, die Zähler aber ausserdem einander gleich sind. Indem dann nämlich, unter p, q, r, z je eine der Zahlen 1, 2, 3 verstanden, jener Ausdruck

$$\frac{a^\alpha b^\beta}{c^\gamma} = \frac{a^{\frac{z}{p}} b^{\frac{z}{q}}}{c^{\frac{z}{r}}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}}{c^{\frac{1}{r}}}\right)^z$$

ist, $a^{\frac{1}{p}}$, $b^{\frac{1}{q}}$, $c^{\frac{1}{r}}$ aber die Zahlen der ersten Skala sind, welche bezw. den Zahlen a, b, c in der $p$ten, $q$ten, $r$ten Skala entsprechen, desgleichen n^z aus der $z$ten Skala entsprechend der Zahl n in der ersten gefunden wird, ergiebt sich die Regel, dass

$$\frac{a^{\frac{z}{p}} b^{\frac{z}{q}}}{c^{\frac{z}{r}}}$$

ebenso wie $\frac{ab}{c}$ berechnet werden kann, indem nur jede der Zahlen a, b, c bei der Einstellung einer Nadel auf dieselbe in derjenigen Skala zu nehmen

ist, welche durch den Nenner ihres Exponenten angezeigt wird, wonach das Resultat in der durch den gemeinschaftlichen Zähler angezeigten Skala abzulesen ist.

Die einwärts weiter folgenden 7 Kreisskalen gestatten die unmittelbare Ablesung von πn, $\frac{\pi}{4}n^2$, $lg\ n$, $arc\ sin\ \frac{n}{10}$, $arc\ sin\ \frac{n}{100}$, $arc\ tg\ n$ und $arc\ tg\ \frac{n}{10}$ (diese 4 Winkel in Graden und Minuten ausgedrückt) entsprechend auf einerlei Radius den Werthen von n der Hauptskala; die Genauigkeit solcher Ablesung nimmt natürlich proportional dem Radius der betreffenden Skala ab. —

Von wesentlich anderer Art, als diese Rechenschieber und Rechenzirkel mit logarithmischen Theilungen, sind solche Recheninstrumente, welche als zusammengesetzte Zählwerke bezeichnet werden können, indem sie lediglich durch kinematische Hülfsmittel, durch Zahnräder und Schaltgetriebe, die auf dem Bildungsgesetze der Zahlen beruhenden hier in Rede stehenden 4 arithmetischen Grundoperationen auszuführen gestatten, von denen das Addiren unmittelbar als ein Zählen (Zusammenzählen), das Multipliciren als Addiren gleicher Summanden sich darstellt, das Subtrahiren und Dividiren als Umkehrung bezw. des Addirens und Multiplicirens. Das am meisten ausgebildete und in Gebrauch gekommene solche Recheninstrument ist das Arithmometer von Thomas, in Frankreich patentirt 1820, in Deutschland allgemeiner bekannt geworden erst seit Reuleaux's betreffender Schrift vom Jahre 1862.*

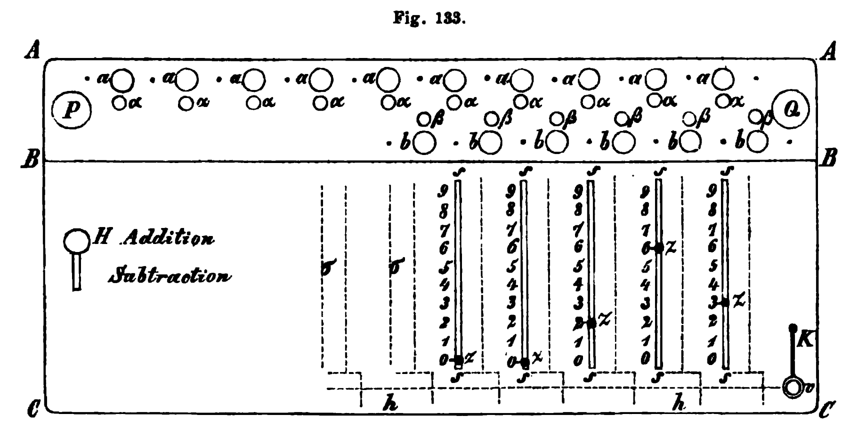
Der Mechanismus dieses Instrumentes ist in einem handlichen parallelepipedischen Kasten enthalten, der nach Aufklappung des Deckels eine feste Deckplatte *BBCC*, Fig. 133, nebst einer beweglichen Platte *AABB* zeigt; letztere, das sogenannte Zifferlineal, kann durch Anfassen des Knopfes *P* um eine längs der Kante *AA* hin laufende Axe aufwärts gedreht und in diesem gehobenen Zustande längs der Axe rechts hin verschoben werden. In ihm sind in gleichen Entfernungen von einander die Axen α der Zifferscheiben drehbar, deren Anzahl, hier beispielsweise $= 10$, doppelt so gross ist wie die Anzahl der Schlitze *ss*, die sich parallel neben einander in der festen Deckplatte *BBCC* befinden in denselben Entfernungen wie die Axen α im Zifferlineal. Letztere endigen oben mit Knöpfen, vermittels welcher sie, wenn das Lineal gehoben ist, von Hand gedreht werden

* Die Thomas'sche Rechenmaschine. Von F. Reuleaux. Separatabdruck aus dem „Civilingenieur“, Bd. VIII, Heft 3.



können; die auf den Zifferscheiben angebrachten 10 Ziffern 1, 2, 3 ... 9, 0 werden dabei der Reihe nach unter den Schaulöchern *a* des Lineals sichtbar. Dieses kann nur in bestimmten, nämlich in solchen Lagen niedergeklappt werden, in welchen ein an ihm angebrachter Riegel in einen der entsprechenden Einschnitte eingreift, mit welchen die Scheidewand *BB* zwischen den unter *AABB* und *BBCC* befindlichen Kastenabtheilungen in Abständen $= \alpha\alpha$ versehen ist; in diesen Lagen befinden sich in den Verlängerungen der Schlitze *ss*, deren im Allgemeinen *n* vorhanden sein mögen, *n* Axen α und Schaulöcher *a* des Lineals und zwar die *n* äussersten

Fig. 133.



linker Hand, wenn das Lineal sich in seiner äussersten Lage rechts befindet.

Unter jedem der Schlitze *ss* ist im Kasten eine vierkantige Welle σ gelagert, die sich auch in die Kastenabtheilung *AABB* hinein erstreckt und hier eine auf ihr verschiebliche Hülse trägt als gemeinsame Nabe von zwei gleichen verzahnten Kegelrädchen k_1 und k_2. Vermittels einer Schiene, die unter allen diesen Hülsen zwischen ringförmigen Vorsprüngen derselben entlang geführt ist, können sie dadurch, dass die Handhabe *H* eines Hebels auf Addition oder Subtraction (Fig. 133) gestellt wird, alle gleichzeitig gegen *AA* oder gegen *BB* hin bewegt und können so verzahnte Kegelrädchen *k*, die unten auf den Axen α fest sitzen, bei niedergelegtem Lineal entweder alle mit den Rädchen k_1 oder an diametral gegenüber liegenden Stellen alle mit den Rädchen k_2 in Eingriff gebracht werden. Jenachdem das eine oder das andere der Fall, nämlich *H* auf Addition oder Subtraction gestellt ist, hat die stets nur in einem bestimmten Sinne stattfindende Drehung einer der Wellen σ entweder durch die Räder k_1, *k* eine solche

Drehung der betreffenden Zifferscheibe zur Folge, bei welcher ihre Ziffern in der Reihenfolge 1, 2, 3 ... unter dem zugehörigen Schauloche erscheinen, oder vermittels der Räder k_2, k eine Drehung im umgekehrten Sinne; wegen gleicher Grösse aller Rädchen k, k_1, k_2 sind dabei in beiden Fällen die Drehungswinkel von α und σ gleich gross.

In der Kastenabtheilung $BBCC$ tragen die vierkantigen Wellen σ zehnzähnige Rädchen r, die mit ihren innen entsprechend vierkantigen Naben längs diesen Wellen durch je ein Stäbchen verschoben werden können, welches, durch den betreffenden Schlitz ss hindurch abwärts reichend, unten in eine Halsnuth der betreffenden Nabe eingreift und oben mit einem Knopf zum Anfassen versehen ist; ein seitwärts von letzterem hervorragender kleiner Zeiger z kann so auf irgend eine der 10 Ziffern 0, 1, 2, 3 ... 9 eingestellt werden, die längs jedem Schlitze ss auf der Deckplatte verzeichnet sind. Etwas tiefer und zur Seite von jeder Axe σ ist ferner im Kasten $BBCC$ eine theilweise verzahnte cylindrische Walze w drehbar so gelagert, dass mit ihrer Verzahnung das zu σ gehörige Rädchen r in Eingriff gebracht werden kann. Die 9 Zähne jeder solchen Schaltwalze w nehmen zusammen nur einen Theil des Walzenumfanges ein und sind von verschiedener Länge, indem sie sich von dem gegen BB hin gelegenen Walzenende aus der Reihe nach auf $^1/_{10}$, $^2/_{10}$ ... $^9/_{10}$ der Walzenlänge erstrecken der Art, dass, wenn z. B. ein Zeiger z auf die Ziffer 3 eingestellt ist, nur die 3 längsten Zähne der Walze mit dem betreffenden Rädchen r in Eingriff kommen, dieses also 0,3 Umdrehung macht bei einer ganzen Umdrehung von w. Letztere wird vermittelt durch eine Kurbel K und eine längs der Kastenwand CC angebrachte horizontale Zwischenwelle hh, die durch gleiche Kegelräder mit der verticalen Kurbelwelle v und mit allen Walzen w gepaart ist, so dass einer Umdrehung von K, die nur rechts herum geschehen kann, auch je eine Umdrehung jeder Walze w stets in einerlei Sinne entspricht. Bei der Benutzung des Instrumentes wird K mit der rechten, der Knopf P des Zifferlineals mit der linken Hand des Rechners angefasst, nachdem die Handhabe H je nach Bedürfniss auf Addition oder Subtraction gestellt wurde.

Beispielsweise sei H auf Addition und in den drei ersten Schlitzen des Schaltwerkes die Zahl 263 eingestellt, d. h. es sei (bei Numerirung gleichartiger Theile des Instrumentes immer von rechts nach links) der erste Zeiger z auf 3, der zweite auf 6, der dritte auf 2 gestellt, während die übrigen auf 0 weisen, wie Fig. 133 andeutet. Aus der bisherigen Erklärung des Mechanismus folgt dann ohne Weiteres, dass, wie auch das Zifferlineal niedergelegt sein mag, eine Umdrehung der Kurbel K be-



ziehungsweise $^{3}/_{10}$, $^{6}/_{10}$ und $^{2}/_{10}$ Umdrehung der Zifferscheiben zur Folge hat, deren Axen σ in den Verlängerungen des ersten, zweiten und dritten Schlitzes *ss* liegen, und zwar rechtläufig, so dass, wenn unter den betreffenden Schaulöchern *a* vorher 0 stand, jetzt unter ihnen von rechts nach links gerechnet die Ziffern 3, 6, 2 sichtbar geworden sind, somit die im Schaltwerke eingestellte Zahl 263 zum Lineal hinauf gebracht worden ist. Eine abermalige Umdrehung von *K* bewirkt ebenso grosse Drehungen der betreffenden Zifferscheiben wie vorher; unter den Schaulöchern erscheint also die Zahl 426. Dem Zwecke des Instrumentes gemäss soll aber bei der Stellung von *H* auf Addition jede Umdrehung von *K* die Addition der im Schaltwerke eingestellten Zahl zu der am Lineal schon befindlich gewesenen bewirken, letztere müsste also im vorliegenden Falle durch die zweite Kurbelumdrehung nicht in 426, sondern in 526 übergehen. Daraus ist ersichtlich, dass, um das Instrument zur Addition oder Subtraction beliebiger Zahlen geeignet zu machen, der Mechanismus noch durch eine Zehnerübertragung, d. h. durch eine Vorrichtung ergänzt werden musste, welche bewirkt, dass jeder Uebergang der Ziffer 9 in die Ziffer 0 unter einem Schauloche *a* eine rechtläufige Zehnteldrehung der links benachbarten Zifferscheibe zur Folge hat, also (bei der Stellung von *H* auf Subtraction) jeder Uebergang der Ziffer 0 in die Ziffer 9 eine umgekehrte Zehnteldrehung der links folgenden Zifferscheibe.

Zu diesem Zwecke sitzt auf jeder Axe σ (ausser der ersten) dicht bei der Scheidewand *BB* beider Kastenabtheilungen ein zehnzähniges Rädchen r' fest, das dem auf σ verschieblichen Rädchen *r* gleich ist und in welches ein einzelner Zahn s' (Zehnerschaltzahn) eingreifen kann, welcher mit der zur Axe σ gehörigen Schaltwalze *w* rotirt, im Allgemeinen aber an dem Rädchen r' vorbeigeht, ausser wenn eine auf der vierkantigen Welle von *w* verschiebliche Hülse, mit welcher s' durch einen Arm verbunden ist, entsprechend gegen die Wand *BB* hin verschoben wird. Die Verschiebung erfolgt, wenn (bei Stellung von *H* auf Addition) die rechts benachbarte Zifferscheibe von 9 zu 0 unter dem Schauloche übergeht, und zwar durch den Druck einer an betreffender Stelle (dem Zwischenraume zwischen den Ziffern 9 und 0 diametral gegenüber) von der Zifferscheibe nach unten vorstehenden Nase gegen einen Hebel; die dadurch einstweilen nur vorbereitete Zehnerübertragung, unmittelbar nach welcher die den Zahn s' tragende Hülse mit einer schrägen Ansatzfläche gegen einen an der Wand *BB* festen Stift stösst und dadurch in die frühere Stellung längs der Welle von *w* zurückgeschoben wird, erfolgt indessen thatsächlich nicht früher, als bis die sämmtlichen Zähne der zu s' gehörigen Schaltwalze *w* ihre Eingriff-



stelle mit dem Rädchen r passirt haben, indem s' gegen diese Zähne, dem letzten derselben um eine Zahntheilung nachfolgend, versetzt ist, damit die Zehnerübertragung durch diejenige Drehung der betreffenden um $^1/_{10}$ zu drehenden Zifferscheibe nicht gestört werde, welche ohne sie durch den Eingriff des zu ihr gehörigen Rädchens r in die Verzahnung der entsprechenden Schaltwalze w vermittelt wird. Aus demselben Grunde sind auch die Verzahnungen und die Zehnerschaltzähne s' der verschiedenen auf einander folgenden Schaltwalzen so um je eine Zahntheilung gegen einander versetzt, dass die Zehnerübertragung von der ersten zur zweiten Stelle vollendet ist, bevor sie von dieser zur dritten Stelle erfolgt, wonach dann erst eine etwa weitere von der dritten zur vierten Stelle zum Vollzug kommt u. s. f., was auch der Grund ist, weshalb die Verzahnung jeder Schaltwalze nur einen Theil ihres Umfanges einnehmen durfte. Um endlich auch von der $n$ten Stelle (dem linker Hand letzten Schlitze ss entsprechend) auf die $(n+1)$te, von dieser auf die $(n+2)$te Stelle die Zehnerübertragung zu ermöglichen, sind links neben den Schlitzen, wie in Fig. 133 angedeutet ist, noch zwei weitere Axen σ mit entsprechenden Walzen w und den übrigen zugehörigen Theilen angeordnet.

Hiernach ist klar, wie das Instrument zur Addition beliebig vieler höchstens $n$ziffriger Zahlen dienen kann, so lange ihre Summe nicht grösser ist, als die grösste $(n+2)$ziffrige, nämlich als die aus $n+2$ Ziffern 9 bestehende Zahl $= 10^{n+2} - 1$; es ist nur nöthig, nachdem vorher H auf Addition und alle Zifferscheiben auf 0 gestellt wurden, die Summanden nach und nach im Schaltwerke vermittels der Zeiger z einzustellen und einzeln durch Umdrehung von K nach dem Lineal hinauf zu schalten, um hier an dem unterdessen unverändert liegen bleibenden Lineal schliesslich die Summe abzulesen. Ebenso ergiebt sich nun leicht, wie behufs der Multiplication zu verfahren ist. So wird z. B. eine Zahl mit 835 multiplicirt, indem sie im Schaltwerke eingestellt wird und dann, während H auf Addition steht, analog dem gewöhnlichen Rechnungsverfahren auf dem Papier die Kurbel K zunächst 5 mal, darauf nach Verlegung des Lineals um eine Stelle nach rechts 3 mal und endlich nach abermaliger Verlegung des Lineals um eine Stelle nach rechts noch 8 mal gedreht wird; das Product erscheint unter den Schaulöchern, falls sie vorher alle auf 0 gestellt waren. Welcher der beiden Factoren im Schaltwerke eingestellt wird, ist für das Resultat natürlich gleichgültig; um es möglichst schnell zu erhalten, ist aber natürlich die grössere oder auch diejenige Zahl einzustellen, deren Quersumme (= der Anzahl nöthiger Kurbelumdrehungen bei Einstellung der anderen Zahl) die grössere ist, abgesehen von gewissen Abkürzungen,

die bei einiger Uebung sich leicht darbieten. Sollte z. B. eine Zahl mit 998 multiplicirt werden, so könnte es bequemer sein, sie selbst, obschon sie kleiner als 998 oder ihre Quersumme kleiner als $9+9+8=26$ sein mag, im Schaltwerke einzustellen, dann aber von vorn herein das Lineal um drei Stellen nach rechts zu verlegen, einmal die Kurbel umzudrehen, das Lineal um drei Stellen nach links, also in die ursprüngliche Lage zurück zu verlegen und nach Umstellung von H auf Subtraction die Kurbel K noch zweimal zu drehen; offenbar entspräche dieses Verfahren der Multiplication mit

$$1000-2=998,$$

erforderte aber bei derselben Zahl von Linealverlegungen nur 3 statt 26 Kurbelumdrehungen.

Die Vollziehung einer Subtraction bedarf nach dem Vorhergehenden keiner weiteren Erklärung. Die Division aber ist eine wiederholte Subtraction des Divisors vom Dividenden, an nach und nach erniedrigten Stellen des letzteren ausgeführt, wobei die Anzahlen der an den einzelnen Stellen möglichen höchstens 9 Subtractionen sich als auf einander folgende Ziffern des Quotienten ergeben. Das Verfahren der Division mit dem Arithmometer ist hiernach folgendes. Nachdem H zunächst auf Addition und die Zifferscheiben des Lineals auf 0 gestellt sind, wird letzteres so weit wie möglich nach rechts verlegt und der Dividend im Schaltwerke möglichst weit links mit den Zeigern z eingestellt, um durch einmalige Drehung der Kurbel zum Lineal hinauf geschaltet zu werden; hat der Dividend mehr als n Ziffern (bei n Schlitzen ss), so ist er entweder in zwei Theilen (Ziffergruppen), der zweite Theil nach entsprechender Verlegung des Lineals, hinauf zu schalten oder es können auch die überschüssigen Ziffern in dem aufgehobenen Lineal von Hand vermittels der Knöpfchen α eingestellt werden. Ist so der Dividend vollständig in dem ganz nach rechts verlegten Lineal enthalten, so wird H auf Subtraction und der Divisor im Schaltwerke möglichst weit links, jedoch so eingestellt, dass er die darüber stehenden höchsten Ziffern des Dividenden nicht übertrifft, was nöthigen Falles, wenn der Divisor n ziffrig ist, durch Verlegung des Lineals um eine Stelle nach links herbeigeführt werden kann. Jetzt wird die Kurbel K und zwar so oft $= m$ mal umgedreht, bis die über dem Divisor stehende restirende Zahl kleiner geworden ist, als jener, dann nach Verlegung des Lineals um eine Stelle nach links abermals so oft $= n$ mal, bis wieder der Divisor nicht mehr abgezogen werden kann u. s. f. Die so sich ergebenden auf einander folgenden Ziffern m, n ... des Quotienten werden durch ein besonderes Zählwerk registrirt, dessen Zifferscheiben mit ihren

Axen β (Fig. 133) im Lineal drehbar sind und vermittels entsprechender Knöpfchen an ihren oberen Enden vorher so gestellt wurden, dass unter jedem zugehörigen Schauloche *b* die Ziffer 0 erschien. Von diesen Quotientenzifferscheiben wird stets nur die dem ersten Schlitze *ss* rechter Hand nächstliegende von der ersten Schaltwalze *w* aus bewegt und zwar um je $^1/_{10}$ Umdrehung im Sinne der Ziffernfolge 0, 1, 2 ··· unter dem betreffenden Schauloche *b* für jede Umdrehung von *K*.

Das Rechnen mit Decimalbrüchen unterscheidet sich bei Benutzung des Instrumentes ebenso wenig wie sonst vom Rechnen mit ganzen Zahlen, falls nur der durch das Komma angezeigte Stellenwerth der Ziffern gehörig beachtet wird. Zur Erleichterung in dieser Hinsicht dienen kleine Stöpsel, welche einem Decimalkomma entsprechend in kleine Löcher (in Fig. 133 durch Punkte angedeutet) eingesteckt werden können, die sich im Lineal neben den Schaulöchern *a* und *b* befinden.

In Betreff des Mechanismus ist noch der sogenannte Auslöscher bemerkenswerth, der dazu dient, alle 2*n* Hauptzifferscheiben schnell und zusammen auf 0 zu stellen; es ist dazu nur nöthig, bei aufgehobenem Lineal den geränderten Knopf *Q* (Fig. 133) mit seiner im Lineal drehbaren Axe zwischen den Fingern rechts herum zu drehen entgegen dem Widerstande einer Spiralfeder, die ihn danach von selbst in die Anfangslage zurück dreht. Bei jener Rechtsdrehung des Knopfes *Q* wird nämlich durch den Eingriff eines auf seiner Axe sitzenden Zahnrädchens in eine unter dem Zifferlineal entlang laufende Zahnstange letztere nach rechts und dadurch gleichzeitig vermittels entsprechender Schrägführung gegen die Axen α der Zifferscheiben hin bewegt. Durch letztere Bewegung kommt die Zahnstange mit zehnzähnigen Zahnrädchen in Eingriff, die dicht über den Kegelrädchen *k* auf den Axen α fest sitzen, von denen aber jedes durch Weglassung des der Ziffer 0 der zugehörigen Zifferscheibe entsprechenden Zahnes an dieser Stelle eine verbreiterte Lücke hat. Nach hergestelltem Eingriffe werden diese Rädchen und somit die Zifferscheiben durch die Längsbewegung der Zahnstange umgedreht, bis derselben jene verbreiterten Zahnlücken zugekehrt sind und damit der Eingriff unterbrochen ist. Für die Quotientenzifferscheiben ist ein solcher Auslöscher weniger Bedürfniss.

Eine weitere, aber nicht überflüssige Complication des Mechanismus wird durch verschiedene Hemmungen verursacht, die dazu dienen, die Zifferscheiben, die Axen σ und die Zeiger *z* in bestimmten Lagen so lange sicher zu erhalten, bis sie dieselben gemäss der jeweils auszuführenden Operation zwangläufig verlassen sollen. Bei den Zifferscheiben und den



Zeigern z dienen dazu leichte Federhemmungen, bei den Axen σ aber Sternradgesperre. Auf diesen Axen σ sitzen nämlich Sternräder mit je 10 kreisbogenförmigen Ausschnitten (nach Art des Rades a' in Fig. 74, §. 59, ohne die daselbst angegebenen Zahnlücken), in welche mit den Walzen w rotirende entsprechende Sperrscheiben eingreifen, die jedoch den verzahnten Umfangstheilen dieser Walzen entsprechende Einziehungen (auf kleineren Radius) haben, so dass die betreffende Sperrung gerade so lange aufgehoben ist, als die Zähne der Walze w in das zugehörige Rädchen r eingreifen können, nämlich bei Stellung seines Zeigers z auf 9 thatsächlich eingreifen. Indem jene mit den Walzen w rotirenden Sperrscheiben mit den früher erwähnten Hülsen fest verbunden sind, welche an Armen die Zehnerschaltzähne z' tragen, muss ihre Dicke diejenige der Sternräder um den Betrag übertreffen, um welchen die Hülsen bei Vorbereitung der Zehnerübertragung längs den Axen der Walzen w verschoben werden, und ist zugleich an den Stellen, die dann den Sternrädern gegenüber liegen, ihre Einziehung noch längs einer Zahntheilung weiter ausgedehnt, um auch während der Zehnerübertragung die Sperrung aufgehoben zu erhalten. —

Schliesslich mag darauf hingewiesen werden, dass die volle Ausnutzung der Vortheile, welche das Thomas'sche Arithmometer zur Ausführung einer zusammengesetzten Rechnung darbietet, sehr wesentlich von einer geschickten Einrichtung der letzteren abhängt. Handelt es sich z. B. um die Berechnung des Werthes der ganzen algebraischen Function

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

für einen gewissen Werth von x, etwa in der Absicht, um aus den Werthen von y, die verschiedenen Werthen von x entsprechen, durch arithmetische oder graphische Interpolation auf eine reelle Wurzel der Gleichung $n$ten Grades:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

zu schliessen, so würde es sich nicht empfehlen, die einzelnen Potenzen von x durch wiederholte Multiplication von x mit x, x^2 mit x u. s. f. zu berechnen, indem dann zur Berechnung von y ausser n Additionen nicht weniger als $2n-1$ Multiplicationen erforderlich wären. Mit Hülfe von Tafeln, denen die Werthe von x^2, $x^3 \cdots x^n$ entnommen werden können, würden zwar ausser den n Additionen nur noch n Multiplicationen auszuführen sein, allein das $(n-1)$malige Aufschlagen der Tafeln wäre mit nicht unerheblichem Zeitverlust verbunden, abgesehen davon, dass auch nur solche Tafeln von genügender Ausdehnung zur Verfügung zu sein pflegen,

welchen die Werthe von x^2 und x^3 unmittelbar entnommen werden können. Geschickter ist es,

$$y = \left\{ \cdots \left[(a_0 x + a_1) x + a_2 \right] x + \cdots + a_{n-1} \right\} x + a_n$$

zu setzen und dann der Reihe nach

$$a_0 x + a_1 = b_1$$
$$b_1 x + a_2 = b_2$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} x + a_n = b_n = y$$

zu berechnen, wozu auch nur n Additionen und n Multiplicationen, aber ohne Hülfstafeln erfordert werden.

§. 132. Instrumente zur Berechnung von Functionen und zur Auflösung von Gleichungen.

Die mechanische Berechnung einer Function $f(x)$ kann von Interesse sein entweder zur Berechnung einer Tabelle, in welcher für eine grosse Anzahl geordneter Werthe von x die entsprechenden Werthe von $f(x)$ zusammengestellt sind, oder zu möglichst schneller Bestimmung eines Werthes von x, für welchen $f(x)$ einen gegebenen Werth hat, z. B. = Null ist gemäss der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Ersteren Zweck erfüllen namentlich die berühmten Recheninstrumente von Babbage und von Scheutz. Sie beruhen auf der bekannten Berechnungsweise einer gesetzmässigen Zahlenreihe mit Hülfe der ersten Zahlen ihrer auf einander folgenden Differenzenreihen. Besonders das Instrument von Scheutz ist ein mechanisches Meisterwerk, das aber für technische Zwecke schon seiner erheblichen Kosten wegen nicht in Betracht kommen kann; auch sind zu tabellarischen Rechnungen von technischem Interesse stets die im vorigen Paragraph besprochenen Instrumente, insbesondere das Arithmometer von Thomas, völlig ausreichend in Verbindung mit Hülfstabellen, die, mögen sie selbst vermittels eines umfangreicheren Instrumentes, wie das von Scheutz, oder auf irgend eine andere Art berechnet sein, hier als gegebene Hülfsmittel zu betrachten sind.

Instrumente zur Auflösung von Gleichungen $f(x) = 0$ sind bisher nicht ausgeführt worden, obschon das Problem ihrer Herstellung wiederholt erörtert worden ist, insbesondere z. B. von E. Stamm* und von H. Wehage.**

* Essais sur l'automatique pure, eingehend besprochen in Laboulaye's Traité de Cinématique, 3. edition, p. 496.

** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1877, S. 106.

Ihre praktische Ausführung wäre indessen nicht ohne Nutzen, wenigstens zur Auflösung von häufiger vorkommenden algebraischen Gleichungen:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

unter n eine positive ganze Zahl verstanden; von den dazu gemachten Vorschlägen dürfte der von Wehage am meisten Beachtung verdienen. Er beruht auf der zu Ende des vorigen Paragraph erwähnten Berechnungsart der Function

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= \left\{ \cdots [(a_0 x + a_1) x + a_2] x + \cdots + a_{n-1} \right\} x + a_n,$$

derzufolge für das betreffende Argument x nach einander

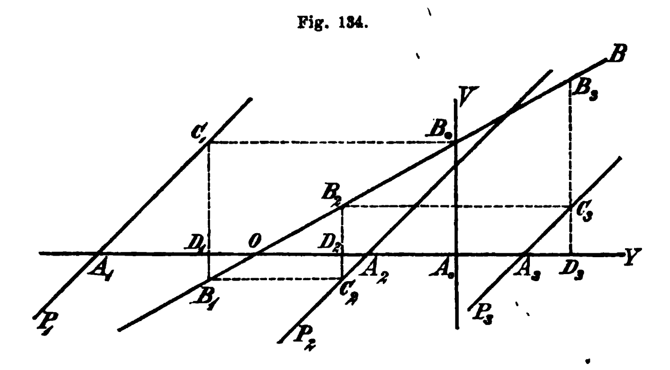
$$b_1 = a_0 x + a_1; \quad b_2 = b_1 x + a_2 \cdots$$

zu berechnen sind, um so schliesslich

$$y = b_n = b_{n-1} x + a_n$$

zu erhalten, sowie ferner darauf, dass diese Berechnungsweise leicht in ein

Fig. 134.



graphisches Verfahren zur Construction des Functionswerthes y umgewandelt werden kann. Werden nämlich (Fig. 134) auf der Geraden OY vom Punkte O aus nach irgend einem, nur für alle Fälle gleichen Maassstabe die Strecken

$$OA_0 = a_0, \quad OA_1 = a_1, \quad OA_2 = a_2, \quad OA_3 = a_3 \cdots$$

abgetragen, im Sinne OY positiv verstanden, so dass z. B. OA_1 in Fig. 134 einem negativen Werthe von a_1 entspricht, werden ferner die Gerade $A_0 V$ senkrecht zu OY, die Geraden

$$A_1 P_1, \quad A_2 P_2, \quad A_3 P_3 \cdots$$

aber parallel und unter 45° gegen OY geneigt gezogen, endlich die Gerade OB unter einem solchen spitzen Winkel φ gegen OY geneigt, dass $tg\,\varphi$

= dem Zahlenwerthe von x ist, so kann der diesem x entsprechende Werth von y wie folgt gefunden werden. Es werde, indem eine mit OY parallele Gerade horizontal und eine in der Zeichenebene dazu senkrechte Gerade vertical genannt wird, B_0C_1 horizontal, $C_1D_1B_1$ vertical, B_1C_2 horizontal, $C_2D_2B_2$ vertical, B_2C_3 horizontal, $C_3D_3B_3$ vertical gezogen u. s. f., unter

$B_0, B_1, B_2 \cdots$ Punkte in OB,
$C_1, C_2 \cdots$ „ bezw. in $A_1P_1, A_2P_2 \cdots$
$D_1, D_2 \cdots$ „ in OY

verstanden; dann ist $y = OD_n$ nach dem Maassstabe, nach welchem die Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \cdots$ den Strecken $OA_0, OA_1, OA_2 \cdots$ gleich sind. Nach der Construction ist nämlich, falls der oberhalb OY liegende spitze Winkel YOB einem positiven x entspricht und eine aufwärts gerichtete verticale Strecke positiv, also eine abwärts gerichtete negativ gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
& a_0 x = A_0B_0 = D_1C_1 = A_1D_1 \\
b_1 &= a_0 x + a_1 = OA_1 + A_1D_1 = OD_1 \\
& b_1 x = D_1B_1 = D_2C_2 = A_2D_2 \\
b_2 &= b_1 x + a_2 = OA_2 + A_2D_2 = OD_2 \\
& b_2 x = D_2B_2 = D_3C_3 = A_3D_3 \\
b_3 &= b_2 x + a_3 = OA_3 + A_3D_3 = OD_3 \\
&\vdots \\
y = b_n &= b_{n-1} x + a_n = OA_n + A_nD_n = OD_n.
\end{aligned}$$

Diese Construction gilt gleicher Weise für negative Werthe von x, entsprechend einem unterhalb OY liegenden spitzen Winkel $YOB = \varphi$ $= arc\, tg\, x$. Wegen begrenzter Ausdehnung der Zeichenebene ist sie indessen für grosse Absolutwerthe von x und somit für solche Winkel φ, die sich absolut genommen einem rechten Winkel nähern, nicht mehr ausführbar, weshalb es zweckmässig ist, diesen Winkel überhaupt nur zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ anzunehmen, entsprechend den Grenzen -1 und $+1$ von x, für grössere Absolutwerthe von x aber zu setzen:

$$x = \frac{1}{z}; \quad y z^n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

und die Werthe der Function

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

für die zwischen 0 und 1 liegenden Absolutwerthe von z nach dem obigen Verfahren zu construiren. Die zwischen -1 und $+1$ liegenden Wurzeln der Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

sind dann die reciproken Werthe der zwischen $-\infty$ und -1, $+1$ und $+\infty$ liegenden Wurzeln der Gleichung:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Um nun einen Mechanismus zu erhalten, welcher, die erklärte Construction bei seinen Configurationsänderungen beständig nachahmend, durch willkürliche Bewegung eines Gliedes die Functionswerthe $y = f(x)$ für stetig sich ändernde Werthe des Argumentes x auf einer Skala abzulesen gestattet, kann man sich die Constructionslinien von Fig. 134 etwa in folgender Weise als prismatische Stäbe ausgeführt und gepaart denken. OY sei ein fest liegender Maassstab, gegen welchen der Hebel OB um eine Axe O drehbar ist; die Neigungswinkel $YOB = \varphi$ oder besser die Werthe von $tg\,\varphi = x$ können an einer Kreistheilung mit dem Mittelpunkte O abgelesen werden. $A_0 V$, $A_1 P_1$, $A_2 P_2 \ldots$ seien Leitstäbe, die in Rahmen so prismatisch geführt sind, dass der Maassstab OY vom ersten $A_0 V$ rechtwinklig, von den übrigen unter Winkeln von 45^0 gekreuzt wird, während die Führungsrahmen selbst längs dem Maassstabe verschieblich sind. Zwischen seinen zwei Führungen in dem betreffenden Rahmen (kinematisch nur einem Prismenpaare entsprechend, dessen Zerlegung in zwei getrennte Theile aber die Biegung des geführten Stabes vermindert und die Sicherheit seiner Führung erhöht) ist der Leitstab $A_1 P_1$ bei C_1, $A_2 P_2$ bei $C_2 \ldots$ unter Winkeln von 45^0 mit je zwei anderen Stäben fest verbunden, von denen somit stets der eine horizontal (parallel OY), der andere vertical ist. Längs dem Hebel OB seien Hülsen oder sonstige prismatisch mit ihm gepaarte Körper B_0, B_1, $B_2 \ldots$ verschieblich, die durch Drehkörperpaare (Zapfen, deren Axen parallel mit der Hebelaxe O sind) mit anderen Hülsen H_0, H_1, $H_2 \ldots$ gepaart seien (B_0 mit H_0, B_1 mit H_1 u. s. f.); von letzteren endlich sei H_0 mit dem verticalen Leitstabe $A_0 V$ und dem bei C_1 mit $A_1 P_1$ fest verbundenen Horizontalstabe prismatisch gepaart, H_1 mit dem Verticalstabe $C_1 B_1$ und dem bei C_2 mit $A_2 P_2$ fest verbundenen Horizontalstabe u. s. f. Dabei sind die erwähnten Rahmen, Stäbe und Hülsen so in verschiedenen Ebenen liegend zu denken, dass sie sich über einander weg bewegen können. Werden nun die Rahmen (etwa mit Hülfe drehbarer Schraubenspindeln) so eingestellt, dass von den in ihnen geführten Leitstäben $A_0 V$, $A_1 P_1$, $A_2 P_2 \ldots$ der Maassstab bezw. bei den Theilstrichen A_0, A_1, $A_2 \ldots$ gekreuzt wird, welche den Coefficienten $a_0 = OA_0$, $a_1 = OA_1$, $a_2 = OA_2 \ldots$ der Function

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

entsprechen, und wird der Hebel OB auf einen gewissen Werth von x

eingestellt, so kreuzt der Verticalstab $C_n B_n$ den Maassstab OY bei einem Theilstriche D_n, dessen Abstand OD_n vom Nullpunkte $O = f(x)$ ist. Eine stetige Drehung des Hebels um seine Axe O hat eine zwangläufige Configurationsänderung des Mechanismus zur Folge, wobei der Kreuzungspunkt D_n sich längs dem Maassstabe hin bewegt und mit dem Nullpunkte O desselben zusammenfällt, so oft $tg\,\varphi = x =$ einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ wird, die somit auf der Kreistheilung unmittelbar abgelesen werden kann.

B. Messinstrumente.

I. Instrumente zur Messung von Raumgrössen.

§. 133. Wegmesser.

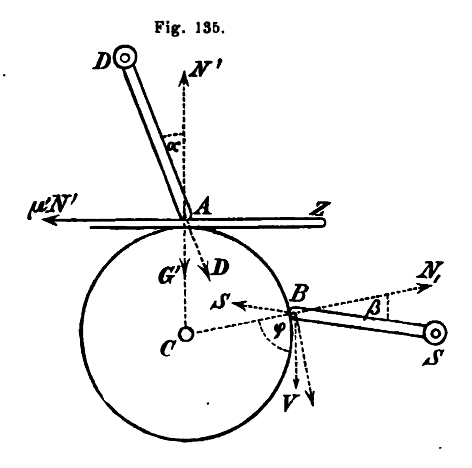
Dergleichen Instrumente, insoweit sie nicht in das Gebiet der praktischen Geometrie fallen, beruhen auf so nahe liegender Anwendung der im §. 130 besprochenen Zählwerke, dass sie hier nur flüchtig erwähnt zu werden brauchen. Die Messung des Winkelweges eines beständig in einerlei Sinn um eine Axe rotirenden Körpers ist ohne Weiteres einerlei mit dem Zählen der betreffenden Rotationen; doch kann auch die Messung des bei einer Progressivbewegung in einer gewissen Zeit zurückgelegten Weges auf dasselbe Princip zurückgeführt werden durch Anordnung eines längs diesem Wege sich abwälzenden Rades von bekanntem Umfange, falls ein solches nicht schon wie bei Fuhrwerken vorhanden ist: der Weg ergiebt sich = dem Product aus dem Umfange und der Umdrehungszahl dieses Rades mit der Annäherung, mit welcher die thatsächliche Wälzungsstrecke der geometrischen gleich gesetzt werden kann, von der sie (§. 81) streng genommen selbst bei scheinbar rein rollender Relativbewegung in Folge des Einflusses von Deformationen mehr oder weniger verschieden zu sein pflegt.

Wenn ferner ein hin und her gehender Maschinentheil wie gewöhnlich der Art zwangläufig ist, dass nicht nur seine Bahn, sondern auch die im einen und anderen Sinne wiederholt zu durchlaufende Strecke dieser Bahn unabänderlich gegeben ist, so kommt wieder die Messung des in einer gewissen Zeit von ihm durchlaufenen Weges einfach auf eine Schubzählung hinaus. Indessen kann es auch der Fall sein, dass nur die Bahn gegeben, die Schublänge aber veränderlich ist, z. B. in Betreff der hin und her gehenden

Bewegung des Dampfkolbens einer rotationslosen Wasserhaltungsmaschine, eines Dampfhammers u. s. f., während es doch von Interesse sein kann, die in einer gewissen längeren Zeit durchlaufene Weglänge zu kennen, z. B. behufs der Bestimmung von Prämien für Heizer und Maschinist nach Maassgabe des Kohlenverbrauches für eine gewisse nach der Weglänge des Kolbens zu beurtheilende Leistung einer Wasserhaltungsmaschine*. In solchen Fällen ist nur nöthig, die bei einem Hubzähler übliche Schaltung um je einen Zahn des mit dem Zählwerke verbundenen Schaltrades durch eine solche zu ersetzen, die jeweils um mehrere der hier möglichst klein und zahlreich zu machenden Zähne des Schaltrades stattfindet, entsprechend der betreffenden Schublänge, oder besser die Schaltklinke durch eine Schiene, das Schaltrad durch ein Frictionsrad zu ersetzen, welches von der Schiene bei ihrer Bewegung nach einer Richtung durch Reibung mitgenommen wird, während bei der umgekehrten Bewegungsrichtung die Schiene auf dem Frictionsrade gleitet, indem dessen rückläufige Drehung durch Frictionssperrung verhindert wird.

Durch Fig. 135 ist eine solche Anordnung im Princip angedeutet gemäss dem in der Anmerkung erwähnten Hubmesser für Wasserhaltungsmaschinen von Büttner. Auf dem um die horizontale Axe C drehbaren Frictionsrade liegt die horizontal hin und her bewegte Zugschiene Z, angedrückt bei A durch den um die Axe D drehbaren Druckhebel DA; G sei der verticale Druck, den die Zugschiene nur durch ihr Eigengewicht auf das Rad ausübt, G' aber derjenige, den sie selbst durch die Schwere des Druckhebels empfängt, α der Winkel zwischen den Richtungen CA und AD. Ferner ist SB der um die horizontale Axe S drehbare Sperrhebel, β der Winkel zwischen den Richtungen CB und BS. Anstatt durch den Druckhebel könnte der Eigengewichtsdruck G der Zugschiene auf das Frictionsrad auch durch irgend eine andere von oben her

Fig. 135.



* Ein dazu dienender Kolbenwegmesser ist von A. Büttner mitgetheilt in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1872, S. 123.

wirkende Kraft unterstützt werden, doch bietet der Hebel auf einfache Weise den Vortheil dar, dass der Gesammtdruck N' zwischen ihm und der Zugschiene, somit auch der Druck N zwischen dieser und dem Frictionsrade bei der rückläufigen Bewegung (von links nach rechts in Fig. 135), wobei die Schiene auf dem gesperrten Rade gleitet, in beliebigem Verhältnisse kleiner erhalten werden kann, als bei der Schaltbewegung, wobei das Rad von der Schiene ohne relative Gleitung durch Reibung mitgenommen werden soll. Die entsprechende Anordnung des Druckhebels beruht auf folgender Ueberlegung, wobei der Coefficient der Reibung zwischen dem Rade und der Schiene mit μ, zwischen dieser und dem Druckhebel mit μ' bezeichnet ist; letzterer kann besonders dann wesentlich verschieden von μ sein, wenn etwa der Druckhebel bei A mit einer Frictionsrolle aufliegt, in welchem Falle μ' = dem im Verhältnisse des Zapfendurchmessers zum Rollendurchmesser verkleinerten Zapfenreibungscoefficient wäre.

Bei der Schaltbewegung (von rechts nach links, Fig. 135) der Schiene Z sei D die Kraft, mit welcher der Druckhebel im Sinne DA auf die Schiene wirkt ausser dem verticalen Gewichtsdrucke G', während die Schiene auf den Hebel zurückwirkt mit der Normalkraft N' und der entsprechenden Reibung $\mu' N'$. Dem Gleichgewicht dieser Kräfte entsprechen die zwei Gleichungen:

$$\mu' N' = \mu'(G' + D \cos \alpha) = D \sin \alpha$$

und folgt daraus:

$$D = \frac{\mu' G'}{\sin \alpha - \mu' \cos \alpha}.$$

Damit nicht D unendlich gross oder negativ werde als Zeichen dafür, dass der Hebel als Sperrhebel wirkt, muss

$$tg\, \alpha > \mu' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

d. h. der Winkel α grösser, als der betreffende Reibungswinkel sein, einerlei welchen Werth G' haben möge. Mit Rücksicht auf den Ausdruck von D ergiebt sich

$$N' = \frac{D \sin \alpha}{\mu'} = \frac{G'}{1 - \mu' \, cotg\, \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ist ferner P die Kraft, die tangential am Umfange des Frictionsrades wirken muss, um seine Drehung entgegen den Widerständen des Zählwerkes zu bewirken, so muss zur Verhinderung des relativen Gleitens zwischen ihm und der Schiene

$$\mu N = \mu(G + N') > P, \quad \text{also} \quad N' > \frac{P}{\mu} - G$$

sein und somit nach Gl. (2):

$$1 - \mu' \cot g\, \alpha = \frac{G'}{N'} < \frac{G'}{\frac{P}{\mu} - G}$$

$$\mu' \cot g\, \alpha > \frac{\frac{P}{\mu} - G - G'}{\frac{P}{\mu} - G}; \quad tg\, \alpha < \mu' \frac{\frac{P}{\mu} - G}{\frac{P}{\mu} - G - G'} \quad \ldots\ldots (3).$$

Um den Winkel α zwischen den Grenzwerthen (1) und (3) mit einem gewissen durch die Unsicherheit der Reibungscoefficienten gebotenen Spielraume passend annehmen zu können, darf G', also das Gewicht des Druckhebels nicht beliebig klein sein.

Für die rückläufige Bewegung der Schiene Z sind die Kräfte D und $\mu' N'$ entgegengesetzt wie in Fig. 135 gerichtet; ihrem Gleichgewicht mit den Kräften N' und G' entsprechen dann die Gleichungen:

$$\mu' N' = \mu' (G' - D \cos \alpha) = D \sin \alpha$$

und folgt daraus:

$$D = \frac{\mu' G'}{\sin \alpha + \mu' \cos \alpha}; \quad N' = \frac{G'}{1 + \mu' \cot g\, \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Sollte nun z. B. dieser Druck N' nur $^1/_3$ so gross wie derjenige sein, der nach Gl. (2) der Schaltbewegung entspricht, so müsste

$$\frac{1 - \mu' \cot g\, \alpha}{1 + \mu' \cot g\, \alpha} = \frac{1}{3}; \quad \mu' \cot g\, \alpha = \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

gemacht werden. Der Bedingung (1) würde dadurch mit doppelter Sicherheit genügt; um aber auch der Bedingung (3) zu entsprechen, müsste

$$\frac{P}{\mu} - G - G' < \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\mu} - G\right),$$

also

$$G' > \frac{1}{2}\left(\frac{P}{\mu} - G\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

gemacht werden.

Was endlich die Anordnung des Sperrhebels betrifft, so sei S der Druck, den er, wenn die rückläufige Schiene Z eine entsprechende Rechtsdrehung des Frictionsrades zu bewirken strebt, im Sinne SB auf letzteres ausübt ausser dem von der Schwere dieses Hebels herrührenden Verticaldrucke V, entsprechend dem Winkel $VBC = \varphi$ (Fig. 135). Den Kräften S und V wirkt das Frictionsrad entgegen mit dem Normaldrucke N_1 im Sinne CB und mit der an den Stützpunkt B versetzten, auf Drehung des Rades abzielenden Tangentialkraft Q, die mit Rücksicht auf Gl. (4) die Grösse

$$Q = \mu\left(G + \frac{G'}{1 + \mu' cotg\, \alpha}\right)$$

hat, insbesondere mit $\mu' cotg\, \alpha = \frac{1}{2}$:

$$Q = \mu\left(G + \frac{2}{3} G'\right).$$

Würde diese Drehung thatsächlich erzielt, so wäre, unter μ_1 den betreffenden Reibungscoefficient verstanden, der Bestandtheil $\mu_1 N_1$ von Q mit den Kräften N_1, S und V im Gleichgewicht; die Drehung wäre also unmöglich, wenn Q kleiner, als die Summe des jenem Gleichgewicht entsprechenden Werthes von $\mu_1 N_1$ und derjenigen Kraft wäre, welche, tangential am Frictionsrade wirkend, die rückläufige Drehung desselben ohne den Einfluss des Hebels SB bewirken kann. Soll aber, was vorzuziehen ist, bei jeder Grösse von Q die Sperrung des Rades durch den Hebel SB vermittelt werden, so ist nur nöthig, letzteren so anzuordnen, dass aus der Bedingung des Gleichgewichtes der Kräfte $\mu_1 N_1$, N_1, S und V, nämlich aus den Gleichungen:

$$\mu_1 N_1 = \mu_1 (V \cos\varphi + S \cos\beta) = S \sin\beta - V \sin\varphi$$

sich für
$$S = \frac{\sin\varphi + \mu_1 \cos\varphi}{\sin\beta - \mu_1 \cos\beta} V$$

ein unmöglicher negativer Werth ergebe, was unabhängig von V und φ erfordert, dass

$$tg\,\beta < \mu_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7,$$

also β kleiner, als der betreffende Reibungswinkel ist.

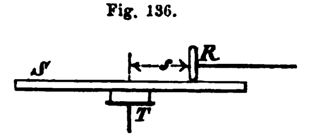
§. 134. Linearplanimeter.

Die seither vorzugsweise in Gebrauch gekommenen und hier allein zu betrachtenden Planimeter sind Instrumente, welche den Inhalt einer gezeichneten ebenen Fläche durch blosses Umfahren ihres Umfanges mit einem Stift oder einer sonstigen Marke und durch Ablesung der dadurch entsprechend veränderten Stellung eines Zeiger- oder Zählwerkes zu bestimmen gestatten. Jenachdem das Instrument auf einer Registrirung der mit dem Umfahren der Fläche verbundenen Aenderungen von Linear- oder Polarcoordinaten der Umfangspunkte beruht, kann man Linear- und Polarplanimeter unterscheiden. Erstere wurden (nach Bauernfeind) von dem bayerischen Trigonometer J. M. Hermann schon 1814 erfunden und 1817 angewendet, jedoch wenig bekannt und beachtet; unabhängig davon

wurden solche Instrumente 1825 von dem Italiener **Gonella** (nach Laboulaye, traité de cinématique), 1827 von dem schweizerischen Ingenieur **Oppikofer** construirt, später von **Ernst** in Paris, von **Wetli** in Zürich und von **Hansen** in Gotha verbessert. Der folgenden Besprechung liegen hauptsächlich die Linearplanimeter von Wetli und von Hansen zum Grunde.

Bei denselben befindet sich der Fahrstift am Ende eines Lineals, während ein Schlitten einerseits mit diesem Lineal, andererseits mit dem Gestell des Instrumentes prismatisch gepaart ist, so dass die Schubrichtungen beider Prismenpaare rechtwinklig gegen einander und parallel mit der horizontalen Ebene der mit dem Stift zu umfahrenden Figur gerichtet sind. Der Schlitten trägt die um eine verticale Axe drehbare horizontale Kreisscheibe S (Fig. 136), mit welcher unter geeignetem (relatives Gleiten ausschliessendem) Drucke die Rolle R so in Berührung ist, dass die horizontale Axe ihrer in festen Lagern des Gestelles drehbaren Welle mit der Schubrichtung des Schlittens parallel ist und die Axe der Scheibe S rechtwinklig schneidet. Die mit dieser Scheibe coaxial fest verbundene Trommel T wird von einem feinen Silberdrahte umschlungen, der längs dem Lineal, an beiden Enden desselben befestigt, ausgespannt ist. Eine relative Verschiebung des Lineals gegen den Schlitten bewirkt somit eine entsprechende Drehung von T mit S und dadurch auch eine Drehung von R, abhängig zugleich vom Abstande des Berührungspunktes zwischen S und R vom Mittelpunkte der Scheibe, folglich von der Lage des Schlittens. Der Drehungswinkel φ von R, durch ein Zählwerk registrirt, ist dem Flächeninhalte F der vom Stift umfahrenen Figur proportional.

Fig. 136.



Wird nämlich letztere auf rechtwinklige Coordinaten x, y in ihrer Ebene bezogen, so dass die x-Axe parallel mit der Schubrichtung des Lineals gegen den Schlitten, die y-Axe parallel mit der Schubrichtung des Schlittens selbst ist, und sind r, t die Radien bezw. der Rolle R und der Trommel T, während s die augenblickliche Entfernung des Mittelpunktes der Scheibe S von ihrem Berührungspunkte mit der Rolle R bedeutet, so hat die Verschiebung des Fahrstiftes längs einem Bogenelement des Umfanges von F, entsprechend den elementaren Verschiebungen dx und dy im Sinne der Axen, eine unendlich kleine Drehung der Scheibe $=\frac{dx}{t}$, also die Drehung

$$d\varphi = \frac{s}{r}\frac{dx}{t}$$

der Rolle R zur Folge; zugleich ändert sich s um $ds = dy$ in Folge der Verschiebung des Schlittens, so dass sich s und y nur durch eine Constante s_0 unterscheiden und deshalb mit $s = y - s_0$ aus obiger Gleichung durch Integration hervorgeht:

$$r t \varphi = \int y\,dx - s_0 \int dx.$$

Ist aber der Fahrstift zu seiner Anfangslage zurückgekehrt, so ist

$$\int dx = 0 \quad \text{und} \quad \int y\,dx = F$$

geworden, also

$$F = r t \varphi.$$

Wenn etwa der $n$te Theil einer Umdrehung von R einer Flächeneinheit z. B. einem Quadratmillimeter entsprechen soll, so müssen r und t in Millimetern ausgedrückt der Gleichung entsprechen:

$$1 = r t \frac{2\pi}{n}, \quad \text{also} \quad r t = \frac{n}{2\pi}.$$

Da es nicht erwartet werden kann, dass die Radien r und t, von denen letzterer bis zur Mittellinie des die Trommel T umschlingenden Silberdrahtes zu rechnen ist, von vorn herein ganz richtig getroffen werden, so empfiehlt es sich, die Rolle R zunächst ein wenig zu gross zu machen und vorsichtig so lange zu verkleinern, bis der Inhalt einer Figur F von bekannter Grösse, z. B. eines Kreises von möglichst grossem Durchmesser im Mittel aus vielen Umfahrungen mit einem zu vernachlässigenden Fehler richtig gefunden wird. Wäre die Rolle R etwas zu klein geworden, so könnte durch Anwendung eines etwas dickeren Silberdrahtes geholfen werden.

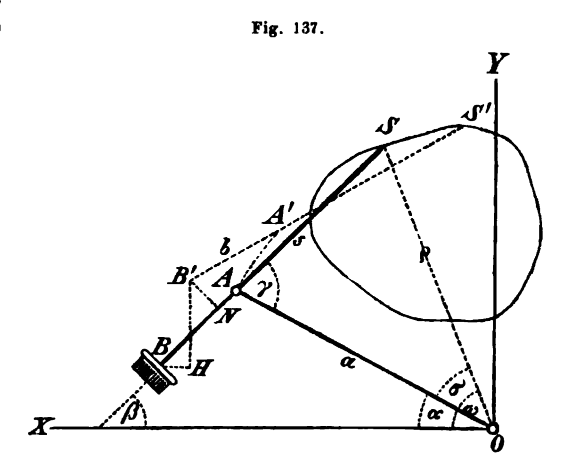
Die Genauigkeit der Flächeninhaltsbestimmung mit Hülfe eines solchen Linearplanimeters beträgt nach Bauernfeind etwa 0,001 F für $F = 1200$ bis 1500 Quadratmillimeter; bei kleineren Flächen ist der verhältnissmässige Fehler grösser, bei grösseren kleiner.

§. 135. **Polarplanimeter.**

Einfacher und entsprechend billiger bei kaum geringerer Genauigkeit als die im vorigen Paragraph besprochenen Linearplanimeter, und deshalb in viel allgemeineren Gebrauch gekommen ist das von J. Amsler-Laffon im Jahre 1854 erfundene Polarplanimeter. Es besteht im Wesentlichen aus zwei Stäben OA und BAS (Fig. 137), bei A durch ein Gelenk verbunden, dessen Axe zur Ebene der Figur senkrecht zu denken ist. Am Ende des Stabes OA ist bei O eine Nadel eingesetzt, deren Spitze nur

wenig hervorragt und beim Gebrauch des Instrumentes auf das Papier aufgesetzt wird, auf welchem die zu messende Fläche $= F$ gezeichnet ist; um diesen Punkt O als Pol (bezw. um die in O zur Zeichenebene senkrechte Axe) ist somit das Instrument drehbar. Der andere Stab trägt an seinem Ende bei S einen Stift, mit dessen Spitze der Umfang der auszumessenden Fläche umfahren wird; ausserdem ist dieser Stab jenseits A (oder auch zwischen A und S) mit einer Hülse verbunden, in welcher eine Laufrolle B mit ihrer in Spitzen auslaufenden Welle leicht drehbar so gelagert ist, dass ihre geometrische Axe in der durch die Axe A und die Spitze S des Fahrstiftes gehenden Ebene liegt. Die Rolle besteht aus einem abgerundeten etwas vortretenden Rande und aus einem cylindrischen Theile von etwas kleinerem Durchmesser; der Berührungspunkt B zwischen dem Rollenrande und der Zeichenfläche ist der dritte Stützpunkt des Instrumentes ausser der Nadelspitze O und der Spitze S des Fahrstiftes. Der cylindrische Theil der Rolle ist in 100 gleiche Theile getheilt, während mit Hülfe eines an der Hülse befestigten Nonius auch noch Zehntel dieser Theile, also Tausendtel einer Umdrehung der Rolle abgelesen werden können; ihre ganzen Umdrehungen werden durch eine Zifferscheibe registrirt, die mit einem Schraubenrädchen verbunden ist, das von einer mit der Laufrolle rotirenden Schraube ohne Ende in langsame Drehung versetzt wird.

Fig. 137.



Beim Gebrauch des Instrumentes wird die Nadelspitze O wo möglich ausserhalb der zu messenden Fläche so aufgesetzt, dass der Umfang dieser Fläche mit dem Stifte S umfahren werden kann. Wird dann letzterer etwa von S bis S' (Fig. 137) längs jenem Umfange hin bewegt, so erfährt auch der Berührungspunkt der Laufrolle mit der Zeichenebene in dieser eine entsprechende Verrückung von B bis B', die in eine nach BS gerichtete Componente $= BN$ und in eine Componente normal dazu $= NB'$ zerlegt werden kann; nur der letzteren entspricht eine Drehung der mit einem Umfangsbogen $= NB'$ sich abwälzenden Rolle und zwar um einen

Winkel φ, der aus den Ablesungen der betreffenden Skalen zu Anfang und zu Ende der fraglichen Bewegung als ein Vielfaches des Drehungswinkels $= \frac{2\pi}{1000}$ gefunden wird. Wenn insbesondere mit dem Stifte S eine Figur rechtläufig (im Sinne der Drehung eines Uhrzeigers) gerade ein mal umfahren wird, so dass der Stift an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt, so ist, wie sich zeigen lässt, der Inhalt F jener Figur = dem Product des Drehungswinkels φ mit einem constanten Factor C, der durch die Abmessungen des Instrumentes bestimmt ist. Wenn aber, wie es bei grösseren Flächen der Fall sein kann, die Nadel O im Inneren derselben aufgesetzt werden muss, um ihren Umfang mit dem Stifte S umfahren zu können, so ist zu jenem Producte $C\varphi$ (stets bei rechtläufiger Umfahrung) noch eine gleichfalls durch die Abmessungen des Instrumentes bestimmte Constante C' hinzuzufügen, um

$$F = C\varphi + C'$$

zu finden. Die Richtigkeit dieses Verfahrens und die Ausdrücke von C und C' ergeben sich durch die folgende Entwickelung.

Mit Bezug auf Fig. 137 sei

$$OA = a, \quad AS = s, \quad AB = b,$$

unter B den Berührungspunkt der Rolle mit der Zeichenfläche verstanden, während die Bedeutungen der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \omega$ ohne Weiteres aus der Figur hervorgehen, in welcher OX und OY zwei übrigens beliebig von O aus in der Zeichenfläche gezogene rechtwinklige Coordinatenaxen sind. Für dieselben sind die Coordinaten des Punktes B:

$$x = a \cos\alpha + b \cos\beta$$
$$y = a \sin\alpha - b \sin\beta.$$

Ist dann SS' ein unendlich kleines Umfangselement der zu messenden Fläche, also auch NB' unendlich klein $= r\,d\varphi$, unter $d\varphi$ den entsprechenden elementaren Drehungswinkel der Laufrolle und unter r ihren Radius (den Radius ihres die Zeichenfläche berührenden Umfangskreises) verstanden, ist ferner

$$BH = -dx \text{ parallel } OX,$$
$$HB' = dy \text{ parallel } OY,$$

so ist

$$r\,d\varphi = HB' \cdot \cos\beta - BH \cdot \sin\beta$$
$$= dy \cdot \cos\beta + dx \cdot \sin\beta.$$

Dabei ist $d\varphi$ positiv, also φ wachsend vorausgesetzt bei einer Drehung der Laufrolle in solchem Sinne, dass sie einem in S befindlichen Auge rechtläufig erscheint. Wird aber, wie es hier geschehen soll, umgekehrt φ

wachsend angenommen bei einer für den Anblick im Sinne BS rechtläufigen Drehung, so ist

$$\begin{aligned}-r\,d\varphi &= dy\cdot\cos\beta + dx\cdot\sin\beta\\ &= (a\cos\alpha\,d\alpha - b\cos\beta\,d\beta)\cos\beta - (a\sin\alpha\,d\alpha + b\sin\beta\,d\beta)\sin\beta\\ &= a\cos(\alpha+\beta)\,d\alpha - b\,d\beta.\end{aligned}$$

Wegen $\alpha + \beta = \gamma$ folgt daraus:

$$rs\,d\varphi = -as\cos\gamma\,d\alpha + bs\,d\beta$$

oder mit $OS = \varrho$ wegen

$$\varrho^2 = a^2 + s^2 - 2as\cos\gamma,$$

$$\alpha = \omega - \sigma \quad \text{und} \quad \beta = \gamma - \alpha = \gamma - \omega + \sigma$$

$$rs\,d\varphi = \frac{1}{2}(\varrho^2 - a^2 - s^2)\,d(\omega - \sigma) + bs\,d(\gamma - \omega + \sigma)$$

und somit für eine Bewegung des Fahrstiftes von endlicher Grösse:

$$rs\varphi = \frac{1}{2}\int\varrho^2 d\omega - \frac{1}{2}\int\varrho^2 d\sigma - \frac{1}{2}(a^2 + s^2 + 2bs)\left(\int d\omega - \int d\sigma\right) + bs\int d\gamma.$$

Wenn insbesondere der Stift die Fläche F rings umfahren hat, so ist

$$\frac{1}{2}\int\varrho^2 d\omega = F$$

geworden. Ebenso ist $\frac{1}{2}\int\varrho^2 d\sigma$ der Inhalt der Fläche, welche von der relativen Bahn des Punktes S gegen den Stab OA umgrenzt wird; indem aber diese relative Bahn ein Kreisbogen aus A als Mittelpunkt mit $AS = s$ als Radius ist, in welchem der Punkt S seinen anfänglichen Ort wieder einnimmt, wenn er den Umfang von F umfahren hat und damit das ganze Instrument in seine anfängliche Lage und Configuration zurückgekehrt ist, ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\int\varrho^2 d\sigma = 0.$$

Ebenso ist auch $\int d\sigma = 0$ und $\int d\gamma = 0$, folglich:

$$F = rs\varphi + \frac{1}{2}(a^2 + s^2 + 2bs)\int d\omega.$$

Was $\int d\omega$ betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem O ausserhalb oder innerhalb der Fläche F liegt. Im ersten Falle ist $\int d\omega = 0$, also

$$F = rs\varphi,$$

im zweiten dagegen ist $\int d\omega = 2\pi$, also

$$F = rs\varphi + \pi(a^2 + s^2 + 2bs).$$

In diesen Ausdrücken sind r, a, s absolute Grössen, während b negativ wird, wenn die Laufrolle auf der anderen Seite von A (zwischen A und S) liegt. Der Winkel φ wird, wie schon bemerkt, in Tausendteln einer Umdrehung der Laufrolle abgelesen, so dass, wenn z_1 und z_2 die bezw. zu Anfang und zu Ende der Operation abgelesenen Zahlen sind,

$$\varphi = \frac{2\pi}{1000}(z_2 - z_1)$$

ist und somit $F = \frac{\pi r s}{500}(z_2 - z_1)$

bezw. $$F = \frac{\pi r s}{500}\left(z_2 - z_1 + 500\,\frac{a^2 + s^2 + 2bs}{rs}\right).$$

Zur Erleichterung des Gebrauches werden r und s so gewählt, dass $\frac{\pi r s}{500}$ einem runden Vielfachen der Flächeneinheit oder überhaupt einer bestimmten Fläche f gleich ist, z. B. $= 10$ Quadratmillimeter, entsprechend

$$s = \frac{5000}{\pi r} \text{ Millimeter,}$$

falls auch r in Millimetern ausgedrückt ist. Meistens sind zudem die Instrumente so eingerichtet, dass durch Verstellung des Stabes AS gegen die Hülse der Abstand s geändert werden kann und damit auch die Fläche

$$f = \frac{\pi r s}{500},$$

welche der Einheit der Ablesungsdifferenz $= z_2 - z_1$ entspricht. Mit s ändert sich auch der Summand

$$S = 500\,\frac{a^2 + s^2 + 2bs}{rs},$$

mit welchem, wenn O im Inneren der Fläche, liegt,

$$F = f\,(z_2 - z_1 + S)$$

gefunden wird, und sind deshalb die zusammengehörigen Werthe von f und S auf dem Stabe AS verzeichnet neben den Marken, die zu seiner Einstellung auf die betreffenden Werthe von f dienen.

Es versteht sich von selbst, dass jedes Planimeter allgemein als Integrator, d. h. zur mechanischen Bestimmung eines bestimmten Integrals dienen kann, indem ein solches stets als Inhalt einer ebenen Fläche aufzufassen oder dazu in einfache Beziehung zu setzen ist. Besonders einfach gestaltet sich das Verfahren zur Bestimmung des Momentes ersten oder zweiten Grades (statischen oder Trägheitsmomentes) einer gegebenen ebenen Fläche F für eine in ihrer Ebene liegende Axe A. Ist nämlich y eine

Sehne von F in der Entfernung x von A, so ist das statische Moment:

$$M = \int xy\,dx = a\int \frac{x}{a}\,y\,dx = a\int y_1\,dx$$

$= a$ mal dem Inhalte einer Fläche F_1, die aus der Fläche F dadurch erhalten wird, dass ihre sämmtlichen mit A parallelen Sehnen y ohne Aenderung ihrer Entfernungen x von A in den Verhältnissen $\frac{x}{a}$ verkleinert werden, was constructiv leicht vermittels einer im Abstande a parallel mit A gezogenen Geraden geschehen kann. Das Trägheitsmoment von F für die Axe A ist ebenso

$$J = \int x^2 y\,dx = a^2\int \frac{x}{a}\,y_1\,dx = a^2\int y_2\,dx$$

$= a^2$ mal dem Inhalte einer Fläche F_2, die aus F_1 ebenso hervorgeht wie F_1 aus F.*

§. 136. Gasmesser.

Bei der Abgabe des Leuchtgases von einer Gasfabrik an die einzelnen Consumenten ist am frühesten das Bedürfniss hervorgetreten, den Gasverbrauch der letzteren durch automatisch wirkende, nämlich durch Instrumente zu messen, die ohne weiteres Dazuthun, nur in Folge einer kleinen Druckdifferenz des zu- und abströmenden Gases, die Quantität desselben anzeigen. Die dazu vorgeschlagenen und benutzten Instrumente sind zwar im Einzelnen von vielfach verschiedener Einrichtung, kommen aber im Allgemeinen darauf hinaus, dass ein bestimmter Raum wiederholt mit dem Gase angefüllt und wieder entleert und die Anzahl dieser Wiederholungen durch ein Zählwerk registrirt wird; jenachdem dabei Wasser oder überhaupt eine tropfbare Flüssigkeit zur Abgrenzung jenes Maassraumes benutzt wird oder nicht, unterscheidet man nasse und trockene Gasmesser.

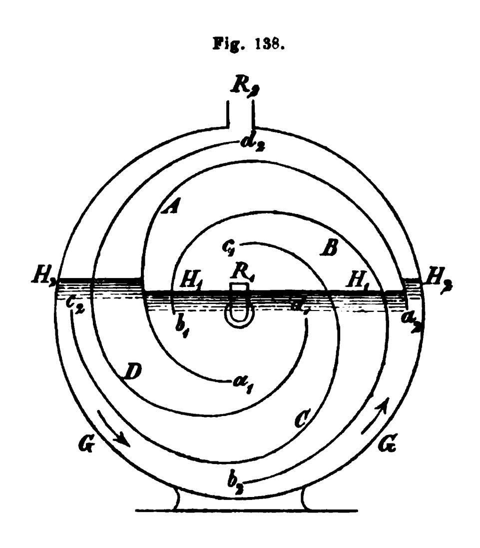
Die nassen Gasmesser als die ältesten und auch heute noch am häufigsten benutzten haben im Princip die durch Fig. 138 angedeutete

---

* Auf ähnlichen Principien beruhend, wie das besprochene einfache Polarplanimeter, hat Amsler auch zusammengesetztere Instrumente construirt, die dazu dienen, ausser dem Inhalte einer ebenen Fläche unmittelbar ihre Momente ersten und zweiten Grades für beliebige Gerade in ihrer Ebene zu bestimmen. Einrichtung, Theorie und Gebrauch derselben sind erläutert in den Schriften Amsler's: „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, Schaffhausen 1856“ und „Anwendung des Integrators zur Berechnung des Auf- und Abtrages bei Anlage von Eisenbahnen, Strassen und Canälen, Zürich 1875“.

Einrichtung. Ein mit horizontaler Axe aufgestelltes cylindrisches Gehäuse G ist etwas mehr als zur Hälfte mit Wasser erfüllt. In ihm befindet sich eine um die Gehäuseaxe drehbare Trommel, bestehend aus zwei zur Axe senkrechten kreisförmigen Platten und aus n in gleichen Abständen dazwischen eingefügten Wänden, die hier vorläufig als spiralförmig gekrümmte cylindrische materielle Flächen vorgestellt werden mögen, deren erzeugende Geraden parallel mit der Axe sind. Jede dieser Zwischenwände erstrecke sich vom Abstande r_1 bis zum grösseren Abstande r_2 von der Axe, so dass durch sie der zwischen den concentrischen Cylinderflächen mit den Radien r_1 und r_2 befindliche Trommelraum in n gleiche Kammern getheilt wird, die nach innen und aussen offen sind. Das im Gehäuse enthaltene Wasser steht unter diesen Umständen innerhalb und ausserhalb der Trommel gleich hoch, abgesehen von solchen kleinen Niveaudifferenzen, die von Druckunterschieden des zu- und abströmenden Gases herrühren. Der gesammte Windungswinkel jeder der n Zwischenwände ist ungefähr

Fig. 138.



$$=\pi+\frac{2\pi}{n}=\left(1+\frac{2}{n}\right)\pi,$$

so dass, wenn entsprechend dem durch die Pfeile in Fig. 138 angezeigten Drehungssinne der Trommel eine solche Wand A mit ihrem äusseren Rande a_2 eben noch in das Wasser eingetaucht ist, die folgende B eben angefangen hat, mit ihrem inneren Rande b_1 auf der anderen Seite der Axe einzutauchen. In der Figur ist $n=4$ angenommen, der Windungswinkel der spiralförmigen Wände A, B, C, D also nahe $=\frac{3}{2}\pi$. Die Zuleitung des Gases erfolgt durch ein Rohr R_1, welches eine Seitenwand des Gehäuses dicht schliessend in der Mitte durchdringt, durch die nächstliegende Seitenwand der Trommel mit beliebigem, wenn nur ganz unter Wasser liegendem Spielraume hindurch geht und dann aufwärts gebogen im Inneren der Trommel etwas über oder in der Wasseroberfläche selbst

mündet; die Gasableitung kann an irgend einer über Wasser liegenden Stelle der Gehäusewand, etwa durch das Rohr R_2 stattfinden.

Unter den erklärten Umständen können nun bei jeder Lage der Trommel zweierlei oder dreierlei mit Gas erfüllte Theile V_1, V_2 bezw. V_1, V, V_2 des Gehäuseraumes unterschieden werden, so dass V_1 mit dem Zuströmungsrohr R_1, V_2 mit dem Abströmungsrohr R_2 communicirt, während zwischen beiden zeitweilig ein weder mit R_1 noch mit R_2 communicirender ganz abgesperrter Raum V liegt. Bei der in Fig. 138 dargestellten Lage der Trommel ist Letzteres der Fall, nämlich V_1 der von der Wand B und der Wasseroberfläche, V der von den Wänden A, B und der Wasseroberfläche begrenzte Theil des Trommelraumes, V_2 endlich der übrige mit Gas erfüllte Theil des ganzen Gehäuseraumes. Dabei liegt die den Raum V_1 begrenzende Wasseroberfläche H_1H_1 etwas tiefer, als die den Raum V_2 begrenzende Wasseroberfläche H_2H_2, nämlich um

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma},$$

wenn p_1 den Druck des zuströmenden, p_2 den des abströmenden Gases und γ das specifische Gewicht des Wassers, überhaupt der Sperrflüssigkeit bedeutet. Die Höhenlage der Wasseroberfläche, welche den ganz abgesperrten Gasraum zwischen A und B begrenzt, ist von den Umständen abhängig. Denkt man sich nämlich um die Trommelaxe eine Kreiscylinderfläche K beschrieben mit dem Radius h_1 = der Höhe der horizontalen Ebene H_1H_1 über jener Axe und nun eine Berührungsebene E dieser Fläche K aus der Lage, in welcher sie durch den inneren Rand b_1 der Wand B hindurch geht, in die Lage H_1H_1 gedreht, so können dabei ihre zwei Durchschnittsflächen mit dem zwischen A und B befindlichen Trommelraum im Allgemeinen verschiedene Volumina durchlaufen, so dass das zwischen A und B abgesperrte Gasvolumen bei der durch Fig. 138 dargestellten Lage der Trommel nicht genau demjenigen gleich ist, welches in dem Augenblicke abgesperrt wurde, als der Rand b_1 der Wand B die Wasseroberfläche erreichte, somit auch der Druck dieses Gases von p_1 etwas verschieden und also die Wasseroberfläche zwischen A und B von H_1H_1 etwas verschieden ist. Indessen ist solche Verschiedenheit, die ja auch nur zeitweilig während der Absperrung eines Gasvolumens V vorkommen kann, nicht von wesentlicher Bedeutung für die Wirksamkeit des Instrumentes, und mag hier angenommen werden, dass das Volumen und somit der Druck des zwischen A und B befindlichen Gases unverändert, jenes $= V$, dieser $= p_1$ bleiben, so lange die Absperrung dauert, also bis der Rand a_2 sich aus dem Wasser erhebt, dass somit die Wasseroberfläche H_1H_1

in Fig. 138 sich beiderseits nicht nur bis zur Wand B, sondern bis zur Wand A erstreckt. In diesem Falle findet an dem über Wasser befindlichen Theile der Wand A auf der concaven Seite der specifische Druck p_1, auf der convexen Seite der Druck p_2 statt, während im Uebrigen alle diese Wände an allen Stellen von beiden Seiten gleich stark gedrückt werden. Der specifische Ueberdruck $p = p_1 - p_2$ auf den über Wasser befindlichen Theil der Wand A veranlasst somit die Drehung der Trommel im Sinne der beigesetzten Pfeile mit einem leicht zu berechnenden Kraftmomente M. Ist nämlich a die axiale Dimension der Trommel im Lichten und ds ein Bogenelement der spiralförmigen Querschnittscurve einer Zwischenwand, ϱ seine Entfernung von der Axe, so ist der Ueberdruck auf das entsprechende Flächenelement ads der Wand $= pads$, seine zu ϱ normale Componente $= pad\varrho$ und sein Moment in Bezug auf die Axe:

$$dM = pa\varrho d\varrho,$$

folglich das ganze auf Drehung der Trommel abzielende Kraftmoment:

$$M = pa\int \varrho d\varrho = pa\frac{\varrho_2{}^2 - \varrho_1{}^2}{2},$$

unter ϱ_1 und ϱ_2 die Entfernungen der Axe von den zwei Durchschnitten der Wand A mit der Ebene H_1H_1 verstanden. Wenn sich in Folge dieser Drehung die Wand A mit ihrem äusseren Rande a_2 aus dem Wasser erhoben hat, so fällt der Gasdruck in dem bis dahin abgesperrten Raume zwischen A und B auf p_2 und steigt die ihn begrenzende Wasseroberfläche bis zur Ebene H_2H_2; die weitere Drehung der Trommel wird dann übernommen von dem Ueberdrucke auf den über Wasser befindlichen Theil der folgenden Wand B mit einem Momente M, welches den stetig variablen Werthen von ϱ_1 und ϱ_2 entsprechend im Allgemeinen etwas variabel ist. Indessen ist solche Veränderlichkeit nur von untergeordneter Grösse und Bedeutung, indem ihr bei constanter Grösse des Widerstandsmomentes gegen die Drehung der Trommel eine periodisch nur sehr wenig veränderliche Höhendifferenz $h = \frac{p}{\gamma}$ der Wasseroberflächen H_1H_1 und H_2H_2 entspricht. Dieselbe ist um so weniger veränderlich, je kleiner sie überhaupt ist, je langsamer also die Trommel sich dreht, da mit ihrer Winkelgeschwindigkeit auch ihr Widerstandsmoment (wenigstens insoweit es von der Reibung zwischen den Trommelwänden und dem Wasser herrührt) und somit $p = p_1 - p_2$ abnimmt. In der That pflegen deshalb die Dimensionen der Trommel für einen gewissen Zweck so bemessen zu werden, dass sie

stündlich höchstens etwa 120 Umdrehungen macht, entsprechend einer Umdrehungszeit von 30 Secunden.

Bei n Zwischenwänden der Trommel zeigt jede Umdrehung derselben eine hindurch gegangene Gasmasse an, deren Volumen beim Drucke $p_1 = nV$ ist, unter V das Volumen verstanden, welches die Ebene H_1H_1 von einer Kammer zwischen zwei benachbarten Wänden A, B der Trommel dann abschneidet, wenn die hintere B derselben mit ihrem vorausgehenden Rande b_1 gerade in die Sperrflüssigkeit eintaucht und damit die Gasabsperrung in der Kammer beginnt. Diese Gasmasse ist bei gegebener Trommel um so grösser, je weniger Sperrflüssigkeit im Gehäuse enthalten und je grösser h, ferner je grösser p_1 und je niedriger die Temperatur des Gases ist.

Ohne wesentliche Aenderung der Wirksamkeit eines solchen Gasmessers ist besonders die Einrichtung der Trommel einer grossen Mannigfaltigkeit fähig, wenn nur stets die Zwischenwände so angeordnet werden, dass die dadurch gebildeten gleichen Kammern durch ihre Mündungen auf der einen Seite, falls sie über Wasser liegen, mit dem Gaszuströmungsraum, durch ihre über Wasser liegenden Mündungen auf der anderen Seite mit dem Gasabströmungsraum communiciren, dass aber zeitweilig beide Mündungen derselben Kammer unter Wasser liegen, um das zu messende Gasvolumen abzusperren. Während zu diesen letzterwähnten Zeiten beide den Maassraum begrenzende Zwischenwände von entgegengesetzten Seiten verschieden stark gedrückt sein und so zusammen die Drehung der Trommel vermitteln können, ist es während der übrigen Perioden nur eine Zwischenwand, welche, indem sie an ihrem über Wasser liegenden Theil einerseits dem Drucke p_1, andererseits dem kleineren Drucke p_2 auf die Flächeneinheit ausgesetzt ist, dadurch als Angriffsfläche des die Trommel drehenden Ueberdruckes dient. Insbesondere bei dem am meisten verbreiteten Crosley'schen Gasmesser liegen die Kammermündungen nicht, wie in Fig. 138 angenommen, in zwei concentrischen Cylinderflächen, sondern die Einflussmündungen in der einen, die Ausflussmündungen in der anderen Seitenfläche der Trommel, so dass das Gas nicht von innen nach aussen, sondern seitlich durch die Trommel hindurch geht, die dabei aussen durch eine cylindrische Wand abgeschlossen und auf der Einströmungsseite mit einem gewölbten Boden versehen ist zur Begrenzung des Raumes, in welchem das aufwärts gekrümmte Gasrohr R_1 mündet (Fig. 139). Die besondere zweifach geknickte Gestalt der die Kammern bildenden Blechwände des Crosley'schen Gasmessers hat eine beträchtliche Verengung dieser Kammern gegen ihre Mündungen hin zur Folge, ist aber im Uebrigen

mehr von constructiver, als von principieller Bedeutung, und mag davon hier ebenso wie von der besonderen Einrichtung des Zählwerkes zur Registrirung der Trommelumdrehungen abgesehen werden.

Unter der Voraussetzung, dass ein Gasmesser so construirt und mindestens in solchem Betrage mit Wasser gefüllt ist, dass das Zufluss- und das Abflussrohr des Gases niemals communiciren, dass also kein Gas ungemessen, d. h. ohne zeitweilig in einer Maasskammer der Trommel nach beiden Seiten abgesperrt gewesen zu sein, den Gasmesser passiren kann, hängt die einer Umdrehung entsprechende Gasmasse nach Obigem ab vom Wassergehalt, von der Niveaudifferenz h der bezw. unter den Pressungen p_1 und p_2 befindlichen Wasseroberflächen H_1H_1 und H_2H_2, sowie vom Zustande des Gases selbst, d. h. von seinem Drucke p_1 und seiner Temperatur. Die Messung ist um so zuverlässiger, je mehr diese Umstände constant und denjenigen gleich bleiben, bei welchen die Aichung, d. h. die Controle der Angaben des Zählwerkes bei anderweitiger Bestimmung des hindurch gegangenen Gasquantums stattfand. Auf eine grosse Genauigkeit ist dabei nicht zu rechnen, und pflegen auch die amtlichen Aichungsordnungen einen Fehler von 2 % zu gestatten.

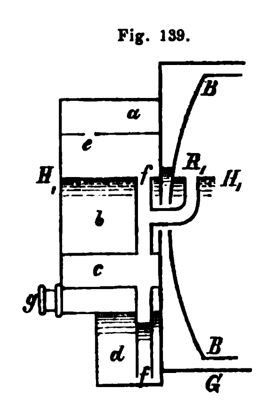
Was den Zustand des Gases betrifft, so ist die Veränderlichkeit des Druckes p_1 nur von untergeordneter Bedeutung; denn wenn auch Druckdifferenzen bis zu 30 Millimeter Wassersäule in der Hauptleitung vorkommen, so entsprechen dieselben doch nur einer verhältnissmässigen Differenz der specifischen Masse des Gases von 0,3 %. Viel grösser ist der Einfluss der Temperatur, indem eine Aenderung der specifischen Masse von 2 % schon durch eine Temperaturänderung von etwa $5\,^1/_2$ Grad C. bewirkt wird. Die Aufstellung des Gasmessers an einem Orte von möglichst constanter Temperatur ist deshalb wesentlich zu fordern.

Die Niveaudifferenz h ist proportional dem Widerstandsmoment gegen die Drehung der Trommel, welches zum Theil, besonders sofern es von der Reibung zwischen den Trommelwänden und dem Wasser herrührt, mit der Drehungsgeschwindigkeit wächst; doch ist auch im Uebrigen der Widerstand, namentlich der durch das Zählwerk verursachte, in hohem Grade veränderlich. Bei 120 Umdrehungen in der Stunde ist h im Mittel etwa $= 4$ Millimeter, und sind bei verschiedenen Geschwindigkeiten auf Höhenunterschiede der Horizontalebene H_1H_1 von etwa 2 Millimeter zu rechnen. Die Genauigkeit der Messung wird dadurch um so weniger beeinträchtigt, je kleiner die zwei Querschnitte sind, in welchen die Ebene H_1H_1 eine Maasskammer zur Zeit der Gasabsperrung in ihr schneidet, je mehr also diese Kammern gegen ihre Mündungen hin verengt sind, wie es bei den

üblichen Gasmessern in Folge besonderer Gestaltung der Zwischenwände befriedigend der Fall ist.

Am wichtigsten ist die Erhaltung einer bestimmten Wasserfüllung, also einer bestimmten Höhenlage der Ebene $H_1 H_1$ bei gegebener Niveaudifferenz h. Zu dem Ende hat das Gehäuse G der üblichen nassen Gasmesser an der Eintrittsseite des Gases einen kastenförmigen Vorbau, der, soweit er hier in Betracht kommt, aus 4 Kammern a, b, c, d (Fig. 139) besteht. Die erste Kammer a, in welche das Gas zunächst eintritt, communicirt mit der zweiten b durch eine Ventilöffnung e, die Kammer b mit c und d durch ein Rohr ff, welches innerhalb b in der Ebene $H_1 H_1$, innerhalb d dagegen nahe dem Boden unter Wasser mündet. Unterhalb $H_1 H_1$ communicirt ausserdem die Kammer b mit dem Wasserraume des Gehäuses G und der Trommel, und ist durch die betreffenden Oeffnungen hindurch das Gasrohr R_1 vom Rohre ff abgezweigt, um innerhalb des durch den gewölbten Boden BB begrenzten Trommelraumes in der Ebene $H_1 H_1$ zu münden. Das Gas gelangt somit auf dem Wege $aefR_1$ in die Trommel. Unter diesen Umständen ist ein Steigen des Wasserspiegels $H_1 H_1$ über die oberen Mündungen der Röhren ff und R_1 hinaus, wie es theils durch Ansammlung von Condensationswasser aus der Rohrleitung in dem tief stehenden Gasmesser, theils durch absichtliche Nachfüllung von Wasser veranlasst werden könnte, so lange unmöglich, als das durch ff abfliessende überschüssige Wasser noch nicht diese ganze Röhre sammt der Kammer c (unter entsprechender Compression der über dem Wasser in d befindlichen Luft) ausfüllt. Wäre Letzteres der Fall, so würde die Gasströmung durch R_1 unterbrochen und der Consument durch anfangs stossweise brennende, demnächst ganz verlöschende Flammen darauf aufmerksam gemacht. Durch Oeffnen der Schraube g, die den Luftraum der untersten Kammer d für gewöhnlich schliesst, kann dann das angesammelte Wasser hier abgelassen werden, was namentlich stets bei der Nachfüllung von Wasser zu geschehen hat. Ist nun auf solche Weise dem Steigen der Wasseroberfläche $H_1 H_1$ über eine gewisse Grenze hinaus (im Interesse des Consumenten) sicher vorgebeugt, so ist dagegen das Sinken derselben unter diese Grenze, herbeigeführt durch überwiegende Verdunstung des Wassers, nicht gehindert; zwar wird die Oeffnung e durch ein Ventil geschlossen, wenn der dasselbe vermittels einer Ventilstange tragende (in Fig. 139 nicht gezeichnete)

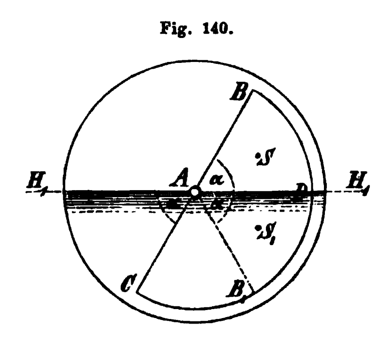
Fig. 139.



Schwimmer mit dem Wasserstande in der Kammer *b* unter eine gewisse Grenze sinkt, doch muss diese hinlänglich tief gelegt werden, um ein lästiges Verlöschen der Flammen nur in Ausnahmefällen eintreten zu lassen, so dass unterdessen schon längst eine erheblich fehlerhafte Messung (zum Nachtheile des Producenten) stattgefunden haben kann, wogegen die Gasfabriken durch periodisches Nachfüllen von Wasser in längeren Fristen sich einigermaassen zu schützen pflegen.

Indem die Verdunstung des Wassers mit seiner Temperatur zunimmt, wird die mit entsprechender Erniedrigung der Wasseroberfläche $H_1 H_1$ verbundene Benachtheiligung des Gasproducenten zwar theilweise ausgeglichen durch eine zu Ungunsten des Consumenten gleichzeitig stattfindende Verkleinerung der specifischen Masse des Gases, doch bleibt diese Verdunstung immerhin eine Quelle erheblicher Unsicherheit der Messung, und hat man sich vielfach bemüht, dem Uebelstande abzuhelfen theils durch Anwendung einer Sperrflüssigkeit, welche, wie Glycerin, der Verdunstung unter den obwaltenden Umständen nur sehr wenig unterworfen ist, theils durch künstliche Mittel zur Erhaltung einer constanten Wasseroberfläche $H_1 H_1$ trotz der Verdunstung. Sehr einfach wird dieser letztere Zweck erreicht durch den von Elster angegebenen und bei seinen Gasmessern seit langer Zeit mit gutem Erfolge benutzten Schwimmer: Fig. 140. Diese Figur stelle einen dem Gasmessergehäuse vorgebauten cylindrischen Kasten dar, in welchen oben das Gas eintritt, während das unten in ihm enthaltene Wasser mit dem Wasser im Gehäuse und in der Trommel communicirt. In diesem Kasten befinde sich ein Schwimmer von halbcylindrischer Form, nämlich mit halbkreisförmigen Endflächen ABB_1C, bestehend (wie wenigstens zunächst angenommen werde) als massiver Körper aus einer homogenen Substanz, die nur halb so schwer ist wie Wasser; er sei leicht drehbar um die horizontale Axe A des Kastens, die zugleich die geometrische Axe des Kreiscylinders ist, von welchem der Schwimmer die Hälfte darstellt. Unter diesen Umständen ist leicht einzusehen, dass der Schwimmer nur dann, in diesem Falle aber bei jeder Neigung $\alpha = H_1AC = DAB = DAB_1$ gegen H_1H_1 im Gleichgewichte sein kann, wenn H_1H_1 durch die Axe A hindurch geht. Ist das nämlich bei irgend einem Neigungswinkel α der Fall, so haben für den Sector CAB_1 des

Fig. 140.



Schwimmers die eigene Schwere und der Auftrieb des Wassers eine die Axe A schneidende, somit nicht auf Drehung abzielende Resultante, während der andere Sector BAB_1 durch H_1H_1 in zwei Hälften getheilt wird, deren Schwerpunkte S und S_1 vertical über einander liegen, so dass der in S_1 angreifende Auftrieb des Wassers mit der Resultanten = der Summe der in S und S_1 angreifenden Schwerkräfte der Sectoren DAB und DAB_1 im Gleichgewichte ist. Wenn aber die Wasseroberfläche sinkt, so wird das Gleichgewicht gestört, bis durch die im Sinne einer Verkleinerung von α erfolgende Drehung des Schwimmers so viel mehr Wasser verdrängt ist, dass H_1H_1 wieder durch die Axe A hindurch geht. Die Veränderlichkeit von α ist zwischen einem spitzen Winkel α_1 und einem stumpfen Winkel α_2 begrenzt, und wenn das Instrument bis zu dieser letzteren Grenze $\alpha = \alpha_2$ mit Wasser angefüllt ist (wobei wieder ein etwaiger Ueberschuss durch ein oben in der Höhe von A mündendes Rohr abläuft), so dauert es lange, bis durch Verdunstung von Wasser die untere Grenze $\alpha = \alpha_1$ erreicht ist, bei welcher man die Gaszuleitung durch diesen Regulirungsschwimmer kann schliessen lassen an Stelle des gewöhnlichen im Anschlusse an Fig. 139 besprochenen Ventilschwimmers. Zu bemerken ist schliesslich, dass der hier besprochene Schwimmer thatsächlich nicht als massiver Körper, sondern als ein hohler Halbcylinder aus Blech angefertigt zu werden pflegt, dessen Gewicht ohne die stets für sich im Gleichgewicht um die Axe A befindliche ebene Blechplatte BAC halb so gross sein soll wie das Gewicht eines gleich grossen Wasservolumens. Ein solcher Schwimmer entspricht zwar der erklärten Wirkungsweise nicht vollkommen, jedoch mit um so grösserer Annäherung, je mehr sein Gewicht in die zwei halbkreisförmigen ebenen Blechplatten verlegt, aus je dünnerem Blech also die halbcylindrisch gebogene Wand hergestellt wird. —

Die Schwierigkeit der Sicherung eines unveränderlichen Wasserstandes, sowie auch die Störungen, denen nasse Gasmesser bei Frost und bei beträchtlichen Druckdifferenzen unterworfen sind, haben Veranlassung zur Construction von trockenen Gasmessern gegeben, die seit 1844 besonders durch A. Croll und W. Richards eine praktisch bewährte Form erhielten. Die Einrichtung ist in der Hauptsache folgende. In einem Kasten K ist eine mit einer ebenen Wand desselben parallele runde Scheibe S normal zu jener Wand und somit zu sich selbst beweglich, während sie am Rande mit einem entsprechenden auf der Kastenwand befestigten Ringe durch einen eigens präparirten ringförmigen Lederschlauch verbunden ist; derselbe bildet einen ringsum laufenden Wulst, der sich um so mehr abflacht (einem Hohlcylinder nähert), je mehr sich

die Scheibe S von der Kastenwand entfernt. Indessen ist diese Entfernung dadurch in bestimmte Grenzen eingeschlossen, dass die Scheibe durch einen geeigneten Mechanismus (Schwingkurbelmechanismus, dessen Schwinge von S hin und her gedreht wird) mit einer rotirenden Welle W zwangläufig zusammenhängt, von welcher aus zugleich ein Muschelschieber in einem Schieberkasten bewegt wird behufs einer solchen Vertheilung des in diesen Kasten mit dem Drucke p_1 einströmenden Gases, dass es abwechselungsweise in die erste und zweite der beiden Abtheilungen einströmt, in welche der Kasten K durch die Scheibe S nebst Lederschlauch getheilt wird, während gleichzeitig aus der anderen Abtheilung das beim vorigen Spiel eingeströmte Gas durch die Höhlung des Schiebers hindurch in das Gasabflussrohr R_2 mit dem kleineren Drucke p_2 entweicht. Der ganze Mechanismus ist demjenigen einer ohne Expansion doppelt wirkenden Dampfmaschine entsprechend, deren Dampfcylinder durch den Kasten K und deren Kolben durch die mit dem Lederschlauch verbundene Scheibe S ersetzt ist, die ebenso wie der Kolben, aber ohne Reibung und doch mit dichtem Abschlusse abwechselungsweise im einen und anderen Sinne ein stets gleiches Volumen V als Einheit des zu messenden Gasvolumens durchläuft. Die Bewegung wird unterhalten durch die Druckdifferenz $= p_1 - p_2$ des ein- und ausströmenden, also des einer- und andererseits von der Scheibe S befindlichen Gases, die sich dem Widerstande entsprechend von selbst regulirt. Die Gleichförmigkeit des Gasstromes und des Druckes p_2 im Abflussrohr R_2 wird dadurch erhöht, dass zwei gleiche solche Apparate mit derselben rotirenden Welle W so verbunden werden, dass von den zwei Scheiben S sich stets die eine in einer mittleren Lage befindet, wenn die andere am Ende ihres Weges angekommen ist.

Die Abhängigkeit der gemessenen Gasmasse vom Zustande (Druck und Temperatur) des Gases ist natürlich bei trockenen Gasmessern dieselbe wie bei nassen, kann aber nöthigenfalls in Rechnung gestellt werden. Im Uebrigen sind auch die trockenen Gasmesser mit Mängeln behaftet, die besonders in beschränkter Geschmeidigkeit und Haltbarkeit des Leders und in der Mangelhaftigkeit des dichten Schieberabschlusses ihren Grund haben; auch können merkliche Aenderungen des Messungsergebnisses durch kleine Aenderungen der Gasvertheilung, nämlich dadurch verursacht werden, dass Oeffnung und Schliessung der Gaswege durch den Vertheilungsschieber nicht immer genau denselben Lagen der beweglichen Scheibe S entsprechen. Indessen sind diese Fehler von solcher Art, dass sie durch sorgfältige Ausführung erheblich vermindert werden können. Ob sie dann kleiner zu erhalten sind, als diejenigen von nassen Gasmessern, ist lediglich Sache



der Erfahrung, welche vielfach, besonders in England, auch in manchen Städten Deutschlands, zum Ersatze der nassen Gasmesser durch trockene Veranlassung gegeben hat.

§. 137. Wassermesser.

Instrumente zur Messung von Wasser, überhaupt von wässerigen Flüssigkeiten, die im Allgemeinen je nach den Umständen und Anforderungen besonderer Zwecke von sehr mannigfach verschiedener Art sein können, sollen hier nur unter der Voraussetzung besprochen werden, dass sie ähnlich wie die im vorigen Paragraph betrachteten Gasmesser nicht nur ganz automatisch wirken, sondern auch an beliebiger Stelle in eine Rohrleitung eingeschaltet werden können, ohne einen grösseren, als zur Ueberwindung von Widerständen unvermeidlichen Druckverlust zur Folge zu haben, so dass also z. B. das in einer städtischen Wasserleitung zugeführte Wasser auch nach seiner Messung noch bis zum Dache des betreffenden Gebäudes aufzusteigen, das Speisewasser eines Dampfkessels in diesen einzuströmen im Stande ist u. s. f. Wassermesser von solcher Art beruhen entweder auf demselben Princip wie die erwähnten Gasmesser, nämlich darauf, dass ein bestimmter Raum wiederholt mit dem Wasser abwechselungsweise angefüllt und entleert und die Anzahl dieser Wiederholungen durch ein Zählwerk registrirt wird, oder auf indirecter Messung des relativen Weges, längs welchem das Wasser durch einen bestimmten Querschnitt fliesst, durch Registrirung der Umdrehungen eines rotirenden festen Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeit in bestimmter Weise von jener relativen Geschwindigkeit abhängt, mit welcher das Wasser den fraglichen Querschnitt durchströmt. Mit Rücksicht auf diese zweierlei Wirkungsweisen von Wassermessern können sie als stereometrische und tachometrische unterschieden werden.

Bei den stereometrischen Wassermessern wird der Schluss (die Begrenzung) des periodisch mit Wasser anzufüllenden und zu entleerenden, übrigens von einer starrwandigen Kammer gebildeten Maassraumes durch einen relativ gegen die Kammerwand beweglichen Körper vermittelt, der ein gleichfalls starrer Körper (ein Kolben) oder ein zwar fester, aber ganz oder theilweise biegsamer Körper (eine Membran) oder eine Flüssigkeit sein kann, so dass danach diese Wassermesser als solche mit Kolbenschluss, Membranschluss oder Flüssigkeitsschluss zu unterscheiden sind.

Die Ausführungsform eines stereometrischen Wassermessers mit Kolbenschluss, bei welchem die relative Bewegung des den Maass-

raum durchlaufenden Kolbens durch eine gewisse Druckdifferenz des auf beiden Seiten desselben befindlichen Wassers bewirkt wird, kann ebenso mannigfach verschieden sein, wie diejenige einer analogen Kraftmaschine, bei welcher nur der Unterschied stattfindet, dass der entsprechend grössere Ueberdruck auf den Kolben ausser der Ueberwindung von Bewegungswiderständen der Maschine selbst noch eine anderweitige Arbeit zu leisten hat. Vor Allem kann hier wie dort der Kolben entweder eine hin- und hergehende und dann am besten geradlinige oder eine stetig in einerlei Sinn rotirende Bewegung haben.

Der erste Fall empfiehlt sich dadurch, dass ein geradlinig in entsprechendem Hohlcylinder beweglicher Kolben viel besser dicht schliessend zu erhalten ist, als ein rotirender, und haben deshalb solche Wassermesser zu technischen Zwecken, z. B. zur Messung des Speisewassers von Dampfkesseln, mehrfach nützliche Anwendung gefunden. Durch den Umstand aber, dass sie einer besonderen Steuerung bedürfen, um das zu messende Wasser abwechselungsweise auf die eine und andere Seite des Kolbens zu leiten, wird für die gewöhnliche Verwendung zum Zwecke der Zumessung des Wassers aus einer städtischen Leitung an die einzelnen Consumenten ihre Einrichtung zu complicirt und ihr Preis zu hoch, während es andererseits bei dem geringen Preise des Wassers an sich hier zulässig erscheint, möglichste Einfachheit, Dauerhaftigkeit und Billigkeit bis zu gewissem Grade durch Verminderung der Messungsgenauigkeit zu erkaufen. Wenn für einen Pfennig als kleinste Wertheinheit 0,1 Cubikmeter Wasser geliefert wird, so kann es auf Messungsfehler von solcher Grösse beim Wasserverkauf nicht ankommen, während sie für technische Messungszwecke sehr erheblich sein mögen.

Wassermesser mit rotirender Kolbenbewegung sind im Allgemeinen so eingerichtet, dass in die Rohrleitung ein Gehäuse von der Form eines hohlen Umdrehungskörpers eingeschaltet ist, in welchem durch den Ueberschuss des Druckes im Zuflussrohr über denjenigen im Abflussrohr ein drehbarer Kolben (von sehr mannigfacher Form) bezw. ein System von Kolben in Rotation versetzt wird, während diese so angeordnet sind, dass die von ihnen begrenzten Maasskammern bei der Rotation abwechselungsweise sich vergrössernd mit dem Zuflussrohre, sich verkleinernd mit dem Abflussrohre communiciren, dazwischen aber möglichst ohne Grössenänderung nach beiden Seiten abgesperrt sind.

Stereometrische Wassermesser mit Membranschluss, z. B. nach Art der im vorigen Paragraph besprochenen trockenen Gasmesser, erfüllen zwar insofern, als sie bei fehlerfreier Beschaffenheit der Membran



einen dichten Abschluss ohne Reibung gestatten, den Messungszweck bei leichtem Gange so vollkommen wie möglich; abgesehen davon aber, dass sie analog den Kolbenapparaten mit hin- und hergehender Kolbenbewegung einer besonderen Steuerung bedürfen, um das Wasser abwechselungsweise auf die eine und die andere Seite der mit ihrem Rande an der Gehäusewand befestigten Membran zu leiten, ist ihrer allgemeineren Benutzung die allzu beschränkte Widerstandsfähigkeit der aus welcher Substanz immer bestehenden Membran gegen den Einfluss ihrer oft wiederholten Deformation unter grösserem Druck und gegen die Einwirkung des Wassers im Wege, besonders wenn dieses, wie z. B. zur Dampfkesselspeisung, von höherer Temperatur ist. Bei Gasmessern macht sich dieser Uebelstand weniger geltend, weil höhere Temperaturen dabei nicht vorkommen und auch die Druckdifferenzen stets sehr klein sind.

Ein stereometrischer Wassermesser mit Flüssigkeitsschluss und rotirender Bewegung würde aus dem nassen Gasmesser (Fig. 138, §. 136) dadurch hervorgehen, dass als Sperrflüssigkeit eine solche verwendet würde, die schwerer als Wasser, und nicht mischbar mit ihm ist, wie namentlich Quecksilber, wenn es sich nicht aus leicht begreiflichen Gründen verböte. Auch könnte dieser Gasmesser in umgekehrter Stellung als Wassermesser dienen, entsprechend einer Drehung von Fig. 138 um 180°, so dass die Röhren R_1 und R_2 nach unten mündeten und der dort mit Gas erfüllte Raum Wasser, der Wasserraum Luft als Sperrflüssigkeit enthielte; in dem mit der Zuflussröhre R_1 communicirenden Trommelraume stände das Wasser höher, als in dem mit R_2 communicirenden übrigen Trommel- und Gehäuseraume. Bei der durch die umgekehrte Figur 138 dargestellten Lage wäre die Kammer BC in der Füllung mit Wasser begriffen, in der Kammer AB das zu messende Wasser abgesperrt, die Kammer DA in der Entleerung begriffen und CD ganz mit Luft erfüllt, aber eben im Begriff, mit ihrer vorderen Mündung in das Wasser einzutauchen; die Scheidewand A wäre diejenige, auf deren unter Wasser befindlichen Theil augenblicklich der die Trommel drehende Ueberdruck wirkt, um aber alsbald, nachdem ihr äusserer Rand a_2 in das Wasser eingetaucht ist, diese Function an die folgende Wand B abzutreten. Für eine unter atmosphärischem Drucke stattfindende Messung wäre eine solche Einrichtung nicht unbrauchbar, aber bei Einschaltung in eine ununterbrochene Rohrleitung würde die Erhaltung der comprimirten Luft im oberen Theile des Gehäuses noch viel grössere Schwierigkeit machen, als die des Wassers in einem nassen Gasmesser.

Wenn somit die nach Art von Fig. 138 eingerichteten Wassermesser



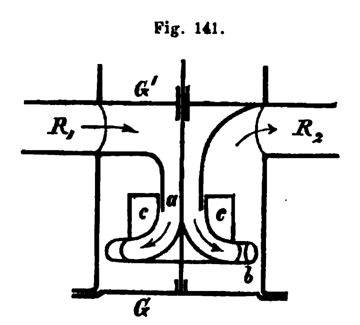
sich zu stereometrischer Functionirung kaum eignen, so empfehlen sie sich doch durch compendiöse Form, Einfachheit und Dauerhaftigkeit, indem sie abgesehen vom Zählwerke nur einen einzigen beweglichen und zwar um eine Axe rotirenden starren Körper enthalten, der nur durch die Lagerung dieser Axe Veranlassung zu Abnutzung giebt. Ihre allgemeine Form liegt deshalb auch den tachometrischen Wassermessern zum Grunde, die z. Z. fast ausschliesslich bei städtischen Wasserleitungen zur Registrirung des Wasserverbrauches der Consumenten benutzt werden. Die Ausführung derselben ist namentlich durch Siemens seit 1856, von welchem Jahre das erste bezügliche englische Patent datirt, zu einem höheren Grade von Vollkommenheit gebracht worden, indem dabei der rotirende Körper ursprünglich als ein Reactionsrad mit je nach der Grösse variirender Zahl von gekrümmten Canälen, später auch besonders für kleinere Dimensionen noch einfacher als ein Stossrad mit ebenen radial gestellten Flügeln (Schaufeln) ausgeführt wurde. Trotzdem hier zwischen dem Zufluss- und dem Abflussrohre des Wassers eine beständige Communication stattfindet, so dass bei sehr kleiner Durchflussgeschwindigkeit des Wassers ihr Verhältniss zur Drehungsgeschwindigkeit des Rades allerdings sehr schwankend sein, ja das Rad ganz in Ruhe bleiben, das Wasser ganz ungemessen das Instrument durchfliessen kann, lehrt doch die Erfahrung, dass im Durchschnitt diese Wassermesser ohne Reparaturbedürftigkeit während etwa dreijährigem Dienste eine Messungsgenauigkeit von 3 % gestatten und damit dem Bedürfnisse des Wasserverkaufs (im Gegensatze zu den Anforderungen technisch-wissenschaftlicher Zwecke, die nach wie vor eine stereometrische Messungsmethode vorziehen lassen) genügend entsprechen.

Die Trommel des im Princip durch Fig. 138 dargestellten Gasmessers würde sich als ein Wasser messendes Reactionsrad verhalten, wenn der ganze Trommel- und Gehäuseraum mit Wasser erfüllt, das Zuflussrohr R_1 aber wasserdicht durch die betreffende Seitenwand der Trommel hindurchgeführt wäre, um das Wasser zu hindern, auf anderem Wege zum Abflussrohr R_2 zu gelangen, als dadurch, dass es die gekrümmten Canäle zwischen den Wänden A, B, C, D durchströmend und aussen bei a_2, b_2, c_2, d_2 ausfliessend die Trommel durch den Reactionsdruck in Drehung versetzt. Bei dem Siemens'schen Wassermesser mit Reactionsrad sind die Mittellinien der Canäle des letzteren doppelt gekrümmte Curven; seine Einrichtung und Anordnung ist durch Fig. 141 angedeutet. Das aus dem Rohr R_1 kommende Wasser fliesst in das Reactionsrad im Sinne seiner Axe bei a ein vermittels eines Mundstückes, welches wasserdicht in das darum rotirende Rad hineinreicht. Am Umfange des letzteren, u. A. bei b



in Fig. 141, fliesst das Wasser horizontal in tangentialer Richtung aus, um demnächst im Gehäuse G aufwärts und durch R_2 weiter zu fliessen. Die bei c, c angedeuteten radialen Flügel sollen ähnlich wie die Windfänge gewisser Uhrwerke eine regulirende Wirkung auf die Drehung des Rades ausüben, dessen Welle wasserdicht in ein Gehäuse G' hineinreicht, um das darin befindliche Zählwerk in Bewegung zu setzen.

Fig. 141.



Zu näherer Untersuchung des Wirkungsgesetzes dieses Gasmessers werde angenommen, dass die Axe des Reactionsrades vertical ist und dass die Mittellinien der Röhren R_1, R_2 in einer horizontalen Geraden liegen;

a sei die Höhe dieser Geraden über der Einflussmündung a in das Rad,
b die Höhe der letzteren über den Mittelpunkten der Ausflussmündungen b,
F die Summe der Flächeninhalte dieser Ausflussmündungen,
r ihr Mittelpunktsabstand von der Axe,
u die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in den gleich weiten Röhren R_1 und R_2,
h_1 seine Druckhöhe in R_1,
h_2 seine Druckhöhe in R_2,
u_1 die Geschwindigkeit in der Mündung a (zugleich absolute Ausflussgeschwindigkeit aus R_1 und relative Einflussgeschwindigkeit in das Rad),
H_1 die Druckhöhe daselbst,
w die relative, u_2 die absolute Ausflussgeschwindigkeit aus der Mündung b,
H_2 die Druckhöhe daselbst,
ω die Winkelgeschwindigkeit, $v = r\omega$ die Peripheriegeschwindigkeit des Rades.

Mit Rücksicht darauf, dass die Arbeit der Centrifugalkraft pro 1 Kgr. Wasser auf dem Wege von a bis b:

$$k = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r x\,dx = \frac{\omega^2}{g}\frac{r^2}{2} = \frac{v^2}{2g}$$

ist, gelten dann im Beharrungszustande für die absolute Bewegung von R_1 bis a, für die relative Bewegung von a bis b und für die absolute Bewegung von b bis R_2, für welche die Widerstandshöhen bezw. $= h', h'', h'''$ seien, die folgenden Gleichungen der lebendigen Kraft (siehe Bd. I, §. 78, Gl. 3):

$$\frac{u_1^2}{2g} + H_1 = \frac{u^2}{2g} + h_1 + a - h'$$

$$\frac{w^2}{2g} + H_2 = \frac{u_1^2}{2g} + H_1 + b + \frac{v^2}{2g} - h''$$

$$\frac{u^2}{2g} + h_2 = \frac{u_2^2}{2g} + H_2 - a - b - h'''$$

Ihre Addition ergiebt:

$$\frac{w^2}{2g} + h_2 = \frac{u_2^2}{2g} + h_1 + \frac{v^2}{2g} - (h' + h'' + h''')$$

und wegen $u_2 = w - v$:

$$h_1 - h_2 - (h' + h'' + h''') = \frac{w^2 - v^2 - (w - v)^2}{2g} = \frac{(w - v)\, v}{g}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Theil des ganzen Verlustes $= h_1 - h_2$ an Druckhöhe, welcher durch den Drehungswiderstand des Rades verursacht wird, nämlich = der Arbeit dieses Widerstandes pro 1 Kgr. hindurch fliessenden Wassers. Ist also Rr das betreffende Widerstandsmoment oder R die auf den Abstand r von der Axe reducirte Grösse des Widerstandes, ferner Q_1 das Volumen, γQ_1 das Gewicht des pro Secunde hindurch fliessenden Wassers, so folgt

$$h_1 - h_2 - (h' + h'' + h''') = \frac{Rv}{\gamma Q_1} = \frac{(w - v)\, v}{g}$$

und mit $Q_1 = Fw$:

$$w - v = \frac{gR}{\gamma F w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Der Widerstand R besteht aus zwei Theilen, von denen der eine, herrührend vom Widerstande des Zählwerkes und von der Reibung der Radwelle in ihren Lagern, als unabhängig von v zu betrachten ist, der andere aber, entsprechend der Bewegung des Rades im Wasser des Gehäuses G, proportional v^2 gesetzt werden kann. Mit $R = C + cv^2$, unter C und c Constante verstanden, ergiebt sich dann:

$$w - v = \frac{g}{\gamma F} \frac{C + cv^2}{w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Ist nun Q das in irgend einer Zeit $= t$ durch das Instrument hindurch fliessende Wasservolumen, welches durch die gleichzeitige Umdrehungszahl $= z$ des Rades gemessen werden soll, so ist

$$\left.\begin{array}{l} Q = Fwt \\ z = \dfrac{vt}{2\pi r} \end{array}\right\} \quad \text{also} \quad \frac{Q}{z} = 2\pi r F \frac{w}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Die solcher Messung zu Grunde liegende Voraussetzung, dass Q und s einander proportional sind, ist also, da $2\pi r F$ ein constanter Factor ist, um so zutreffender, mit je grösserer Annäherung w und v einander proportional gesetzt werden können. Das Verhältniss dieser Geschwindigkeiten ist durch die Gleichung (2) bestimmt, welche geschrieben werden kann:

$$\frac{w}{v} - 1 = \frac{gc}{\gamma F}\left(1 + \frac{C}{cv^2}\right)\frac{v}{w}.$$

Derselben entspricht ein constanter Werth von $\frac{w}{v}$ mit der Annäherung, mit welcher

$$\frac{gc}{\gamma F}\left(1 + \frac{C}{cv^2}\right) = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

= einer Constanten gesetzt werden kann, nämlich

$$\left(\frac{w}{v}\right)^2 - \frac{w}{v} = m; \quad \frac{w}{v} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Jene mit m bezeichnete Grösse ist aber um so weniger veränderlich, je kleiner C im Vergleich mit cv^2, d. h. je kleiner die Reibung des Zählwerkes und der Radwelle im Vergleich mit den Widerständen des Rades im Wasser ist; dadurch sind die Flügel c, c, Fig. 141, als nützlich für die Genauigkeit der Messung begründet. Die Vergrösserung von cv^2 durch Vergrösserung von v zu erzielen, ist beschränkt dadurch, dass entsprechend auch w durch Verkleinerung von F vergrössert werden müsste, womit die Widerstandshöhe h'' und somit der ganze Verlust an Druckhöhe $= h_1 - h_2$ vergrössert würde.

Von der Genauigkeit der Messung, bedingt durch einen möglichst constanten Werth von $\frac{Q}{s}$, also $\frac{w}{v}$, also von m, ist ihre Empfindlichkeit zu unterscheiden, bedingt durch einen möglichst kleinen Werth der Wassermenge Q_1, welche pro Secunde ganz ungemessen, d. h. ohne Bewegung des Reactionsrades dasselbe durchfliessen könnte. Dieselbe ist $= Fw$, wenn w die relative Ausflussgeschwindigkeit aus den Mündungen b bedeutet, welche $v = 0$ entspricht, nach Gl. (12) also

$$w = \sqrt{\frac{gC}{\gamma F}}; \quad Q_1 = \sqrt{\frac{gCF}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Die Empfindlichkeit wird somit gesteigert durch Verkleinerung von C und von F; doch ist die Verkleinerung von F auch hier beschränkt, weil die ihr entsprechende Vergrösserung von w und von v eine durch das Zählwerk zu bewirkende stärkere Uebersetzung ins Langsame, somit ein mit grösserer Reibung verbundenes complicirteres Zählwerk erfordern würde.

Der bei diesen Entwickelungen vorausgesetzte Beharrungszustand findet nicht statt zu Anfang und zu Ende der Wasserströmung durch das Instrument hindurch, und kann in der That durch häufige Unterbrechung derselben die Genauigkeit der Messung beeinträchtigt werden. Zwar gleichen sich die Einflüsse der zu beschleunigenden und zu verzögernden Masse insofern aus, als dadurch der Eintritt des Beharrungszustandes bei Beginn der Wasserströmung ebenso verlangsamt wird wie später der Eintritt der Ruhe des Rades; dagegen hat der Bewegungswiderstand, haben also insbesondere die Flügel o, o in dieser Hinsicht eine nachtheilige Wirkung, indem dadurch zwar auch der Eintritt des Beharrungszustandes verzögert, später aber der Eintritt der Ruhe beschleunigt wird. Bei häufiger Unterbrechung der Wasserströmung zeigt also das Instrument eine etwas zu kleine Durchflussmenge an, ebenso wie bei dauernder Wasserströmung mit sehr kleiner Geschwindigkeit, entsprechend nach Gl. (3)—(5) etwas grösseren Werthen von m, $\frac{w}{v}$ und $\frac{Q}{z}$.

Uebrigens ist wegen unsicherer Kenntniss mehrerer der in den Gleichungen (3)—(5) vorkommender Buchstabengrössen in allen Fällen der Werth von $\frac{Q}{z}$, welcher mittleren Werthen von Q_1 entspricht und der Skala des Zählwerkes behufs unmittelbarer Ablesung von Q zu Grunde liegt, durch Versuche zu bestimmen.

In noch höherem Grade ist das nöthig bei dem Siemens'schen Wassermesser mit Stossrad. Bei demselben strömt das Wasser in mehreren, gewöhnlich 4 Strahlen in nahezu tangentialer Richtung in ein Gehäuse ein, das in die Rohrleitung eingeschaltet ist und in welchem dadurch das Wasser in eine wirbelnde Bewegung versetzt wird, bevor es, durch Stauschaufeln beruhigt, weiterfliesst. Das in diesem Gehäuse coaxial mit ihm gelagerte Stossrad wird dadurch in Drehung versetzt mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, die derjenigen ω_1 jenes Wasserwirbels um so näher kommt, je kleiner die Reibungswiderstände sind, die sich der Drehung des Rades entgegensetzen und je vollständiger der Axialschnitt des Gehäuses von den Flügeln des Stossrades ausgefüllt wird. Indem aber ω_1 nach einem von den Dimensionen des Gehäuses abhängigen Verhältnisse dem pro Secunde hindurch strömenden Wasservolumen Q_1 proportional ist, ergiebt sich auch ω nahe proportional Q_1 oder für irgend eine Zeit t die Umdrehungszahl $z = \frac{\omega t}{2\pi}$ des Rades proportional der Wassermenge $Q = Q_1 t$.

II. Uhren. (Chronometer.)

§. 138. Einleitung.

Die Zeit kann gemessen werden durch gleichförmige Bewegungen oder durch Bewegungen von constanter Gesammtdauer, insbesondere durch Schwingungen. Im ersten Falle ist sie einem gewissen Wege proportional und deshalb die Messbarkeit beliebig kleiner Zeitintervalle nur durch diejenige der entsprechenden Wege beschränkt. Im zweiten Falle ist die Dauer der betreffenden Schwingung oder sonstigen Bewegung das kleinste unmittelbar messbare Zeitintervall, abgesehen von blosser Schätzung aliquoter Theile desselben sowie von Methoden zu mittelbarer Messung kleinerer Zeitintervalle, z. B. vermittels zweier gleichzeitig beobachteter Schwingungen von verschiedener Dauer.

Gleichförmige zur Zeitmessung geeignete Bewegungen sind u. A. die Drehung der Erde um ihre Axe, der permanente Ausfluss des Wassers aus der Oeffnung eines Gefässes, in welchem ein constanter Wasserstand erhalten wird, die Bewegung eines niedersinkenden und dabei einen Windfang in Umdrehung setzenden schweren Körpers nach Eintritt des Beharrungszustandes, die Bewegung eines conischen Pendels. Bewegungen von constanter Dauer sind u. A. der Ausfluss einer bestimmten Menge Wasser oder Sand aus einer Oeffnung unter bestimmten Umständen, sowie Schwingungen eines ebenen Pendels oder einer Spiralfeder bei gleich bleibenden Umständen.

Die Zeit einer Umdrehung der Erde um ihre Axe, ein sogenannter Sterntag, d. i. die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen eines Fixsternes, ist mit ihren aliquoten Theilen die eigentliche definitorisch als solche festgesetzte Zeiteinheit, durch Vergleichung mit welcher sich andere Bewegungen als gleichförmig oder von constanter Dauer und somit andere Hülfsmittel als brauchbar zur Zeitmessung erst mehr oder weniger mittelbar ergeben. Selbst der gewöhnlich als Zeiteinheit festgesetzte mittlere Sonnentag, d. i. die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Culminationen der Sonne, = 86400 Secunden mittlerer Sonnenzeit ist im Grunde durch den Sterntag dadurch bestimmt, dass er im Verhältnisse 86400 : 86164,09 länger als dieser ist.

Die der scheinbaren Bewegung der Sonne entsprechende, im Gegensatze zur mittleren sogenannte wahre Sonnenzeit kann bei Tage in freilich sehr unvollkommener Weise durch die Länge und Richtung des von einem

Körper geworfenen Schattens gemessen werden. Die dazu dienenden sogenannten Sonnenuhren sind ohne Zweifel die ältesten Vorrichtungen zur Zeitmessung; ihre Erfindung wird dem chaldäischen Astronom Brosius (um 640 v. Chr.) zugeschrieben. Durch das Bedürfniss der Zeitmessung auch bei bedecktem Himmel und bei Nacht veranlasst, wurden später etwa 400 Jahre v. Chr. (angeblich von Platon) die Wasser- und Sanduhren erfunden. Letztere haben sich zur Beobachtung bestimmter Zeitabschnitte bis auf den heutigen Tag erhalten, abgesehen von häuslichen Zwecken insbesondere zur Beobachtung eines Zeitraumes von 15 oder 30 Secunden beim Loggen behufs der Geschwindigkeitsmessung von Seeschiffen.

Die Erfindung der Uhren mit Räderwerk, durch ein Gewicht getrieben und durch einen Windfang regulirt, wird von Einigen einem gewissen Pacificus in Verona (850 n. Chr.) zugeschrieben, während nach Anderen die Kreuzfahrer dieselben als eine Erfindung der Sarazenen nach Europa gebracht haben sollen. Sichere Nachrichten über dergleichen Thurmuhren (in Padua, Bologna, Paris, Augsburg, Breslau, Strassburg, Speyer) finden sich aus den Jahren 1340—1400 vor.

Die heutzutage gebräuchlichen Uhren benutzen fast nur Schwingungen von gleicher Dauer als Zeitmaass, und zwar Schwingungen entweder eines Pendels oder einer Spiralfeder mit Schwungrad (Unruhe), erstere besonders zu Thurm- und Hausuhren, letztere zu Taschenuhren. Das Pendel wurde zuerst von Huyghens als Regulator von Uhren benutzt (1656), nachdem Galilei (1595) seine Schwingungsgesetze entdeckt hatte. Die Taschenuhren sollen im 16. Jahrhundert von Peter Hele in Nürnberg erfunden, nach anderen Quellen (Beckmann's Beiträge zur Geschichte der Erfindungen) jedoch schon im 15. Jahrhundert zu finden gewesen sein. Diese ältesten Taschenuhren waren übrigens noch ohne regulirende Spiralfeder (Unruhe), indem vielmehr eine freilich unvollkommene Regulirung des bewegenden Effects der Triebkraft vermittels des sogenannten Spindelganges (siehe später) durch den Rückfall in der Hemmung bewirkt wurde; ihr Fortschritt von Curiositäten zu Instrumenten von wissenschaftlicher Bedeutung ist der von Dr. Hooke im Jahre 1660 erfundenen Spiralfeder-Unruhe zu verdanken.

Das Pendel oder die Unruhe würde ohne weitere Hülfseinrichtungen als Zeitmesser benutzt werden können, wenn es sich nur um die Messung kürzerer Zeitabschnitte handelte, innerhalb welcher durch die Bewegungswiderstände (Reibung und Luftwiderstand) der Schwingungswinkel nicht unmerklich klein wird. Allein abgesehen davon, dass die Grösse dieses Winkels, wenn schon einen untergeordneten, so doch für feinere Messungen

und für eine grosse Zahl von Wiederholungen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Schwingungsdauer ausübt, wird auch meistens eine für lange Zeit andauernde Wirksamkeit des Instrumentes verlangt, die ohne Weiteres um so weniger stattfände, als ausserdem ein Zählwerk die Zahl der Schwingungen registriren muss, wodurch neue Widerstände verursacht werden von meistens noch viel bedeutenderer Grösse, als diejenigen des Pendels oder der Unruhe für sich. Es muss deshalb vor Allem ein Motor, nämlich eine Betriebskraft mit entsprechendem Mechanismus vorhanden sein, wodurch bei dem verlangten Beharrungszustande gerade das an äusserem Arbeitsvermögen ersetzt wird, was durch die Widerstände in derselben Zeit verloren geht, nämlich in inneres Arbeitsvermögen umgesetzt wird. Mit Rücksicht auf diesen Motor, welcher für sich eine beschleunigte Bewegung hervorzubringen strebt, erhält das Pendel bezw. die Unruhe, wodurch solche Beschleunigung verhindert, vielmehr ein Beharrungszustand von bestimmter Art erhalten wird, den Namen: Regulator.

Eine ganz bestimmte Grösse der bewegenden Kraft ist zum Betriebe eines gegebenen Uhrwerkes nicht nöthig; wesentlich ist nur, dass sie constant sei. Ist sie nämlich grösser oder kleiner, so findet der Beharrungszustand, der unter allen Umständen eintritt, bei einem grösseren oder kleineren Ausschlagwinkel α des Regulators statt, welchem entsprechend die Länge l desselben (des Pendels oder der Spiralfeder) so regulirt werden kann, dass trotz dieses grösseren oder kleineren Winkels α doch die Schwingungsdauer τ, die vorwiegend von l und nur nebensächlich von α abhängt, eine gegebene Grösse hat. Ist aber der Grösse der vorhandenen Betriebskraft entsprechend die Regulirung von l einmal ausgeführt, so ist es allerdings wesentlich, dass jene Kraft constant bleibe, und sofern das nicht vollkommen zu erreichen ist, insbesondere dann nicht, wenn die Betriebskraft in der Elasticität einer sich allmählig aufdrehenden Spiralfeder besteht, und selbst wenn es zu erreichen wäre, wie bei einem Gewichte als Betriebskraft, doch die Reibungswiderstände des Uhrwerkes mancherlei Aenderungen unterworfen sein können, wodurch dann auch die überschüssige auf den Regulator wirkende Betriebskraft, um die es sich eben handelt, dennoch sich ändert, so bleibt noch übrig, solche Vorkehrungen zu treffen, dass eine gewisse Aenderung der nach Abzug der Widerstände des Uhrwerkes (Räderwerkes) verbleibenden nutzbaren Ersatzkraft für die Widerstände des Regulators eine möglichst kleine Aenderung von τ zur Folge habe. Das ist der Fall, wenn

1) eine selbst beträchtliche Aenderung jener nutzbaren Ersatzkraft eine nur kleine Aenderung von α bewirkt, und



2) eine gewisse Aenderung von α eine möglichst kleine Aenderung von τ bedingt.

Während Letzteres von der Beschaffenheit des Regulators und seiner Schwingungen abhängt, ist zu ersterem Zwecke die Art und Weise von Wichtigkeit, wie der Motor mit dem Regulator verbunden wird, um ihm den Arbeitsverlust bei jeder Schwingung zu ersetzen; der dazu dienende Mechanismus heisst die Hemmung. Er kommt indessen nur bei solchen Uhren vor, bei denen der Regulator eine periodisch schwingende Bewegung hat; er fehlt bei Uhren mit conischem Pendel, die deshalb auch nur dann einen ebenso gleichförmigen Gang erhalten können, wenn mit besonderer Sorgfalt die Betriebskraft und die Widerstände des Uhrwerkes constant erhalten werden.

Als Bestandtheile einer Uhr sind hiernach im Folgenden näher zu betrachten:

a. der Regulator,

b. der Motor,

c. die Hemmung,

d. das Uhrwerk im engeren Sinne, nämlich der Mechanismus, durch welchen die vorgenannten Theile verbunden sind und die jeweilige Zeit beständig für das Auge (durch auf Zifferblättern rotirende Zeiger) oder event. in gewissen Augenblicken für das Ohr (durch ein Schlagwerk) kenntlich gemacht wird. Zu besonderen Zwecken kann das Uhrwerk ausserdem solche Einrichtungen enthalten, die dazu dienen, die Zeiten des Stattfindens gewisser Ereignisse dauernd behufs beliebig späterer Ablesung zu registriren.

a. Der Regulator.

§. 139. Das ebene Pendel.

Ist l die Länge des Pendels = dem Quotient aus dem Trägheitsmoment für die horizontale Aufhängungsaxe durch das Product aus Masse und Schwerpunktsabstand von dieser Axe, ferner α der Ausschlagwinkel = dem Winkel, um welchen die durch die Aufhängungsaxe und durch den Schwerpunkt des Pendels gehende Ebene auf beiden Seiten gegen die durch die Aufhängungsaxe gehende Verticalebene ausschlägt, so ist, wie die Mechanik lehrt, die Zeit einer einfachen Schwingung (abgesehen von Widerständen):

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots\right]$$

oder näherungsweise, wenn α in Bogenmaass ausgedrückt ist:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

oder wenn α in Graden gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + n\alpha^2) \\ \text{mit} \quad n &= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = 0{,}00001904 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ist α verschwindend klein, so ist $\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, und damit ein solches Pendel Secunden schwinge, also $\tau = 1$ sei, müsste

$$l = l_1 = \frac{g}{\pi^2}$$

und insbesondere z. B. an einem Orte, wo $g = 9{,}81$ Mtr. pro Sec. ist,

$$l_1 = \frac{9{,}81}{\pi^2} = 0{,}9940$$

sein. Mit Rücksicht auf die endliche Grösse von α ist aber die Länge des Secundenpendels etwas kleiner, nämlich nach Gl. (1) für $g = 9{,}81$:

$$l_1 = \frac{0{,}994}{(1 + n\alpha^2)^2} \text{ sehr nahe } = 0{,}994\,(1 - 2\,n\alpha^2),$$

z. B. für	$\alpha = 0$	2	4	6 Grad
	$l_1 = 0{,}9940$	0,9938	0,9934	0,9926 Mtr.

Wegen des Luftwiderstandes ist l_1 noch etwas kleiner.

Gemäss der Bedingung unter 2) im vorigen Paragraph ist das Pendel ein um so vollkommenerer Zeitmesser bezw. Regulator einer Uhr, je geringeren Einfluss eine Aenderung von α auf die Schwingungsdauer τ ausübt, je kleiner also nach Gl. (1)

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 2\,n\alpha,$$

d. h. je kleiner α ist. Bei Thurmuhren und ordinären Pendeluhren, bei denen α grösser ist, hat eine geringe Aenderung von α schon wesentlichen Einfluss auf den Gang der Uhr. Wenn z. B. ein solches Pendel bei dem Ausschlagwinkel α Secunden schwingt, also

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + n\alpha^2)$$

ist, und wenn dann α in β sich ändert, so dass

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}(1 + n\beta^2)$$

wird, so macht das Pendel in einer Secunde jetzt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1 + n\alpha^2}{1 + n\beta^2} \text{ nahe } = 1 + n(\alpha^2 - \beta^2)$$

einfache Schwingungen, in einem Tage also

$$86400\, n(\alpha^2 - \beta^2)$$

Schwingungen zu viel. Wäre z. B. $\alpha = 9^0$, $\beta = 8^0$, so machte das Pendel täglich

$$86400 \cdot 0{,}00001904\,(81 - 64) = 28$$

Schwingungen zu viel, d. h. die betreffende Uhr ginge täglich 28 Secunden vor. —

Um die Schwingungsdauer des Pendels auch bei nicht sehr kleinem Ausschlagwinkel von diesem unabhängig zu machen, kann die von Huyghens entdeckte Eigenschaft des Tautochronismus der Cycloide benutzt werden, derzufolge ein schwerer materieller Punkt zu beliebig grossen Schwingungen in einer verticalen Cycloide gleiche Zeiten gebraucht. Gemäss der weiteren Eigenschaft der Cycloide, dass ihre Evolute eine ihr selbst congruente Cycloide ist, deren Scheitelpunkte in den Spitzen der anderen liegen, hat Huyghens ein solches einfaches Pendel von constanter Schwingungsdauer dadurch angenähert hergestellt, dass er eine kleine Kugel, in deren Mittelpunkte ihre Masse als in einem materiellen Punkte concentrirt zu denken ist, an einem Faden aufhing, welcher, in der Spitze einer verticalen und mit horizontaler Basis nach unten convexen Cycloide befestigt, bei den Schwingungen längs dieser sich auf- und abwickeln musste; die bis zum Kugelmittelpunkte gerechnete Fadenlänge war dabei doppelt so gross zu machen wie der Durchmesser des Kreises, von welchem ein Punkt der Peripherie durch Wälzung auf jener Basis die Cycloide beschreibt. Um als Regulator einer Uhr dienen und dazu mit der Hemmung in passende Verbindung gebracht werden zu können, wäre dieses angenähert einfache Huyghens'sche Pendel natürlich nicht geeignet, müsste vielmehr einem sogenannten zusammengesetzten Pendel seine starre Beschaffenheit soweit wie möglich erhalten werden durch Aufhängung der üblichen Pendelstange vermittels eines nur so langen Bandes, als zu dessen Auf- und Abwickelung längs der cycloidischen Evolutenfläche nöthig ist. In der cycloidischen Bahn wäre dann aber streng genommen nicht der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt), sondern der Schwingungsmittelpunkt zu führen, der nur in

einem ganz starren Pendel von fester Lage, hier aber durch möglichste Annäherung an den Massenmittelpunkt zu hinlänglich unveränderlicher Lage zu bringen ist. Ist nämlich m die Masse eines starren Pendels a die Entfernung seines Massenmittelpunktes M von der Aufhängungsaxe A, mk^2 sein Trägheitsmoment für die mit A parallele Schwerpunktsaxe, so ist der Schwingungsmittelpunkt S derjenige Punkt, welcher in dem von M auf A gefällten Perpendikel ausserhalb M so liegt, dass seine Entfernung von A = der Länge des mit dem zusammengesetzten isochron schwingenden einfachen Pendels:

$$l = \frac{m(a^2 + k^2)}{ma} = a + \frac{k^2}{a} \qquad \ldots \ldots \ldots (2)$$

ist. Seine Entfernung $SM = l - a = \frac{k^2}{a}$ vom Massenmittelpunkte ist nur bei constanter Grösse von a, also bei starrer Beschaffenheit des um eine feste Aufhängungsaxe schwingenden Pendels unveränderlich, jedoch um so kleiner, je kleiner k, je mehr also die Pendelmasse um die zur Schwingungsebene senkrechte Schwerpunktsaxe herum (durch Verkleinerung des Durchmessers bei vergrösserter Dicke der üblichen linsenförmigen Hauptmasse) zusammengedrängt ist. Ein zusammengesetztes Cycloidalpendel von solcher Art hatte Prof. Stampfer in Wien für die Rathhausthurmuhr in Lemberg ausgeführt, die im Jahre 1848 zerstört wurde, bis dahin aber mit grosser Genauigkeit gegangen sein soll.

Wegen der Schwierigkeit solcher Ausführungen wird es allgemein vorgezogen, den Zweck isochroner Schwingungen durch kleine Ausschlagwinkel α von gewöhnlichen Kreispendeln zu erstreben in Verbindung mit geeigneten Hemmungen zu möglichster Verhütung von Aenderungen dieses Winkels α gemäss der Bedingung unter 1) im vorigen Paragraph. Nur ist statt der Aufhängung eines solchen Pendels vermittels einer Keilschneide bei besseren Uhren die Federaufhängung üblich, nämlich die Aufhängung mittels zweier leicht biegsamer Stahlblätter, welche, oben und unten zwischen je zwei Metallschienen befestigt, vermittels dieser oben am Uhrgestelle so aufgehängt sind und unten die Pendelstange so tragen, dass sie oben stets vertical, unten im Sinne der Pendelstange gerichtet bleiben und somit periodisch im einen und anderen Sinne je um einen Winkel = dem Ausschlagwinkel α gebogen werden. Fig. 142 stellt eine solche Aufhängung dar, projicirt in der Ansicht links auf die Schwingungsebene, rechts auf eine dazu senkrechte Verticalebene. Ausserdem dass dadurch die Rei-

Fig. 142.

bung und überhaupt die Uebelstände eines oxydirbaren Stahlkeiles vermieden werden, kann die Aufhängungsfeder auch einen gewissen Einfluss auf das Schwingungsgesetz ausüben und zwar

1) dadurch, dass durch ihre Krümmung eine mit dem Ausschlagwinkel wachsende kleine Erhebung des Schwingungsmittelpunktes S über den aus dem Aufhängungspunkte (dem oberen Endpunkte des biegsamen Theiles der Feder) mit seinem Abstande von der tiefsten Lage des Punktes S als Radius beschriebenen Kreis, also eine Annäherung der Bahn von S an die dem Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen entsprechende Cycloide bewirkt wird,

2) dadurch, dass die Biegungsarbeit der Feder bei der Entfernung des Pendels aus seiner verticalen Mittellage eine Zunahme seiner Verzögerung, bei der Annäherung an dieselbe eine Zunahme seiner Beschleunigung, aus beiden Gründen folglich eine Verkürzung der Schwingungsdauer τ, vielleicht auch zugleich eine Verminderung ihrer Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel zur Folge hat, wenn nämlich τ bei grossen Schwingungen verhältnissmässig mehr, als bei kleinen, durch jenen Krümmungswiderstand verkleinert wird.

Ob diese vortheilhafte Wirkung der Federaufhängung, wie behauptet wird,* wirklich in solcher Weise stattfindet, dass es nur darauf ankäme, die Dimensionen der Feder zur Länge und Masse des Pendels in ein passendes Verhältniss zu setzen, um seine Schwingungen ganz isochron zu machen, bedarf näherer Prüfung; doch führt die mathematische Untersuchung bei Berücksichtigung aller Umstände zu weitläufigen Entwickelungen, auf welche hier um so mehr verzichtet werden mag, als sie jene Annahme nicht zu bestätigen scheinen. —

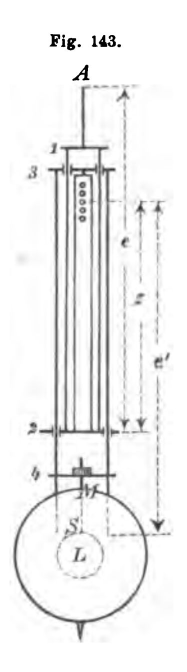
Ein anderer Feind der constanten Schwingungsdauer eines Pendels ist der Einfluss der Temperatur auf die Pendellänge. Bei gewöhnlichen Pendeluhren begnügt man sich in dieser Hinsicht mit gelegentlicher Verstellung der Linse durch eine Stellschraube, bei besseren verfertigt man die Pendelstange aus gut getrocknetem und ausgelaugtem Tannenholz, bei den besten sind besondere Compensationen üblich, die im Allgemeinen auf der verschiedenen Ausdehnbarkeit verschiedener Körper durch die Wärme beruhen. Die bemerkenswerthesten sind das Rostpendel und das Quecksilberpendel.

Das Rostpendel, beruhend auf der grösseren Ausdehnbarkeit des

* Siehe u. A. Moritz Immisch in seiner „Londoner Preisschrift über den Isochronismus der Spiralfeder“, S. 18, und Laboulaye, Traité de Cinématique, 3. ed., p. 618.

Zinks im Vergleich mit Eisen oder Stahl, kann in Einzelheiten sehr mannigfach construirt werden; Fig. 143 diene als Beispiel. Die Pendelstange ist dabei in ihrem obersten Theile eine einfache Rundeisenstange, die sich vermittels des Querstückes 1 in zwei dergleichen Rundeisenstangen fortsetzt. Letztere tragen zwischen sich vermittels des Querstückes 2 eine aufwärts reichende Zinkröhre, in welcher eine von oben her hineinreichende Eisenstange an etwas verschiedenen Stellen (an den Stellen der im oberen Theile dieser Röhre in Fig. 143 angedeuteten Löcher) festgeklemmt oder anderweitig befestigt werden kann. Diese letztere Eisenstange trägt endlich mit Hülfe des Querstückes 3, durch welches die von 1 hinabreichenden Stangen ungehindert hindurchgehen, zwei äussere Rundeisenstangen, die das Querstück 2 unbehindert durchdringen und mit ihren unteren Enden in der Linse befestigt sind. Sie sind fest mit dem Querstücke 4 verbunden, das dazu dient, vermittels einer mit feinem Schraubengewinde versehenen Tragstange eine Masse L in einer Höhlung der Linse etwas zu heben oder zu senken, um die für die Schwingungsdauer maassgebende Länge l zu corrigiren. Da die zur Compensation wirksame Länge der Zinkröhre sich nur vom unteren Ende bis zu der Stelle erstreckt, wo sie mit der oben hineinreichenden Eisenstange fest verbunden ist, kann durch Aenderung dieser Verbindungsstelle die Compensation als solche (unabhängig von der Länge l bei einer gewissen gegebenen Temperatur) corrigirt werden.

Fig. 143.



Um abgesehen von dieser nachträglichen Correction ein solches Rostpendel passend construiren zu können, muss die ungefähre Lage des Schwingungsmittelpunktes S bekannt sein. Zu seiner angenäherten Bestimmung sei, unter A den Aufhängungspunkt, M den Massenmittelpunkt, L den Mittelpunkt der Linse verstanden,

$$AM = a, \qquad AS = l, \qquad AL = L,$$

Radius der Linse $= r$, Masse derselben $= m_1$, Masse der Pendelstange $= m_2$. Mit Rücksicht darauf, dass das Trägheitsmoment eines flachen homogenen Kugelabschnitts von der Masse m und Höhe h für die Umdrehungsaxe

$$= \frac{2}{3} m R h$$

gesetzt werden kann, wenn R den Radius der Kugel bedeutet, ist hier das Trägheitsmoment der Linse von der Dicke $2h$ für ihre durch L gehende Umdrehungsaxe nahe

$$=\frac{2}{3}m_1 Rh=\frac{1}{3}m_1 r^2$$

zu setzen, und da ferner, falls die Masse der Pendelstange als gleichförmig längs derselben vertheilt in Rechnung gebracht wird,

$$ML=\frac{m_2}{m_1}\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.$$

gesetzt werden kann, ergiebt sich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels für die mit der Aufhängungsaxe parallele Schwerpunktsaxe:

$$mk^2=m_1\left[\frac{r^2}{3}+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\frac{a^2}{4}\right]+\frac{1}{3}m_2 a^2$$

und somit nach Gl. (2):

$$MS=\frac{k^2}{a}=\left\{\frac{m_1}{m}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right]+\frac{1}{3}\frac{m_2}{m}\right\}a \quad \ldots\ldots (4.$$

$$\frac{a}{L}=\frac{a}{a+ML};\qquad \frac{l}{L}=\frac{a+MS}{a+ML} \quad \ldots\ldots\ldots (5.$$

Wäre z. B. $m_1=\frac{3}{4}m$, $m_2=\frac{1}{4}m$, $r=\frac{1}{6}a$, so ergäbe sich:

$$ML=\frac{1}{6}a,\qquad MS=\frac{1}{9}a$$

$$a=\frac{6}{7}L,\qquad l=\frac{20}{21}L$$

$$r=\frac{1}{7}L,\qquad L-l=\frac{1}{21}L=\frac{1}{3}r$$

oder bei gegebener Grösse von l, entsprechend einer gegebenen Schwingungsdauer τ:

$$L=\frac{21}{20}l \quad\text{und}\quad a=\frac{9}{10}l \quad\text{für}\quad r=\frac{3}{20}l.$$

Der Massenmittelpunkt dieses Pendels würde im höchsten Punkte der Linse, der Schwingungsmittelpunkt um $^1/_3$ des Radius r über ihrem Mittelpunkte liegen.

Um nun die nöthige Länge der Zinkröhre zu bestimmen, werde dieselbe bis zum mittleren der vorbemerkten Löcher gerechnet $=z$ gesetzt, so dass die Fehler der Rechnung nachträglich mit Hülfe entsprechender Beobachtungen nach beiden Seiten, sowohl durch Vergrösserung, als durch Verkleinerung von z corrigirt werden können. Unter der Voraussetzung, dass die äusseren Eisenstangen in einer Höhe $=L-l$ über dem Mittel-

punkte der Linse in dieser befestigt werden, ist mit den aus Fig. 143 ersichtlichen Bedeutungen von e und e':

$$l = e - z + e'$$

und ändert sich diese Länge, wenn der lineare Ausdehnungscoefficient des Eisens $= \varepsilon$, des Zinks $= \zeta$ ist, für eine Temperaturänderung von 1^0 um

$$\Delta l = \varepsilon (e + e') - \zeta z = \varepsilon l - (\zeta - \varepsilon) z,$$

so dass, um $\Delta l = 0$ zu machen,

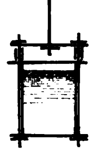
$$z = \frac{\varepsilon}{\zeta - \varepsilon} l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

gemacht werden müsste, insbesondere mit

$$\varepsilon = 0{,}000012 \quad \text{und} \quad \zeta = 0{,}00003 : z = \frac{2}{3} l.$$

Die Einrichtung eines Quecksilbercompensationspendels zeigt Fig. 144. Die Pendelstange trägt ein Querstück, an welchem ihre Länge durch eine Schraube regulirt werden kann. Von den Enden des Querstücks reichen zwei Stangen herab, die mit der Hauptpendelstange aus demselben Material (Eisen oder Stahl) bestehen mögen und welche unten einen Teller tragen, worauf ein cylindrisches, mit Quecksilber beinahe ganz angefülltes Glasgefäss steht. Letzteres wird durch Einklemmung zwischen dem unteren und einem oberen Teller, der durch auf die beiden Tragstangen geschobene Hülsen in constantem Abstande vom Querstücke erhalten ist, festgeklemmt.

Fig. 144.



Ist nun e die Entfernung der Aufhängungsaxe vom unteren Teller, bezw. vom Boden des Glasgefässes und x die Entfernung des letzteren vom Schwingungsmittelpunkte, also

$$l = e - x,$$

so ergiebt sich, unter ε den linearen Ausdehnungscoefficienten des Eisens und unter ξ die verhältnissmässige Aenderung von x für eine Temperaturänderung von 1^0 verstanden, die entsprechende Aenderung von l:

$$\Delta l = \varepsilon e - \xi x.$$

Dabei ist, wenn φ den Volumenausdehnungscoefficienten des Quecksilbers und γ den linearen Ausdehnungscoefficienten des Glases bedeutet, ξ bestimmt durch die Gleichung:

$$1 + \varphi = (1 + \gamma)^2 (1 + \xi) \text{ nahe } = 1 + 2\gamma + \xi,$$

woraus $\xi = \varphi - 2\gamma$ und

$$\Delta l = \varepsilon e - (\varphi - 2\gamma) x = \varepsilon l - (\varphi - 2\gamma - \varepsilon) x$$

folgt, somit $\Delta l = 0$ für

$$x = \frac{\varepsilon}{\varphi - 2\gamma - \varepsilon} l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7.$$

insbesondere mit $\varphi = 0{,}00018$, $\gamma = 0{,}000009$ und $\varepsilon = 0{,}000012$:

$$x = \frac{2}{25} l = \frac{2}{27} e.$$

Um bei gegebener Grösse von l und somit auch von $e = l + x$ gemäss Gl. (7) die ganze Höhe $= 2z$ der Quecksilbersäule im Gefässe näherungsweise zu bestimmen, sei y der Radius des Querschnittes dieser Quecksilbersäule, m_1 ihre Masse incl. Glasgefäss, Teller und Tragstangen, m_2 die Masse der Pendelstange nebst Querstück. Die Punkte A, M und S mögen die früheren Bedeutungen haben, Q aber den Mittelpunkt der Quecksilbersäule bedeuten. Dann kann das Trägheitsmoment der Masse m_1 für die durch Q gehende, zur Schwingungsebene senkrechte Axe nach bekannter Formel

$$= m_1 \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3}\right)$$

gesetzt werden, falls nur hier mit Rücksicht auf die ausser dem Quecksilber in m_1 einbegriffenen Massen der Radius y etwas grösser, etwa = dem äusseren Radius des Glasgefässes angenommen wird. Indem dann ferner mit $AM = a$ die Strecke MQ analog Gl. (3):

$$MQ = \frac{m_2}{m_1} \frac{a}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8$$

gesetzt werden mag, ergiebt sich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels für die mit der Aufhängungsaxe parallele Schwerpunktsaxe:

$$mk^2 = m_1 \left[\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{a^2}{4}\right] + \frac{1}{3} m_2 a^2$$

und daraus die Strecke MS:

$$MS = \frac{k^2}{a} = \left\{\frac{m_1}{m}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{y^2}{z^2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] + \frac{1}{3}\frac{m_2}{m}\right\} a \quad . . (9.$$

Mit Rücksicht auf diese Ausdrücke von MQ und MS findet man für angenommene Werthe der Verhältnisse $\frac{y}{z}$ und $\frac{m_2}{m_1}$ die gesuchte Länge z aus den Gleichungen:

$$a + MQ + z = e \quad \text{und} \quad a + MS = l \quad \ldots \ldots (10$$

durch Elimination von a. Oder es kann auch das Massenverhältniss $\frac{m_2}{m_1}$ für angenommene Werthe von $\frac{y}{z}$ und $\frac{z}{x}$ berechnet werden. Wird etwa angenommen:

$$\frac{y}{z} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad z = x,$$

so dass der Schwingungsmittelpunkt S mit dem Punkte Q zusammenfällt, so folgt aus der ersten der Gleichungen (10) mit Rücksicht auf Gl. (8):

$$a + MQ = e - x = l; \quad \frac{l}{a} = 1 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

und weil dann mit $x = \frac{2}{25} l$:

$$\frac{z}{a} = \frac{x}{a} = \frac{2}{25}\frac{l}{a} = 0{,}08 + 0{,}04\frac{m_2}{m_1}$$

ist, ergiebt sich aus der zweiten Gleichung (10) mit Rücksicht auf (9):

$$\frac{l}{a} = 1 + \frac{m_1}{m}\left[\frac{4}{9}\left(0{,}08 + 0{,}04\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\right] + \frac{1}{3}\frac{m_2}{m}.$$

Die Gleichsetzung dieses und des Ausdruckes von $\frac{l}{a}$ nach (11) liefert mit den Bezeichnungen:

$$\frac{m_2}{m_1} = p, \quad \frac{m_1}{m} = \frac{1}{1+p}, \quad \frac{m_2}{m} = \frac{p}{1+p}$$

eine Gleichung, welche auf die Form gebracht werden kann:

$$p + 1{,}52\,p^2 = 0{,}01736$$

und aus welcher sich ergiebt:

$$p = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}017.$$

Indem das Längenverhältniss der Pendelstange und der Quecksilbersäule nahe $= \frac{25}{4}$, das Dichtigkeitsverhältniss von Quecksilber und Eisen nahe $= 1{,}8$ ist, entspricht jenes Massenverhältniss einem Verhältnisse $= \delta$ der Durchmesser von Pendelstange und Quecksilbersäule, welches näherungsweise durch die Gleichung

$$p = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{1{,}8}\frac{25}{4}\delta^2$$

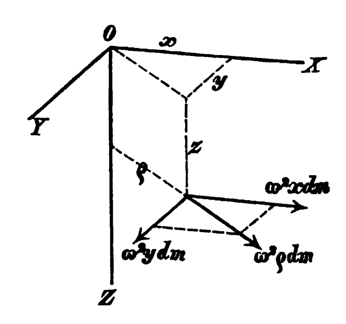
bestimmt ist und $= 0{,}07$ gefunden wird für $p = 0{,}017$.

Die Fehler, welche dem hiernach construirten Pendel hinsichtlich seiner Schwingungsdauer τ bei gegebener Temperatur und des etwa noch verbliebenen Einflusses der letzteren auf die Schwingungsdauer anhaften, sind schliesslich mit Hülfe von Schwingungsbeobachtungen vermittels der oben erwähnten Regulirungsschraube und durch nachträgliche kleine Aenderung der Quecksilberfüllung des Gefässes zu corrigiren.

§. 140. Das conische Pendel.

Von einem schweren Körper mit dem Schwerpunkte S, der Masse m, also dem Gewichte mg sei ein Punkt O fest, und es bewege sich um ihn der Körper so, dass die Gerade $OS = r$ mit der Lothrechten OZ durch O einen unveränderlichen Winkel $SOZ = \alpha$ bildet und dass die Ebene SOZ, von welcher zunächst vorausgesetzt wird, dass sie eine feste Lage im Körper hat, mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um OZ rotirt. Damit das der Fall sei, während keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, als die Schwerkräfte und Centrifugalkräfte seiner Massenelemente, muss nicht nur ω von bestimmter Grösse, sondern auch die Massenvertheilung des Körpers von gewisser Art sein. Indem nämlich, wenn im Körper die Axe OY senkrecht zur Ebene SOZ und in dieser OX senkrecht zu OZ angenommen wird, die in S angreifende resultirende Schwerkraft des Körpers mit dem Momente $mgr \sin\alpha$ um OY im Sinne einer Verkleinerung des Winkels α zu drehen strebt, müssen die Centrifugalkräfte, an den Punkt O versetzt, ein resultirendes Paar mit der Ebene XOZ liefern, welches mit einem Momente $= mgr \sin\alpha$ den Winkel α zu vergrössern strebt. Wie aus Fig. 145 ersichtlich ist, geben aber die Centrifugalkräfte $\omega^2 \varrho\, dm$ der Massenelemente dm bei ihrer Versetzung an den Punkt O ein Kräftepaar, das sich im Allgemeinen in zwei Componentenpaare in den Ebenen ZY und ZX bezw. mit den Momenten

Fig. 145.



$$M_x = \omega^2 \int yz\, dm \quad \text{und} \quad M_y = \omega^2 \int xz\, dm$$

zerlegen lässt, so dass die obigen Voraussetzungen an die Bedingungen geknüpft sind:

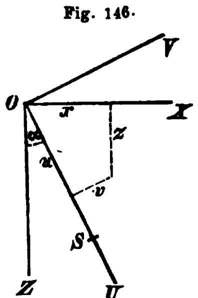
$$\int yz\, dm = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\omega^2 \int xz\, dm = mgr \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die erste ist erfüllt, wenn, wie angenommen werde, die Körpermasse in Bezug auf die Ebene SOZ symmetrisch vertheilt ist.

In Gl. (2) werde das Integral $\int xz\, dm$ auf eine andere Form gebracht vermittels einer Coordinatentransformation, entsprechend dem Ersatze der Axen OZ und OX durch die Axen OU und OV, Fig. 146,

von denen erstere in OS liegt, letztere in der Ebene SOZ normal zu OS ist. Sind dann u, v die betreffenden Coordinaten eines Massenelementes, die bei unveränderter Coordinate y an die Stelle von z, x treten, so ist



$$x = u \sin\alpha + v \cos\alpha$$
$$z = u \cos\alpha - v \sin\alpha$$
$$\int xz\,dm =$$
$$\sin\alpha\cos\alpha \int (u^2 - v^2)\,dm + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int uv\,dm.$$

Ist aber, wie weiter angenommen werde, die Körpermasse auch in Bezug auf die Ebene SOY symmetrisch vertheilt, so ist

$$\int uv\,dm = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

und $\int xz\,dm = \sin\alpha\cos\alpha \left(\int (u^2 + v^2)\,dm - 2\int v^2 dm\right) = (Q - q)\sin\alpha\cos\alpha$

$$\text{mit } Q = \int (u^2 + v^2)\,dm \text{ und } q = 2\int v^2 dm \quad \ldots \ldots (4).$$

Q ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Axe OY, q das Doppelte seines Trägheitsmomentes in Bezug auf die Ebene SOY. Die Gleichung (2) erhält jetzt die Form

$$\omega^2 (Q - q)\cos\alpha = mgr$$

und folgt daraus

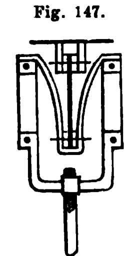
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}} \text{ mit } l = \frac{Q - q}{mr} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

und die Zeit einer Umdrehung:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

Reducirte sich der Körper auf einen materiellen Punkt S mit der Masse m, so wäre $q = 0$, $Q = mr^2$, also $l = r$. —

Vorstehenden Entwickelungen lag die Voraussetzung zu Grunde, dass die Ebene SOZ von fester Lage im Körper ist, wie es dann der Fall sein würde, wenn letzterer um OY als um eine Charnieraxe drehbar wäre, die um die Verticale OZ mit der durch Gl. (5) bestimmten constanten Winkelgeschwindigkeit ω rotirt. In der That aber pflegt das als Regulator einer Uhr dienende conische Pendel in der durch Fig. 147 angedeuteten Weise aufgehängt zu werden vermittels einer Art von elastischem Universalgelenk, gebildet durch zwei Paar Federn (analog der Federaufhängung des ebenen Pendels, Fig. 142), deren bei verticaler Lage des Pendels selbst verticale Ebenen sich rechtwinklig in OZ schneiden. Die Bewegung des Pendels ist dann zusammen-


Fig. 147.

gesetzt aus der Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um OZ und einer im umgekehrten Sinne mit ebenso grosser Winkelgeschwindigkeit stattfindenden Drehung um OS, so dass nicht OZ, sondern die Halbirungslinie OP des Winkels SOZ die Polaxe (augenblickliche Drehungsaxe) ist, entsprechend der Abwälzung eines im Pendel festen Kegels mit der Axe OS und dem halben Oeffnungswinkel SOP auf einem festen Kegel mit der Axe OZ und dem halben Oeffnungswinkel ZOP. Indem aber dabei dem Pendel die Form eines Umdrehungskörpers gegeben wird, dessen Meridianebenen auch in Betreff der Massenvertheilung einander gleichwerthig und in Bezug auf die Umdrehungsaxe symmetrisch sind, heben sich nicht nur die aus der Drehung um OS entspringenden Centrifugalkräfte der Massenelemente paarweise auf, sondern bleibt auch die Körpermasse beständig in Bezug auf die Ebenen SOZ und SOY symmetrisch vertheilt, so dass die Gleichungen (5) und (6) ihre Gültigkeit behalten. Zugleich erhält q die Bedeutung des Trägheitsmomentes für die Axe OS, da dieses stets = der Summe der Trägheitsmomente für zwei zu einander senkrechte durch OS gehende Ebenen ist, letztere aber hier gleichwerthig sind.

Besteht das Pendel aus einer dünnen cylindrischen homogenen Stange vom Gewichte A und von der Länge a nebst einer homogenen Kugel vom Gewichte B, deren in der Mittellinie der Stange gelegener Mittelpunkt die Entfernung b vom Aufhängungspunkte hat, und werden die auf beide entfallenden Antheile von Q und q beziehungsweise mit Q_1, Q_2 und q_1, q_2 bezeichnet, so ist $q_1 = 0$ zu setzen und

$$Q_1 = \frac{1}{3}\frac{A}{g}a^2, \qquad Q_2 = \frac{B}{g}b^2 + q_2,$$

somit nach Gl. (5):

$$l = \frac{\frac{1}{3}Aa^2 + Bb^2}{\frac{1}{2}Aa + Bb} = b\,\frac{1 + \frac{1}{3}\frac{Aa^2}{Bb^2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{Aa}{Bb}} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

etwas $< b$, da $\frac{1}{3}\frac{a}{b} < \frac{1}{2}$ oder $b > \frac{2}{3}a$ ist. Uebrigens ist nach Gl. (6):

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}$$

um so kleiner, je kleiner α, ebenso wie beim ebenen Pendel. Während bei diesem aber unter α einen kleinen Winkel verstanden, die Schwin-

gungsdauer τ näherungsweise proportional

$$1+\frac{\alpha^2}{16}$$

ist, ergiebt sie sich beim conischen Pendel proportional:

$$\sqrt{\cos\alpha}=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2}}=1-\frac{\alpha^2}{4}.$$

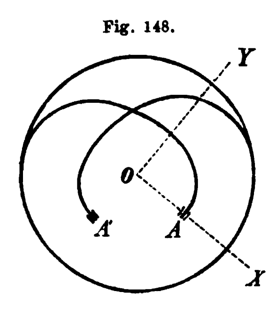
Eine Aenderung des kleinen Winkels α übt folglich hier im umgekehrten Sinne einen 4 mal so grossen Einfluss auf die Schwingungsdauer aus, als beim ebenen Pendel.

§. 141. Die Unruhe.

Die Unruhe besteht aus einem kleinen Schwungrade, dessen Axe in festen Lagern drehbar ist, und einer Spiralfeder, welche, indem sie mit 8 bis 12 Windungen die Axe des Rades umgiebt, mit ihrem einen Ende an diesem, mit dem anderen am Lagergestell befestigt ist. Wird die Unruhe durch Anstoss aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt, so wird sie durch die Elasticität der sich abwechselungsweise zusammendrehenden und aufdrehenden Spiralfeder in Schwingungen erhalten, so lange die durch den Anstoss mitgetheilte lebendige Kraft nicht durch Bewegungswiderstände verbraucht ist oder sofern der betreffende Verlust durch periodische Wiederholung des Anstosses ersetzt wird. Die aus Stahldraht von meistens rechteckigem Querschnitte verfertigte Feder ist flach oder cylindrisch, d. h. ihre Mittellinie eine ebene oder cylindrische Spirale (Schraubenlinie). Letztere Form wurde erst später von Arnold eingeführt, findet aber jetzt zu den vollkommensten Unruhe-Uhren, sogenannten Chronometern, vorzugsweise, zu Schiffschronometern ausschliessliche Verwendung. Der wenig gebräuchlichen und kaum durch wesentliche Vorzüge ausgezeichneten sogenannten Tonnenfeder von Houriet sei nur nebenbei Erwähnung gethan; sie unterscheidet sich von der Cylinderfeder dadurch, dass die Durchmesser der Windungen von beiden Enden gegen die Mitte hin zunehmen. Wenn freilich die Mittellinie einer Cylinderfeder in der Gleichgewichtslage vollständig vom einen bis zum anderen Ende eine Schraubenlinie wäre, so müssten auch bei ihr, wenn sie in Schwingungen begriffen ist, die Durchmesser der Windungen nach der Mitte hin zu- oder abnehmen, jenachdem die Feder weiter aufgedreht oder zusammengedreht ist; doch wird solchem Verhalten dadurch entgegengewirkt, dass die Feder an den Enden einwärts gebogen wird, so dass die Mittellinien dieser Endigungen in der Projection auf eine zur

Axe senkrechte Ebene nach Art von Fig. 148 zwei symmetrisch liegende congruente Curven bilden, deren bezw. am Gestell und am Schwungrade feste Endpunkte A, A' um ungefähr die Hälfte des Windungshalbmessers von der Axe entfernt sind. Wie im Folgenden näher nachgewiesen wird, bieten diese eigenthümlich gekrümmten Federendigungen das wirksamste Hülfsmittel dar, um die Schwingungen der Unruhe möglichst isochron, d. h. die Schwingungsdauer möglichst unabhängig vom Ausschlagwinkel zu machen, und ist deshalb später auch die flache Spiralfeder in ähnlicher Weise modificirt worden; bei dieser nach ihrem Erfinder benannten Breguet-Feder schliesst sich indessen die fragliche Endigung nur an die äussere Spiralwindung an, und wird dann auch der Isochronismus nicht so vollständig dadurch erreicht. Hierdurch und durch die grössere Leichtigkeit ihrer exacten Herstellung ist die Vorzüglichkeit der cylindrischen Feder hauptsächlich begründet, sofern nicht die dadurch bedingte grössere Dicke der Uhr als Unbequemlichkeit empfunden wird.

Fig. 148.



Wenn φ der Winkel ist, um welchen das Schwungrad der Unruhe durch ein Kräftepaar, das in einer zur Axe senkrechten Ebene wirkt, aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage verdreht wird, so handelt es sich vor Allem um die zwischen φ und dem Moment $= M$ des Kräftepaares im neuen Gleichgewichtszustande stattfindende Beziehung, von welcher das Schwingungsgesetz und somit die Schwingungsdauer τ wesentlich abhängt. Zur Ableitung dieser Beziehung kann die cylindrische Spiralfeder wegen der stets sehr kleinen Steigung ihrer Windungen mit genügender Annäherung gerade so beurtheilt werden wie eine flache Feder von gleichem Material und gleichem Querschnitte, deren Mittellinie mit der Projection der wirklichen Mittellinie auf eine zur Axe senkrechte Ebene zusammenfällt, und wenn dann die somit ebene Mittellinie auf rechtwinklige Coordinatenaxen OX, OY bezogen wird, deren Ursprung O in der Drehungsaxe gelegen ist, und mit X, Y die bezw. nach OX und OY gerichteten Componenten der auf die Schwungradwelle wirkenden Lagerreaction bezeichnet werden, so ist für einen beliebigen Querschnitt der Feder, entsprechend dem Punkte x, y der Mittellinie, das auf Biegung wirkende Kraftmoment

$$= M + Xy - Yx.$$

Es ist positiv oder negativ, jenachdem es im Sinne einer Zunahme oder

Abnahme der ursprünglichen Krümmung wirkt, falls auch M in gleicher Weise algebraisch verstanden wird und die positiven Coordinatenaxen so gerichtet sind, dass ein positives Moment M dem Drehungssinne von OX gegen OY entspricht. In Fig. 148 ist das der Fall, wenn der in der positiven Axe OX liegende Endpunkt A der Federmittellinie ihr unbeweglicher (am Gestell fester) Endpunkt ist.

Nach bekannten Elasticitätsgesetzen* ist aber jenes auf Verbiegung im Punkte x, y wirkende Kraftmoment auch

$$= EJ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right),$$

wenn r und r_0 die Krümmungsradien der Mittellinie für jenen Punkt bezw. im neuen und im ursprünglichen Gleichgewichtszustande bedeuten, während E der Elasticitätsmodul des Materials der Feder und J das Trägheitsmoment ihres Querschnittes für die Biegungsaxe ist. Aus der somit sich ergebenden Gleichung

$$EJ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = M + Xy - Yx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

folgt bei Multiplication mit dem Bogenelemente ds und Integration längs der ganzen Mittellinie $= l$:

$$EJ\varphi = Ml + X\int y\,ds - Y\int x\,ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Dabei ist mit Rücksicht darauf, dass die Feder an beiden Enden A und A' eingeklemmt ist und dass somit die Normalen ihrer Mittellinie daselbst unter unveränderlichen Winkeln gegen die Radien OA und OA' geneigt sind,

$$\varphi = \int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0}$$

= dem Unterschiede der Windungswinkel der Spiralfeder im neuen und ursprünglichen Gleichgewichtszustande = ihrem Verdrehungswinkel (Drehungswinkel der Normalen im beweglichen Endpunkte A' = Drehungswinkel des Radius OA'), positiv gesetzt im Sinne einer Krümmungszunahme oder Zusammendrehung der Spiralfeder. In demselben Sinne ist die Winkelbeschleunigung der Unruhe, unter Q ihr Trägheitsmoment für die Drehungsaxe verstanden:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

---

* Siehe u. A. des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit", 2. Aufl., Nr. 168.

und nach (2) bei Vernachlässigung der Glieder mit X und Y:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{EJ}{Ql}\varphi.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist, unter A und B Constante verstanden:

$$\varphi = A \sin\left(t\sqrt{\frac{EJ}{Ql}}\right) + B \cos\left(t\sqrt{\frac{EJ}{Ql}}\right),$$

entsprechend einer periodischen Aenderung von φ je in den Zeiten:

$$2\pi\sqrt{\frac{Ql}{EJ}}.$$

Das ist die Dauer einer ganzen oder Doppelschwingung, die Dauer einer einfachen Schwingung also:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{Ql}{EJ}} \qquad (4)$$

= einer vom Ausschlagwinkel unabhängigen Constanten. Indessen wird diese Unveränderlichkeit von τ gestört durch die Einflüsse der Lagerreaction, der Temperatur und des Bewegungswiderstandes, die deshalb im Folgenden einer näheren Prüfung unterzogen werden sollen nebst den Hülfsmitteln, durch welche sie möglichst unschädlich zu machen sind.

Sind auch diese Einflüsse an und für sich nur geringfügig, so wird ihre Wirkung doch erheblich durch vielmalige Summirung bei Uhren, welche, wie die zur Bestimmung der geographischen Länge auf See dienenden Chronometer, oft lange Zeit ohne Controle bleiben müssen. Bei einem solchen Schiffschronometer ist es zwar nicht nöthig, dass sein sogenannter täglicher Gang, d. h. sein tägliches Voreilen oder Zurückbleiben = Null sei, dagegen ist es wichtig, dass derselbe möglichst constant, also von zufälligen Aenderungen des Ausschlagwinkels, der Temperatur und des Widerstandes unabhängig sei. Ist dann dieser tägliche Gang durch Beobachtung bekannt und ausserdem der sogenannte Stand der Uhr, d. h. die Differenz zwischen ihrer Angabe und der richtigen mittleren Zeit eines gewissen Meridians M_0 an einem bestimmten Tage, so kann man daraus für irgend einen späteren Tag durch Ablesung des Chronometers in einem gewissen Augenblicke die richtige mittlere Zeit jenes Meridians M_0 für denselben Augenblick durch Anbringung der betreffenden Correction erhalten. Indem also durch astronomische Beobachtung die mittlere Zeit eines anderen Meridians M bestimmt wird, auf welchem das Schiff sich eben befindet, erhält man die

geographische Länge durch Umsetzung des gefundenen Zeitunterschiedes beider Meridiane in Längenunterschied mit Rücksicht darauf, dass 4 Zeitminuten einem Längengrade entsprechen.

Vollkommene Unveränderlichkeit des täglichen Ganges ist natürlich nicht zu erreichen und ist vielmehr ein Chronometer schon recht gut, wenn die grösste vorkommende Verschiedenheit der Umstände eine Abweichung des täglichen Ganges vom Monatsmittel desselben höchstens bis zu 2 Secunden zur Folge hat und dieses Monatsmittel sich während eines Jahres um nicht mehr als eine Secunde ändert. Harrison war der Erste, welcher um 1760 dergleichen zur geographischen Längenbestimmung geeignete Chronometer in solcher Vollkommenheit verfertigte, dass er damit einen vom englischen Parlamente ausgesetzten hohen Preis (20000 Pfd. St.) gewann. Die Herstellung eines solchen Chronometers erfordert vor Allem eine Unruhe von solcher Einrichtung, dass dadurch jene störenden Einflüsse fast vollständig compensirt werden gemäss den in den folgenden Paragraphen zu besprechenden Regeln.

§. 142. Einfluss der Lagerreaction auf das Schwingungsgesetz der Unruhe.

Um zunächst die Beziehung zwischen der Grösse M eines die Unruhe verdrehenden Kraftmomentes (positiv gesetzt für den Fall einer Krümmungszunahme der Spiralfeder) und dem entsprechenden Verdrehungswinkel φ mit Rücksicht auf die Lagerreaction zu finden, handelt es sich um die Entwickelung des Ausdruckes:

$$X\int y\,ds - Y\int x\,ds$$

in Gl. (2) des vorigen §., der dort einstweilen $=$ Null gesetzt bezw. vernachlässigt wurde. Zu dem Ende werde ausgegangen von dem Falle einer flachen Spiralfeder ohne Breguet'sche Endigung und deren Mittellinie AA', unter A wieder den unbeweglichen (hier äusseren), unter A' den beweglichen (inneren, am Schwungrade festen) Endpunkt verstanden, näherungsweise für jeden Werth von φ als eine Archimedische Spirale angenommen. Sind dann x, y die rechtwinkligen Linearcoordinaten, ϱ, ψ die Polarcoordinaten eines Punktes P dieser Curve (Fig. 149), und ist e die constante Entfernung zweier aufeinander folgender Windungen, ferner $OA = a$, $OA' = a'$, so ist:

Fig. 149.

$$x = \varrho \cos\psi,\ y = \varrho \sin\psi,\ \varrho = a - \frac{e}{2\pi}\psi \quad \ldots \ldots \ldots (1.$$

Der Windungswinkel, d. i. der Werth von ψ für den Endpunkt A', entsprechend $\varrho = a'$, sei

$$= 2i\pi + \varepsilon_0 \text{ im ursprünglichen}$$
$$\text{bezw. } = 2i\pi + \varepsilon \text{ im neuen Gleichgewichtszustande,}$$

unter i eine ganze Zahl verstanden. Die Bogenlänge $AP = s$ und insbesondere auch die ganze Curvenlänge $AA' = l$ können als unveränderlich gelten. Der Krümmungsradius für einen Punkt P der Mittellinie gehe aber durch die Verdrehung φ von r_0 in r über; dann entspricht dieser Krümmungsänderung eine Zunahme des Contingenzwinkels des Bogenelementes ds bei P um

$$\frac{ds}{r} - \frac{ds}{r_0} = d\varphi,$$

wodurch die Unruhaxe, wenn sie frei wäre, normal zu OP um die Strecke

$$ON = \varrho\, d\varphi$$

verrückt werden würde, also im Sinne

$$\text{von } OX \text{ um } \quad \varrho\, d\varphi \sin\psi = y\, d\varphi,$$
$$\text{von } OY \text{ um } -\varrho\, d\varphi \cos\psi = -x\, d\varphi.$$

Im Ganzen würde also die Axe O bezw. nach den Richtungen OX und OY um

$$\int y\, d\varphi \quad \text{und} \quad -\int x\, d\varphi$$

verrückt werden, die Integrale auf die ganze Länge $s = l$ bezogen; weil sie aber durch ihre Lagerung daran verhindert ist, müssen diese Integrale = Null sein, müssen also, da nach Gl. (1) im vorigen §.

$$d\varphi = \frac{ds}{r} - \frac{ds}{r_0} = \frac{M + Xy - Yx}{EJ} ds$$

ist, die Gleichungen stattfinden:

$$M\int y\, ds + X\int y^2 ds - Y\int xy\, ds = 0,$$
$$M\int x\, ds + X\int xy\, ds - Y\int x^2 ds = 0,$$

durch welche die Componenten X, Y der Lagerreaction bestimmt sind. Mit den Bezeichnungen:

$$f = \int x\, ds, \qquad F = \int x^2 ds, \qquad H = \int xy\, ds \quad \ldots (2$$
$$g = \int y\, ds, \qquad G = \int y^2 ds,$$

gehen jene Gleichungen über in:

$$GX - HY = -gM$$
$$HX - FY = -fM$$

und folgt daraus:

$$X = \frac{-Fg + Hf}{FG - H^2} M; \quad Y = \frac{Gf - Hg}{FG - H^2} M \; \ldots\ldots \; (3).$$

Die vollständige Entwickelung der Ausdrücke f, g, F, G, H würde selbst unter jener vereinfachenden Voraussetzung, dass die Mittellinie der Feder nach wie vor eine Archimedische Spirale bleibt, zu übermässig weitläufigen Ausdrücken von X und Y führen. Indem aber die Windungen sehr dicht aufeinander folgen und folglich sehr nahe kreisförmig sind, werde

$$ds = \sqrt{\varrho^2 d\psi^2 + d\varrho^2} = \varrho\, d\psi$$

gesetzt, entsprechend der Vernachlässigung von

$$\left(\frac{d\varrho}{\varrho\, d\psi}\right)^2 = \left(\frac{e}{2\pi\varrho}\right)^2$$

gegen 1. Wird dann zur Abkürzung

$$p = \frac{e}{\pi a} \quad \text{und} \quad q = \frac{a'}{a} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4)$$

gesetzt, so ist entsprechend auch p^2 gegen 1 zu vernachlässigen. Das Verhältniss q ist zwar gleichfalls ein kleiner Bruch, kann aber wesentlich $> p$ sein, und mag etwa erst q^6, somit auch pq^3 gegen 1 vernachlässigt werden. Auf solche Weise ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} f &= a^2 (p + q^2 \sin\varepsilon - pq \cos\varepsilon) \\ g &= a^2 (1 - pq \sin\varepsilon - q^2 \cos\varepsilon) \\ F = G &= \frac{\pi a^4}{4e}(1 - q^4); \quad H = \frac{\pi a^4}{4e} p \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; (5).$$

Was z. B. g betrifft, so findet man gemäss den Gleichungen (1) zunächst das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int y\, ds &= \int \varrho^2 \sin\psi\, d\psi = -\int \varrho^2 d\cos\psi \\ &= -\varrho^2 \cos\psi + \int 2\varrho \left(-\frac{e}{2\pi} d\psi\right) \cos\psi \\ &= -\varrho^2 \cos\psi - \frac{e}{\pi} \int \varrho\, d\sin\psi \\ &= -\varrho^2 \cos\psi - \frac{e}{\pi}\left[\varrho \sin\psi - \int \left(-\frac{e}{2\pi} d\psi\right) \sin\psi\right] \\ &= -\varrho^2 \cos\psi - \frac{e\varrho}{\pi} \sin\psi + \frac{e^2}{2\pi^2} \cos\psi \end{aligned}$$

und dann zwischen den Grenzen $\varrho = a$, $\psi = 0$ und $\varrho = a'$, $\psi = 2i\pi + \varepsilon$ genommen:

$$g = -a'^2 \cos\varepsilon - \frac{ea'}{\pi}\sin\varepsilon + \frac{e^2}{2\pi^2}\cos\varepsilon + a^2 - \frac{e^2}{2\pi^2}$$
$$= a^2\left[1 - \frac{p^2}{2} - pq\sin\varepsilon - \left(q^2 - \frac{p^2}{2}\right)\cos\varepsilon\right]$$
$$= a^2(1 - pq\sin\varepsilon - q^2\cos\varepsilon)$$

bei Vernachlässigung der Glieder mit p^2. Aehnlich werden die übrigen oben angeführten Ausdrücke gefunden. Man kann bemerken, dass

$$f = lx_1 \quad \text{und} \quad g = ly_1$$

ist, unter x_1 und y_1 die Schwerpunktscoordinaten der Curve AA' verstanden, während F und G ihre Trägheitsmomente beziehungsweise für die Axen OY und OX bedeuten. Nach den Gleichungen (5) ist aber f sehr klein gegen g und H sehr klein gegen $F = G$; der Schwerpunkt der Curve liegt also sehr nahe in OY, und die Coordinatenaxen sind sehr nahe gleichwerthige Hauptaxen für den Punkt O.

Aus (3) und (5) ergeben sich jetzt die Componenten der Lagerreaction, immer bei Vernachlässigung von p^2, pq^3 und q^6 gegen 1:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{4e}{\pi a^2}\left[1 + q^4 - pq(1+q)\sin\varepsilon - q^2\cos\varepsilon\right]M \\ Y &= \frac{4e}{\pi a^2}\left[q^2\sin\varepsilon - pq(1-q)\cos\varepsilon\right]M \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6)$$

X ist von entgegengesetztem Zeichen wie M; Y hat einen ausserdem von ε abhängigen Sinn, ist aber von geringerer Grössenordnung als X. Die resultirende Lagerreaction hat also sehr nahe die Richtung der x-Axe; sie ist um so kleiner, je kleiner e im Vergleich mit a ist. Endlich folgt aus (5) und (6):

$$Xg - Yf = (-\lambda + \mu\cos\varepsilon + \nu\sin\varepsilon)M \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

mit den Bezeichnungen:

$$\lambda = \frac{4e}{\pi}(1 + 2q^4); \qquad \mu = \frac{8e}{\pi}q^2; \qquad \nu = \frac{8e}{\pi}pq \quad \ldots\ldots (8)$$

Diese Grössen λ, μ, ν sind Längen, von denen λ sehr klein im Vergleich mit a, um so mehr sehr klein gegen l ist, während μ und ν schon im Vergleich mit λ sehr klein und um so mehr gegen a und l äusserst klein sind.

Die Substitution des Ausdruckes (7) in Gl. (2) des vorigen §. giebt:

$$M = \frac{EJ\varphi}{l - \lambda + \mu\cos\varepsilon + \nu\sin\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und einen ähnlichen Ausdruck, nur mit anderen Bedeutungen von λ, μ, ν erhält man auch für die cylindrische Spiralfeder. Die Entwickelung ist

aber ohne näher liegendes Interesse, weil es hier nur auf die allgemeine Form des Ausdruckes ankommt, dessen Elemente λ, μ, ν auch für die flache Spiralfeder gemäss den Gleichungen (8) und (4) nicht ganz zutreffend gefunden wurden, weil mit der vereinfachenden Annahme, die Feder bilde beständig eine Archimedische Spirale, die besondere Art ihrer Befestigung an den Enden durch Einklemmung unberücksichtigt geblieben ist. Noch mehr werden diese Grössen λ, μ, ν durch jene eigenthümlich gestalteten Federendigungen modificirt, die bei der Cylinderfeder und bei der flachen Breguet-Feder den Zweck haben, diese Grössen λ, μ, ν möglichst zu verkleinern. Die Form der Gleichung (9) kann aber als allgemein gültig betrachtet werden, unter λ, μ, ν gewisse Längen verstanden, die im Vergleich mit l sehr klein sind.

Wegen $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varphi$ ist übrigens:

$$\mu \cos\varepsilon = \mu(\cos\varepsilon_0 \cos\varphi - \sin\varepsilon_0 \sin\varphi)$$
$$\nu \sin\varepsilon = \nu(\sin\varepsilon_0 \cos\varphi + \cos\varepsilon_0 \sin\varphi)$$

und deshalb auch, wenn

$$\left.\begin{aligned} l' &= l - \lambda \\ m &= \mu\cos\varepsilon_0 + \nu\sin\varepsilon_0 \\ n &= -\mu\sin\varepsilon_0 + \nu\cos\varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

gesetzt wird:

$$M = \frac{EJ\varphi}{l' + m\cos\varphi + n\sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Darin sind m und n ebenso wie μ und ν sehr klein gegen l', und ist $l - l'$ klein gegen l, beides um so mehr, je vollkommener der Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen durch passend gestaltete Federendigungen (siehe den folgenden Paragraph) erzielt ist.

Um nun gemäss dieser Gleichung das Schwingungsgesetz der Unruhe herzuleiten, werde die Zeit t gerechnet von einem Augenblicke grössten Ausschlages $= \alpha$ aus der Gleichgewichtslage, und werde für die Bewegung von dieser Anfangslage bis zur entgegengesetzten Lage grössten Ausschlages die Winkelgeschwindigkeit ω positiv gesetzt; φ sei in irgend einem Augenblicke der Winkelabstand von der Gleichgewichtslage, positiv im Sinne gegen die Anfangslage hin. Dann ist, unter Q wieder das Trägheitsmoment der Unruhe für die Drehungsaxe verstanden, die Winkelbeschleunigung:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{Q} = \frac{1}{Q}\,\frac{EJ\varphi}{l' + m\cos\varphi \pm n\sin\varphi}.$$

Vor dem letzten Gliede des Nenners gilt hier das Zeichen $+$ oder $-$, jenachdem die Anfangslage die Lage grösster Zusammendrehung (stärkster

Krümmung) oder grösster Aufdrehung (schwächster Krümmung) der Spiralfeder ist. Mit den Bezeichnungen:

$$k^2 = \frac{EJ}{Ql'}, \quad b = \frac{m}{l'}, \quad c = \frac{n}{l'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

und mit Rücksicht darauf, dass b und c sehr kleine Brüche sind, kann, wenn zu weiterer Abkürzung

$$w = k^2\varphi\,(b\cos\varphi + c\sin\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

gesetzt wird, jene Gleichung geschrieben werden:

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2\varphi - w.$$

Sie werde mit der Gleichung

$$\frac{d(\alpha - \varphi)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

dadurch verbunden, dass letztere mit dem vorläufig unbestimmten Coefficienten $\varkappa$ multiplicirt und von jener subtrahirt wird; das giebt:

$$\frac{d(\omega + \varkappa\varphi)}{dt} = -\varkappa\omega + k^2\varphi - w = -\varkappa\left(\omega - \frac{k^2}{\varkappa}\varphi\right) - w$$

und indem jetzt $\varkappa$ so bestimmt wird, dass

$$-\frac{k^2}{\varkappa} = \varkappa \text{ ist, also } \varkappa = k\sqrt{-1} = ki \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

gesetzt wird, unter i hier den imaginären Factor $\sqrt{-1}$ verstanden, folgt:

$$d(\omega + \varkappa\varphi) + (\omega + \varkappa\varphi)\,\varkappa dt = -w\,dt.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird zu einem vollständigen Differential, nämlich zum Differential des Productes $u(\omega + \varkappa\varphi)$ durch Multiplication mit einem so beschaffenen Factor u, dass

$$u\varkappa dt = du$$

ist, woraus folgt:

$$\frac{du}{u} = \varkappa dt, \quad ln\,u = \varkappa t, \quad u = e^{\varkappa t},$$

also

$$d\left[(\omega + \varkappa\varphi)\,e^{\varkappa t}\right] = -w\,e^{\varkappa t}\,dt.$$

Durch Integration dieser Gleichung ergiebt sich mit Rücksicht auf die zusammengehörigen Anfangswerthe $t = 0$, $\omega = 0$, $\varphi = \alpha$:

$$(\omega + \varkappa\varphi)\,e^{\varkappa t} - \varkappa\alpha = -\int_0^t w\,e^{\varkappa t}\,dt$$

$$\omega + \varkappa\varphi = e^{-\varkappa t}\left(\varkappa\alpha - \int_0^t w\,e^{\varkappa t}\,dt\right)$$

oder mit $x = ki$ nach Gl. (14) und bei Benutzung der bekannten Gleichung:

$$e^{+xi} = \cos x + i \sin x$$

$$\omega + k\varphi i = \left[\cos(kt) - i \sin(kt)\right] \left\{k\alpha i - \int_0^t w \left[\cos(kt) + i \sin(kt)\right] dt\right\}.$$

Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile zerfällt diese Gleichung in die folgenden:

$$\omega = k\alpha \sin(kt) - \sin(kt) \int_0^t w \sin(kt)\, dt$$
$$- \cos(kt) \int_0^t w \cos(kt)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$\varphi = \alpha \cos(kt) - \frac{\cos(kt)}{k} \int_0^t w \sin(kt)\, dt$$
$$+ \frac{\sin(kt)}{k} \int_0^t w \cos(kt)\, dt \quad \ldots\ldots (16).$$

Wäre $b = c = 0$, also $w = 0$, so wäre hiernach:

$$\omega = k\alpha \sin(kt) \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha \cos(kt)$$

und indem die Schwingungsdauer $\tau =$ der Zeit t ist, nach welcher zuerst wieder $\omega = 0$ wird, ergiebt sich:

$$\tau = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{Ql'}{EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (4) im vorigen §., abgesehen von der kleinen Differenz zwischen l' und l. Wird der Ausschlagwinkel auf der anderen Seite von der Gleichgewichtslage mit α_1 bezeichnet, so ist α_1 der Werth von $-\varphi$ für $t = \frac{\pi}{k}$, also

$$\alpha_1 = -\alpha \cos \pi = \alpha.$$

Die Unruhe schwingt also mit gleichen Ausschlagwinkeln α beiderseits von der Gleichgewichtslage so, dass die Schwingungsdauer unabhängig von α ist.

Sind aber b und c nicht = Null, so ist die Schwingungsdauer τ grösser oder kleiner als $\frac{\pi}{k}$, jenachdem die Winkelgeschwindigkeit ω, welche $t = \frac{\pi}{k}$ entspricht und mit ω_1 bezeichnet sei, noch positiv oder schon negativ geworden ist. Sie ergiebt sich aus Gl. (15):

$$\omega_1 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} w \cos(kt)\, dt$$

oder mit $x = kt$ und mit Rücksicht auf den Ausdruck (13) von w:

$$\omega_1 = \frac{1}{k}\int_0^{\pi} w \cos x\, dx = \frac{1}{k}\int_0^{\pi} w\, d\sin x$$

$$= k\int_0^{\pi} \varphi\,(b \cos\varphi \pm c \sin\varphi)\, d \sin x$$

und mit dem Näherungswerthe $\varphi = \alpha \cos(kt) = \alpha \cos x$:

$$\omega_1 = k\int_0^{\pi} \alpha \cos x \left[b \cos(\alpha \cos x) \pm c \sin(\alpha \cos x)\right] d \sin x \quad . . . (18.$$

Wenn man das Integral dieses Ausdruckes gemäss der symbolischen Gleichung

$$\int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}$$

zerlegt und berücksichtigt, dass von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ und von $x = \pi$ bis $x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x$ gleiche, $\cos x$ oder $\alpha \cos x$ entgegengesetzte,

also auch $\cos(\alpha \cos x)$ gleiche, $\sin(\alpha \cos x)$ entgegengesetzte

Werthe durchläuft, so folgt:

$$\int_0^{\pi} \alpha \cos x \sin(\alpha \cos x)\, d \sin x = 0$$

und

$$\int_0^{\pi} \alpha \cos x \cos(\alpha \cos x)\, d \sin x$$

$=$ dem Doppelten des zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommenen Integrals, somit nach (18) einfacher:

$$\omega_1 = 2kb\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos x \cos(\alpha \cos x)\, d \sin x \quad . . . . (19.$$

Nun ist für das kleine Zeitintervall

$$= \tau - \frac{\pi}{k}, \text{ wenn } \omega_1 \text{ positiv,}$$

bezw.

$$= \frac{\pi}{k} - \tau, \text{ wenn } \omega_1 \text{ negativ}$$

ist, die Winkelbeschleunigung als constant zu betrachten und zwar absolut genommen $= k^2\alpha$ zu setzen bei Vernachlässigung von w in der

allgemeinen Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2\varphi - w.$$

Dadurch wird

$$\tau - \frac{\pi}{k} = \frac{\omega_1}{k^2\alpha}$$

und bei Einsetzung des Ausdruckes (19) von ω_1:

$$\tau = \frac{1}{k}\left[\pi + 2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos(\alpha \cos x)\, dx\right] \ldots\ldots\ldots (20).$$

Das hier vorkommende Integral und somit die Schwingungsdauer τ ist eine Function des Ausschlagwinkels α; insbesondere giebt es einen gewissen Werth von α, für welchen das Integral $= 0$ und deshalb wieder $\tau = \frac{\pi}{k}$ wird. Weil es aber nicht möglich ist, eine ganz bestimmte Grösse des Ausschlagwinkels dauernd zu erhalten, so ist von grösserem Interesse die Kenntniss desjenigen Ausschlagwinkels α, dessen kleine Veränderung die kleinstmögliche Aenderung der Schwingungsdauer τ zur Folge hat, für welche also wo möglich

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -\frac{2b}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin(\alpha \cos x)\, dx = 0 \ldots\ldots\ldots (21)$$

ist. Jedenfalls ist der dieser Gleichung entsprechende vortheilhafteste Ausschlagwinkel $> \pi$, weil bei dem Wachsthum der Variablen x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ beständig $\cos x$ positiv und deshalb auch $\sin(\alpha \cos x)$ beständig positiv ist, falls $\alpha < \pi$ ist. Wenn die Simpson'sche Regel zur angenäherten Berechnung des Integrals benutzt und dazu der Unterschied seiner Grenzen in 10 gleiche Theile getheilt wird, so ergiebt sich mit der Bezeichnung

$$f(x) = \cos^3 x \sin(\alpha \cos x),$$

wo α natürlich in Bogenmaass ausgedrückt werden muss, der jener Forderung (21) entsprechende Ausschlagwinkel α als Wurzel der Gleichung:

$$f(0) + 4f(9^0) + 2f(18^0) + \ldots + 4f(81^0) + f(90^0) = 0.$$

Man findet α nahe $= 202^0$.

Dass eine Aenderung von α die Schwingungsdauer τ einer Unruhe weniger beeinflusst, wenn α gross, als wenn α klein ist (entgegengesetzt dem Verhalten eines Pendels), ist eine bekannte Erfahrung, und macht

man deshalb α selten $< 90^0$, bei Chronometern aber meistens $> 180^0$, nahe = jenem theoretisch vortheilhaftesten Werthe. Dazu kommt, dass Erschütterungen, denen namentlich Taschenuhren ausgesetzt sind, bei grossem Ausschlagwinkel weniger störend wirken als bei kleinem. Aus demselben Grunde lässt man auch die Unruhen schneller schwingen, als Pendel, und zwar so schnell, dass sie wenigstens 4, bei Taschenuhren sogar bis zu 6 Schwingungen in der Secunde machen. Damit denselben eine hinlänglich grosse lebendige Kraft $= \frac{1}{2} Q\omega^2$ des Schwungrades entspreche, worauf es behufs Vergrösserung von ω durch Verkleinerung von τ bei grossem α eben ankommt, muss ausserdem Q hinlänglich gross und damit dies ohne übermässig grosses Gewicht des Schwungrades erreicht werde, sein Durchmesser möglichst gross sein.

Nach Gl. (20) oder (21) würde übrigens die Schwingungsdauer τ vollkommen unabhängig von α sein, wenn $b = 0$, nach (12) also $m = 0$ oder nach (10):

$$tg\,\varepsilon_0 = -\frac{\mu}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

wäre, d. h. wenn der Windungswinkel der Spiralfeder in ihrem ursprünglichen Gleichgewichtszustande um einen bestimmten, von ihren Dimensionsverhältnissen abhängigen Winkel grösser wäre, als irgend ein Vielfaches von 2π. Hierauf beruht das von Leroy angegebene Verfahren, den Isochronismus einer Spiralfeder durch Probiren zu erreichen, indem man sie etwas länger als nöthig macht und dann ihre Länge allmählig so lange verändert, bis τ bei sehr verschiedenen Werthen von α gleich gross wird. Die erforderliche Grösse dieser constanten Schwingungsdauer kann schliesslich nach (17) durch Regulirung von Q erzielt werden, z. B. durch Regulirungsschrauben von radialer Beweglichkeit im Schwungringe. Die Combination dieses Verfahrens mit einem solchen Ausschlagwinkel α nahe $= 202^0$, durch welchen zugleich das in (21) als Factor von b vorkommende Integral möglichst klein wird, lässt den Zweck natürlich um so sicherer erreichen.

§. 143. Beseitigung des Einflusses der Lagerreaction durch entsprechende Gestaltung der Spiralfeder.

Im §. 141 wurde schon darauf hingewiesen, dass der Isochronismus einer Unruhe besonders für den Fall einer cylindrischen Spiralfeder durch passend gestaltete Federendigungen (nach Art von Fig. 148) her-

beigeführt werden kann. Eine eingehende theoretische Untersuchung in dieser Hinsicht, controlirt durch die Erfahrung und durch besondere Versuche, verdankt man dem französischen Ingenieur **Phillips**, dessen Arbeit* der folgenden Darstellung zu Grunde liegt.

Mit Rücksicht auf Fig. 148, in welcher A den unbeweglichen Endpunkt der Federmittellinie bedeutet und übrigens auch die Coordinatenaxen beliebig um O gedreht werden können, ferner mit Rücksicht auf die in §. 141 erklärten Buchstabenbedeutungen ist nach den Gleichungen (1) und (2) daselbst, wenn ausserdem mit x_1 und y_1 die Schwerpunktscoordinaten der Federmittellinie bezeichnet werden:

$$EJ\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)=M+Xy-Yx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$EJ\varphi=Ml+(Xy_1-Yx_1)\,l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Wären die Componenten X, Y der Lagerreaction $=0$, so wäre hiernach

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=\frac{M}{EJ}=\frac{\varphi}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und wäre nach §. 141, Gl. (4) die Schwingungsdauer:

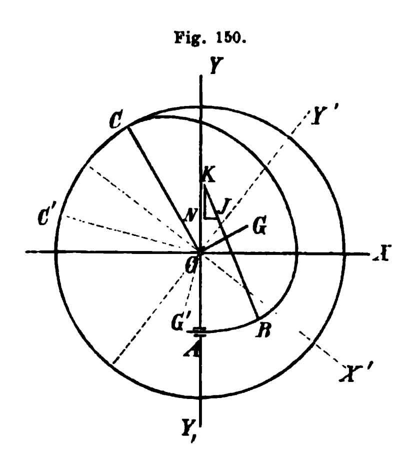
$$\tau=\pi\sqrt{\frac{Ql}{EJ}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

unabhängig vom Ausschlagwinkel α. Umgekehrt wenn die Spiralfeder so gestaltet wäre, dass bei ihrer Deformation durch das Kraftmoment M die Differenz $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}$ für alle Punkte der Mittellinie denselben Werth $=\frac{\varphi}{l}$ hat, so müsste, weil dies nach Gl. (1) und (2) nur im Falle $X=0$, $Y=0$ möglich wäre, nothwendig auch τ den durch Gl. (4) bestimmten Werth haben. In diesem Falle $X=0$, $Y=0$ übt die Lagerung der Unruhaxe keinerlei Zwang auf sie aus, kann also diese Axe frei schwebend gedacht werden, und da die cylindrischen Windungen der Spiralfeder dem Deformationsgesetze (3) entsprechen, wenn die Projectionen ihrer Mittellinien nach wie vor zusammenfallende Kreise bleiben, deren Radius nur von r_0 in r übergegangen ist, so kommt es lediglich darauf an, die symmetrisch gleichen Federendigungen so zu gestalten, dass, wenn auch sie bei frei schwebender Unruhaxe gemäss dem Gesetze (3) deformirt werden, unter φ einen beliebigen Verdrehungswinkel verstanden, jener gemeinsame Mittelpunkt der kreisförmigen Windungen eine unveränderliche Lage behält.

* Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres. Par M. **Phillips**, Ingénieur des mines. Annales des Mines, 1861, tome XX, p. 1—107.

Um die Bedingungen hierfür auszudrücken, sei ABC in Fig. 150 die vom unbeweglichen Endpunkte A ausgehende, bei C mit gemeinsamer Tangente in die kreisförmigen Windungen übergehende Endcurve, O der ursprüngliche Mittelpunkt der Windungen. Durch letzteren sind die rechtwinkligen Coordinatenaxen OX, OY hier so gezogen, dass sie einer rechtwinkligen Drehung des Axensystems von Fig. 148 im Sinne XY entsprechen und dass somit A in der negativen y-Axe OY_1 liegt im Abstande $OA = a$ von O. Während mit r_0 und r bezw. der ursprüngliche und der dem Verdrehungswinkel φ entsprechend geänderte Radius der Kreiswindungen bezeichnet wird, seien ϱ_0 und ϱ der ursprüngliche und der veränderte Krümmungsradius irgend eines Punktes B der Endcurve ABC, deren Länge mit λ bezeichnet sei im Gegensatze zur Länge $= l$ der ganzen Feder; ferner seien ξ und η die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes J für den Punkt B im Zustande der Deformation. Ist dann bei demselben Deformationszustande $BK = \varrho + d\varrho$ der Krümmungsradius für einen dem Punkte B im Sinne gegen C hin unendlich nahe benachbarten Punkt, so ist, wenn JN parallel OX, KN parallel OY,

Fig. 150.



$$JK = d\varrho, \qquad JN = -d\xi, \qquad KN = d\eta \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Das angenommene Deformationsgesetz (3) erhält für die Endcurve die Form:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\varphi}{l} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und wenn mit ϑ der Winkel JKN bezeichnet wird, unter welchem JB gegen OY_1 oder BJ gegen OY geneigt ist, ferner mit ϑ_0 der ursprüngliche Werth dieses Winkels und mit s die Bogenlänge AB, so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass die Normale in A von unveränderlicher Richtung ist:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int \frac{ds}{\varrho} - \int \frac{ds}{\varrho_0} = \frac{\varphi}{l} s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Gemäss diesen Gleichungen (5) — (7) folgt aus dem Dreiecke JKN:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= -\sin\vartheta\, d\varrho = -\sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\,\frac{\varrho_0}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0} \\ d\eta &= \cos\vartheta\, d\varrho = \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\,\frac{\varrho_0}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0} \end{aligned}\right\} \dots\dots (8)$$

und wenn dann, während der Index 0 nach wie vor dem Anfangszustande ($\varphi = 0$) entsprechend gebraucht wird, mit einem Accent die Grössen bezeichnet werden, die sich auf den Anfangspunkt A, mit zwei Accenten diejenigen, die sich auf den Endpunkt C der Curve ABC beziehen, so ist $\vartheta' = \vartheta_0'$ und sind die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Anfangspunkt A der deformirten Curve ABC:

$$\xi' = -\varrho' \sin\vartheta_0' = -\frac{\varrho_0'}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0'}\sin\vartheta_0'$$

$$\eta' = -a + \varrho' \cos\vartheta_0' = -a + \frac{\varrho_0'}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0'}\cos\vartheta_0'.$$

Damit ergeben sich durch Integration der Gleichungen (8) längs der ganzen Curve ABC die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes für den Endpunkt C im Zustande der Deformation:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' &= -\frac{\varrho_0'}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0'}\sin\vartheta_0' - \int_0^l \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\,\frac{\varrho_0}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0} \\ \eta'' &= -a + \frac{\varrho_0'}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0'}\cos\vartheta_0' + \int_0^l \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right) d\,\frac{\varrho_0}{1+\frac{\varphi}{l}\varrho_0} \end{aligned}\right\} \dots (9).$$

Wenn auch die Curve ABC und die bei C sich anschliessenden Kreiswindungen in diesem Uebergangspunkte eine gemeinsame Tangente haben, so können doch ihre Krümmungsradien daselbst verschieden sein, ihre Krümmungsmittelpunkte folglich verschiedene Lagen in der gemeinsamen Normale haben. Zwischen den Coordinaten ξ'', η'' des Krümmungsmittelpunktes der deformirten Curve ABC für den Punkt C und den Coordinaten ξ''', η''' des Mittelpunktes der deformirten Kreiswindungen bestehen deshalb ähnliche Beziehungen wie zwischen den Coordinaten der Punkte J und K, Fig. 150, wenn $BJ = \varrho''$, $BK = r$ und Winkel

$JKN = \vartheta''$ gesetzt wird, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \xi''' &= \xi'' - (r - \varrho'')\sin\vartheta'' \\ \eta''' &= \eta'' + (r - \varrho'')\cos\vartheta'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Es genügt die weitere Entwickelung des Ausdruckes von ξ''', aus welchem derjenige von η''' durch entsprechende Vertauschungen hervorgeht. Indem aber nach (3), (6) und (7):

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0}, \quad \varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s$$

ist, ergiebt sich bei Substitution des Ausdruckes (9) von ξ'':

$$\xi''' = -\frac{\varrho_0'}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0'} \sin\vartheta_0' + \frac{\varrho_0''}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0''} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l}\lambda\right)$$

$$- \frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l}\lambda\right) - \int_0^\lambda \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right) d\,\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0}$$

oder, wenn das Integral nach der Formel

$$\int_0^\lambda u\,dv = (uv)_\lambda - (uv)_0 - \int_0^\lambda v\,du$$

entwickelt wird:

$$\xi''' = -\frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l}\lambda\right) + \int_0^\lambda \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0}\, d\sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right) \quad \ldots (11)$$

oder wegen $\frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0}\, d\sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right) =$

$$= \frac{\varrho_0}{1 + \frac{\varphi}{l}\varrho_0} \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right)\left(\frac{d\vartheta_0}{ds} + \frac{\varphi}{l}\right) ds = \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right) ds$$

$$\xi''' = -\frac{r_0}{1 + \frac{\varphi}{l} r_0} \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l}\lambda\right) + \int_0^\lambda \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l} s\right) ds \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Was η''' betrifft, so kann man bemerken, dass die zweite Gleichung (10) aus der ersten durch Vertauschung von *sin* mit — *cos* und von ξ mit η hervorgeht, dass aber nach den Gleichungen (9) auch η'' aus ξ'' durch dieselbe Vertauschung von *sin* mit — *cos* erhalten wird, abgesehen von

dem hinzukommenden Summanden $-a$. Somit muss auch der resultirende Ausdruck von η''' aus (11) oder (12) durch Hinzufügung von $-a$ nebst Vertauschung von sin mit $-cos$, also von

$$d\,sin = cos \text{ mit } -d\,cos = sin$$

zu erhalten sein, so dass analog Gl. (12) sich ergiebt:

$$\eta''' = -a + \frac{r_0}{1+\frac{\varphi}{l}r_0}\,cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi}{l}\lambda\right) + \int_0^\lambda sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi}{l}s\right)ds \quad .\,.\,(13).$$

Gemäss obiger Forderung, dass der Mittelpunkt der Windungen seine Lage nicht ändern soll, müssen ξ''' und $\eta''' =$ Null sein unabhängig von φ. Daraus ergeben sich Bedingungsgleichungen für die Endcurven, wenn die Ausdrücke (12) und (13) von ξ''' und η''' nach wachsenden Potenzen von φ entwickelt werden, deren Coefficienten dann einzeln $=$ Null sein müssen; doch sind dabei die Glieder mit den höheren Potenzen von φ ohne wesentlichen Fehler zu vernachlässigen. Indem nämlich $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{s}{l}$ kleine Brüche sind, höchstens etwa $=\frac{1}{20}$, so sind, wenn auch φ nach §. 142 bis zu 200° betragen sollte, doch $\frac{\varphi}{l}\lambda$ und $\frac{\varphi}{l}s$ höchstens etwa $=10^0$, also so kleine Brüche, dass ihre Cosinus $=1$ und ihre Sinus $=$ den in Bogenmaass ausgedrückten Winkeln selbst gesetzt werden können mit Fehlern, die höchstens $1\frac{1}{2}$ % bezw. $\frac{1}{2}$ % des wahren Werthes betragen. Auch ist dann wegen r_0 nahe $=\frac{1}{3}\lambda$:

$$\frac{\varphi}{l}r_0 < 0{,}06$$

und somit

$$\frac{1}{1+\frac{\varphi}{l}r_0} = 1 - \frac{\varphi}{l}r_0$$

zu setzen mit einem verhältnissmässigen Fehler, der nur wenig mehr, als $\frac{1}{3}$ % betragen kann. Mit solcher Annäherung ergiebt die Forderung $\xi'''=0$, $\eta'''=0$ nach (12) und (13) die Gleichungen:

$$\int_0^\lambda\left(cos\,\vartheta_0 - \frac{\varphi s}{l}sin\,\vartheta_0\right)ds = r_0\left(1-\frac{\varphi r_0}{l}\right)\left(sin\,\vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l}cos\,\vartheta_0''\right)$$

$$\int_0^\lambda\left(sin\,\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}cos\,\vartheta_0\right)ds = a - r_0\left(1-\frac{\varphi r_0}{l}\right)\left(cos\,\vartheta_0'' - \frac{\varphi\lambda}{l}sin\,\vartheta_0''\right)$$

und da sie unabhängig von φ erfüllt werden müssen, zerfallen sie bei Abstraction von den Gliedern mit φ^2, welche kleine Grössen zweiter Ordnung sind, in je zwei Gleichungen, entsprechend ihren Gliedern ohne φ und mit φ, nämlich in die Gleichungen:

$$\int_0^\lambda \cos\vartheta_0\, ds = r_0 \sin\vartheta_0''\,;\quad \int_0^\lambda \sin\vartheta_0\, ds = a - r_0\cos\vartheta_0'' \quad \ldots \quad (14$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\lambda s\sin\vartheta_0\, ds &= r_0\left(r_0\sin\vartheta_0'' - \lambda\cos\vartheta_0''\right)\\ \int_0^\lambda s\cos\vartheta_0\, ds &= r_0\left(r_0\cos\vartheta_0'' + \lambda\sin\vartheta_0''\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (15).$$

Die Gleichungen (14) tragen zur Bestimmung der Endcurve nicht bei; sie entsprechen lediglich der Voraussetzung, dass in der Ruhelage der Feder, d. i. für $\varphi = 0$ der Mittelpunkt der Kreiswindungen im Ursprunge O der Coordinaten (Fig. 150) liegt, wie man leicht daraus erkennt, dass, unter x und y die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve ABC in diesem ursprünglichen Gleichgewichtszustande verstanden,

$$ds\cos\vartheta_0 = dx \quad \text{und} \quad ds\sin\vartheta_0 = dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

ist. Was aber die Gleichungen (15) betrifft, so kann man bemerken, dass mit Rücksicht auf (16)

$$\int s\sin\vartheta_0\, ds = \int s\, dy = sy - \int y\, ds$$
$$\int s\cos\vartheta_0\, ds = \int s\, dx = sx - \int x\, ds$$

ist und folglich, zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = \lambda$ genommen, sowie mit Rücksicht darauf, dass die ursprünglichen Coordinaten des Punktes C:

$$y = -r_0\cos\vartheta_0'',\quad x = r_0\sin\vartheta_0''$$

sind, und wenn hier mit x_1, y_1 die Schwerpunktscoordinaten der ursprünglichen (nicht deformirten) Curve ABC bezeichnet werden:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\lambda s\sin\vartheta_0\, ds &= -\lambda r_0\cos\vartheta_0'' - \lambda y_1\\ \int_0^\lambda s\cos\vartheta_0\, ds &= \lambda r_0\sin\vartheta_0'' - \lambda x_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

Die Combination dieser mit den Gleichungen (15) giebt:

$$\lambda y_1 = -r_0^2\sin\vartheta_0''\,;\quad \lambda x_1 = -r_0^2\cos\vartheta_0''.$$

Hiernach ist, wenn mit G (Fig. 150) der Schwerpunkt der Curve ABC bezeichnet wird,

$$tg\, GOX = \frac{y_1}{x_1} = tg\,\vartheta_0'' = tg\,(180^0 + COY) = tg\, COY,$$

also Winkel $GOX = COY$, oder Winkel $COG = YOX = 90^0$. Ferner ergiebt sich die Strecke

$$OG = \sqrt{y_1^2 + x_1^2} = \frac{r_0^2}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Die Endcurve ABC hat also folgenden zwei Bedingungen Genüge zu leisten:

1. Ihr Schwerpunkt G muss in der Geraden liegen, welche im Mittelpunkte O der Windungen normal zum Radius für den Punkt C gezogen wird, in welchem die Endcurve in die Kreiswindungen übergeht.

2. Dieser Schwerpunkt muss vom Mittelpunkte der Windungen eine solche Entfernung haben, dass der Radius r_0 der letzteren mittlere Proportionale zu ihr und zur Länge λ der Endcurve ist.

Offenbar kann diesen Bedingungen durch unendlich mannigfach verschiedene Formen der Curve genügt werden, die am einfachsten graphisch zu bestimmen sind. Werden nämlich bei Voraussetzung eines grossen Maassstabes der Zeichnung (etwa der 20 fachen natürlichen Grösse entsprechend) zunächst die Punkte A und C, Fig. 150, willkürlich angenommen, erfahrungsmässig passend so, dass OA ungefähr $= \frac{1}{2} OC$ und der Polarwinkel AOC der Curve $ABC = 180^0$ bis 270^0 ist, und wird dann letztere so, dass OC ihre Normale im Punkte C ist, übrigens zunächst nach Schätzung gezeichnet, so kann, unter OG eine Gerade normal zu OC verstanden, jene Curve allmählig zuerst so verändert werden, dass ihr Schwerpunkt in OG liegt, dann so, dass dessen Entfernung von O der Gleichung (18) entsprechend wird. Wenn man zu dem Ende die jeweils vorliegende Curve in so kleine gleiche Bögen theilt, dass dieselben als gerade Linien und somit ihre Mittelpunkte als ihre Schwerpunkte zu betrachten sind, so erfordert die erste Bedingung, dass die algebraische Summe der Entfernungen dieser Einzelschwerpunkte von der Geraden $OG =$ Null sei und die zweite Bedingung, dass die algebraische Summe ihrer Entfernungen von OC durch Multiplication mit der gemeinsamen Länge der Elementarbögen ein Produkt = dem Quadrat von OC ergebe. Da die Eintheilung der Bogenlänge $ABC = \lambda$ in genau gleiche Theile lästig wäre, kann auch der letzte dieser Theile stets etwas kleiner bleiben, als die übrigen, falls dann nur seine Schwerpunktsabstände von OG und OC in demselben Verhältnisse verkleinert bei obigem Verfahren benutzt werden.



Die Eigenschaft des Isochronismus grosser und kleiner Schwingungen verdankt die mit solchen Federendigungen versehene Unruhe dem Umstande, dass dadurch die Componenten X, Y der Lagerreaction $=$ Null werden und somit in Gl. (2) das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet. Weil aber sowohl diese theoretische Formbestimmung der Endcurven auf gewissen Vernachlässigungen beruht, als auch die so theoretisch bestimmte Form nur angenähert realisirt werden kann, wird auch in Wirklichkeit die Lagerreaction nicht vollkommen $=$ Null werden. Unter diesen Umständen würde das Verschwinden jenes Gliedes $(Xy_1 - Yx_1) l$ in Gl. (2) dadurch unterstützt werden, dass gleichzeitig die Schwerpunktscoordinaten x_1, y_1 der Spiralfedercurve verschwindend klein wären, und ist es deshalb von Interesse zu bemerken, dass dieselben Endcurven, welche gemäss der Forderung einer verschwindend kleinen Lagerreaction bestimmt wurden, ohne Weiteres zugleich bewirken, dass der Schwerpunkt der ganzen Spiralfeder bezw. ihrer Mittellinie in die Unruheaxe fällt.

Um das zunächst für den Ruhezustand $(\varphi = 0)$ nachzuweisen, werde in Fig. 150 ausser der Curve ABC noch die ihr gleiche am andern Ende der Feder hinzugedacht; sie gehe bei C' in die Kreiswindungen über und liege folglich in Bezug auf die Halbirungslinie OX' des Winkels $COC' = 2\beta_0$ als Symmetrieaxe der Curve ABC gegenüber. Ist G' ihr Schwerpunkt und OY' senkrecht zu OX', so ist nach Obigem

$$C'OG' = COG = 90^0, \quad OG' = OG = \frac{r_0^2}{\lambda}, \quad GOY' = \beta_0.$$

Nun besteht die ganze Federmittellinie aus den zwei symmetrisch gleichen Endcurven, dem Kreisbogen CC' und aus einer gewissen Zahl von (in der Projection) zusammenfallenden vollen Kreislinien. Der Schwerpunkt dieser letzteren liegt in ihrem gemeinsamen Mittelpunkte O, und bleibt also nur zu zeigen, dass auch der Schwerpunkt der als Ganzes betrachteten übrigen Bestandtheile in O liegt oder, da für diese Bestandtheile die Gerade OX' Symmetrieaxe ist, braucht nur gezeigt zu werden, dass für die Gerade OY', bezüglich auf welche die Punkte G, G' auf der entgegengesetzten Seite wie der Schwerpunkt von CC' liegen, das Moment der zwei Endcurven dem Moment des Kreisbogens CC' gleich ist. In der That aber ist das erstere Moment

$$= 2\lambda \cdot OG \sin\beta_0 = 2\, r_0^2 \sin\beta_0$$

$=$ dem andern, nämlich $= r_0$ mal Sehne CC'.

Wenn nun ferner die schwingende Unruhe augenblicklich um den beliebigen Winkel φ gegen ihre Ruhelage verdreht und die Feder ent-

sprechend deformirt ist, so bleibt doch der Schwerpunkt ihrer Mittellinie nach wie vor im Punkte O. Zunächst nämlich gilt das von den vollen Kreiswindungen, deren Radius nur von r_0 in r übergegangen ist, und wenn jetzt die Figur 150 auf den Zustand der Deformation bezogen und der geänderte Winkel COC' mit 2β bezeichnet wird, so ist die Halbirungslinie OX' des letzteren nach wie vor Symmetrieaxe, so dass nur wieder die Gleichheit der Momente des Systems der zwei Endcurven und des Kreisbogens CC' für die Gerade OY' nachgewiesen zu werden braucht. Analog dem Obigen ist letzteres Moment $= 2r^2 \sin\beta$ und bleibt also nur zu zeigen, dass das Moment $= M$ der deformirten Curve ABC für die Gerade $OY' = r^2 \sin\beta$ ist. Werden zu dem Ende mit x', y' die Coordinaten ihres beliebigen Punktes B für OX', OY' als Axen bezeichnet, so ist

$$M = \int_0^\lambda x'\,ds = (x's)_0^\lambda - \int_0^\lambda s\,dx'$$

oder, da x' für den Punkt $C = -r\cos\beta$ und analog Gl. (16), unter ϑ' den Neigungswinkel der Normale BJ gegen OY' verstanden, $dx' = ds \cos\vartheta'$ ist:

$$M = -r\lambda\cos\beta - \int_0^\lambda s\cos\vartheta'\,ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Mit Rücksicht auf (7) ist aber:

$$\vartheta' = \vartheta + YOY' = \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} + \left(\frac{\pi}{2} - YOC - \beta\right)$$

oder wegen $YOC = \vartheta'' - \pi = \vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l} - \pi$:

$$\vartheta' = \frac{3}{2}\pi + \vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} - \vartheta_0'' - \frac{\varphi\lambda}{l} - \beta$$

$$\cos\vartheta' = \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l} - \vartheta_0'' - \frac{\varphi\lambda}{l} - \beta\right)$$

$$= \sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right)\cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l} + \beta\right) - \cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right)\sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l} + \beta\right).$$

Gleichung (19) erhält dadurch die Form:

$$M = -r\lambda\cos\beta - \cos\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l} + \beta\right)\int_0^\lambda s\sin\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right)ds$$

$$+ \sin\left(\vartheta_0'' + \frac{\varphi\lambda}{l} + \beta\right)\int_0^\lambda s\cos\left(\vartheta_0 + \frac{\varphi s}{l}\right)ds \quad . (20).$$

Indem aber ferner die durch (12) und (13) ausgedrückten Mittelpunktscoordinaten ξ''', η''' der Kreiswindungen unabhängig vom Winkel $\varphi =$ Null

bleiben, sind auch ihre nach φ genommenen Differentiale = Null, ist also

$$0 = -\frac{r_0}{1+\frac{\varphi r_0}{l}}\frac{\lambda}{l}\cos\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)+\frac{r_0}{\left(1+\frac{\varphi r_0}{l}\right)^2}\frac{r_0}{l}\sin\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right) - \frac{1}{l}\int_0^\lambda s\sin\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds$$

$$0 = -\frac{r_0}{1+\frac{\varphi r_0}{l}}\frac{\lambda}{l}\sin\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)-\frac{r_0}{\left(1+\frac{\varphi r_0}{l}\right)^2}\frac{r_0}{l}\cos\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right) + \frac{1}{l}\int_0^\lambda s\cos\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds.$$

Daraus folgt mit $r = \frac{r_0}{1+\frac{\varphi r_0}{l}}$:

$$\int_0^\lambda s\sin\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds = -r\lambda\cos\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)+r^2\sin\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)$$

$$\int_0^\lambda s\cos\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds = r\lambda\sin\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)+r^2\cos\left(\vartheta_0''+\frac{\varphi\lambda}{l}\right)$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in Gl. (20) die zu beweisende Gleichung:

$$M = -r\lambda\cos\beta + r\lambda\cos\beta + r^2\sin\beta = r^2\sin\beta.$$

Die vorhergehende Untersuchung bezog sich auf den Fall einer cylindrischen Spiralfeder, wie sie bei Chronometern gebräuchlich ist. Bei einer flachen Feder handelt es sich darum, dieselbe an ihrem äusseren unbeweglich befestigten Ende möglichst so zu gestalten, dass die Lagerreaction verschwindend klein ist; denn am inneren Ende ist die übrigens nahe als Archimedische Spirale in stetig sich verengernden Windungen um die Unruhaxe herumlaufende Feder unmittelbar am Schwungrade befestigt, etwa im Abstande r_1 von der Axe und zwar gewöhnlich so, dass die Normale der Mittellinie für diesen inneren Endpunkt eine radiale (die Axe schneidende) Richtung hat. Unter der Voraussetzung, dass Letzteres der Fall ist, und dass dann wieder die ganze Feder bei frei schwebender Unruhaxe gemäss dem Gesetze (3) deformirt wird, können die Coordinaten ξ''', η''' des Punktes, welcher in jener

Normale für den inneren Endpunkt der Federmittellinie von diesem Punkte den Abstand r_1 hat, also die Coordinaten des ursprünglich in O gelegenen Punktes der Axe durch eine ganz ähnliche Entwickelung wie vorhin die Mittelpunktscoordinaten der Kreiswindungen ausgedrückt werden. In den obigen Ausdrücken (12) und (13) ist jetzt nur

$$r_1 \text{ für } \frac{r_0}{1+\frac{\varphi}{l}r_0} \text{ und } l \text{ für } \lambda$$

zu setzen, indem sich hier die Untersuchung auf die ganze Feder zu erstrecken hat, an die Stelle des Punktes C (Fig. 150) also der am Schwungrade feste innere Endpunkt tritt und dessen unveränderlicher Abstand r_1 von der Schwungradaxe an die Stelle des veränderlichen Halbmessers r der Kreiswindungen. Somit ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \xi''' &= -r_1 \sin(\vartheta_0''+\varphi)+\int_0^l \cos\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds \\ \eta''' &= -a+r_1\cos(\vartheta_0''+\varphi)+\int_0^l \sin\left(\vartheta_0+\frac{\varphi s}{l}\right)ds \end{aligned}\right\} \ldots (21).$$

Um nun aber diese Ausdrücke wieder als lineare Functionen von φ darzustellen, ist es nöthig, hier den Winkel φ selbst als hinlänglich klein anzunehmen, um seinen Cosinus $=1$ und seinen Sinus $=$ dem in Bogenmaass ausgedrückten Winkel setzen zu können. Dadurch ergeben die auch hier wieder zu erfüllenden Bedingungen $\xi'''=0$, $\eta'''=0$ die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^l \cos\vartheta_0\, ds - \frac{\varphi}{l}\int_0^l s\sin\vartheta_0\, ds = r_1\sin\vartheta_0'' + \varphi r_1 \cos\vartheta_0''$$

$$\int_0^l \sin\vartheta_0\, ds + \frac{\varphi}{l}\int_0^l s\cos\vartheta_0\, ds = a - r_1\cos\vartheta_0'' + \varphi r_1 \sin\vartheta_0''$$

und da sie unabhängig von φ erfüllt werden müssen, zerfallen sie in:

$$\int_0^l \cos\vartheta_0\, ds = r_1\sin\vartheta_0''\,;\quad \int_0^l \sin\vartheta_0\, ds = a - r_1\cos\vartheta_0'' \ldots (22)$$

$$\int_0^l s\sin\vartheta_0\, ds = -l r_1 \cos\vartheta_0''\,;\quad \int_0^l s\cos\vartheta_0\, ds = l r_1 \sin\vartheta_0'' \ldots (23).$$

Die Gleichungen (22) drücken analog den obigen Gleichungen (14) nur die Voraussetzung aus, dass in der Ruhelage die Axe der Unruhe durch den Ursprung O der Coordinaten geht. Aus (23) aber folgt, da

analog den Gleichungen (17) hier

$$\int_0^l s \sin \vartheta_0 \, ds = -l r_1 \cos \vartheta_0'' - l y_1$$

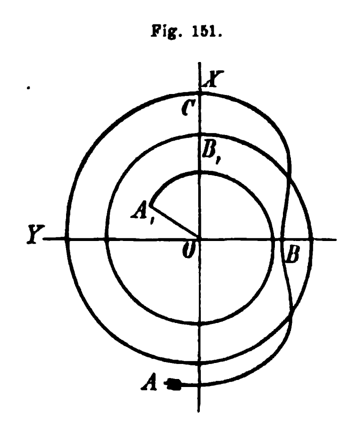
$$\int_0^l s \cos \vartheta_0 \, ds = \quad l r_1 \sin \vartheta_0 - l x_1$$

ist, unter x_1, y_1 die Schwerpunktscoordinaten der nicht deformirten Federmittellinie verstanden, einfach

$$x_1 = y_1 = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (24).$$

Die flache Feder muss also auch, um möglichst isochrone Schwingungen zu gestatten, so gestaltet werden, dass der Schwerpunkt ihrer Mittellinie in der Axe liegt. Phillips zeigte a. a. O., dass sich dasselbe Resultat auch dann ergiebt, wenn die Normale der Curve für ihren inneren Endpunkt unter einem beliebigen unveränderlichen Winkel gegen den Radius des Schwungrades geneigt ist. Um sie dieser Bedingung gemäss zu zeichnen, was wieder auf unendlich mannigfach verschiedene Weisen möglich ist, kann das oben für die Endcurven der cylindrischen Spirale angegebene graphische Verfahren durch die Rechnungsergebnisse des vorigen §. unterstützt werden.

Fig. 151.



Es sei nämlich $ABCB_1A_1$ (Fig. 151) die der Ruhelage entsprechende Form einer solchen flachen Spiralfeder, von C bis A_1 als Archimedische Spirale angenommen, welche thatsächlich mehr Windungen hat, als hier der Einfachheit wegen gezeichnet sind. Die Länge der Curve CB_1A_1 sei $= l_1$, der Fahrstrahl $OC = r_0$, $OA_1 = r_1$, die radiale Entfernung von je zwei auf einander folgenden Windungen $CB_1 = e$, der Winkel $COA_1 = \varepsilon_0$. Unter x_1 und y_1 hier die Schwerpunktscoordinaten des a priori angenommenen Curvenstückes $CB_1A_1 = l_1$ für die aus Fig. 151 ersichtlichen Coordinatenaxen verstanden, ist dann nach (5) im vorigen §:

$$f = l_1 x_1 = r_0^2 (p + q^2 \sin \varepsilon_0 - pq \cos \varepsilon_0)$$

$$g = l_1 y_1 = r_0^2 (1 - pq \sin \varepsilon_0 - q^2 \cos \varepsilon_0)$$

mit $p = \frac{e}{\pi r_0}$ und $q = \frac{r_1}{r_0}$. Indem hiernach x_1 von geringerer Grössenordnung als y_1, auch y_1 jedenfalls positiv ist, ist die Endcurve ABC

$= \lambda = l - l_1$ so anzunehmen, dass sie von der x-Axe aus hauptsächlich auf der Seite der negativen y-Axe liegt und von dieser beinahe halbirt wird, und kann sie dann allmählig so lange verändert werden bis, unter ξ_1 und η_1 ihre Schwerpunktscoordinaten für dieselben Axen OX, OY verstanden, mit genügender Annäherung

$$\lambda \xi_1 = - l_1 x_1 \text{ und } \lambda \eta_1 = - l_1 y_1$$

geworden ist. —

Durch eine grössere Zahl sorgfältiger Versuche, die sich in dem hier benutzten Mémoire ausführlich beschrieben finden, ist von Phillips sowohl die Formel (4) für die Schwingungsdauer, als auch der Einfluss verschiedener Federendigungen auf die Deformation und den Isochronismus der Spiralfeder geprüft und mit der Theorie in Einklang gefunden worden. Auch werden mehrere Fälle angeführt, in denen die theoretisch bestimmten Curven fast genau mit denjenigen übereinstimmten, zu welchen praktische Chronometermacher empirisch durch lange Erfahrung und viele Proben gelangt waren.

§. 144. Einfluss der Temperatur auf die Schwingungsdauer der Unruhe.

Wenn auch durch Anwendung der in den zwei vorigen Paragraphen entwickelten Regeln die Schwingungsdauer einer Unruhe möglichst angenähert der Gleichung

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Ql}{EJ}}$$

entsprechend gemacht ist, so bleibt sie doch vor Allem von der Temperatur abhängig, und zwar in gleichem Sinne mit derselben veränderlich in solchem Grade, dass eine mit solcher Unruhe als Regulator ausgerüstete Uhr für jeden Grad der Temperaturzunahme etwa 10 Secunden täglich nachgehen kann. In der That sind alle in obigem Ausdrucke vorkommenden Grössen Q, l, J, E mit der Temperatur veränderlich. Werden ihre Werthe für $t = 0$ bezw. mit Q_0, l_0, J_0, E_0 bezeichnet und ist μ der lineare Ausdehnungscoefficient des Materials des Schwungrades (in der Regel Messing), σ derselbe für die Stahlfeder, beide bezogen auf 1^0 C., so ist bei der Temperatur t zu setzen:

$$Q = Q_0 (1 + \mu t)^2, \quad l = l_0 (1 + \sigma t), \quad J = J_0 (1 + \sigma t)^4.$$

Weniger zuverlässig bekannt (auch wohl mehr schwankend mit der materiellen Beschaffenheit) ist das Gesetz, nach welchem der Elasticitätsmodul E von der Temperatur abhängt. Während Wertheim denselben u. A.

insbesondere für Eisen und Stahl bei von 0° an wachsender Temperatur anfangs zunehmend und erst bei höheren Temperaturen abnehmend fand, ergab sich nach Kohlrausch für die von ihm untersuchten Metalle (Eisen, Kupfer und Messing) eine beständige Abnahme von E der Art, dass für solche Temperaturen, wie sie hier allein in Betracht kommen,

$$E = E_0 (1 - \varepsilon t)$$

gesetzt werden kann. Bei Voraussetzung dieses letzteren Abhängigkeitsgesetzes würde sich durch eine Temperaturzunahme $= t$ die Schwingungsdauer ändern im Verhältnisse

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{\frac{(1 + \mu t)^2}{(1 - \varepsilon t)(1 + \sigma t)^3}}$$

$$\text{nahe} = \sqrt{1 + (\varepsilon + 2\mu - 3\sigma) t} = 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \mu - \frac{3}{2}\sigma\right) t.$$

Da der Ausdehnungscoefficient des Messings ungefähr 1,5 mal so gross ist wie der des Stahls, so ergiebt sich auch nahe

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Der Einfluss der Temperatur rührt also fast ausschliesslich von der Veränderlichkeit des Elasticitätscoefficienten her, und kann der Umstand, dass mit wachsender Temperatur in der That τ zunimmt, die Schwingungszahl einer Unruhe nämlich abnimmt (die betreffende Uhr nachgeht), als Bestätigung der Gültigkeit des von Kohlrausch gefundenen Abhängigkeitsgesetzes von E für Federstahl gelten. Bei einer Temperaturzunahme von 1° C. würde entsprechend der Zunahme von τ im Verhältnisse $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ die betreffende Uhr um täglich

$$86400 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \text{ Secunden}$$

nachgehen, und wenn dieses Nachgehen thatsächlich 10 Secunden betrüge, könnte daraus

$$\varepsilon = \frac{1}{4320} = 0{,}00023$$

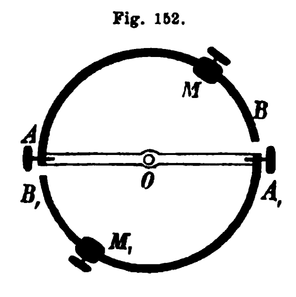
gefolgert werden, etwa = der Hälfte des Werthes, der von Kohlrausch für Eisen gefunden wurde.

Um dem Einflusse der Temperatur zu begegnen, begnügt man sich bei gewöhnlichen Taschenuhren mit gelegentlicher Verkleinerung oder Vergrösserung der wirksamen (an der Deformation Theil nehmenden,

Länge der flachen Spiralfeder vermittels des sogenannten Rückers, eines ungleicharmigen Hebels, dessen Drehaxe mit der Unruhaxe zusammenfällt und dessen kürzerer Arm die Feder in der Nähe ihres am Gestell festen Endes so einklemmt, dass ein Gleiten der Klemme längs der Feder möglich ist, während der längere Arm zugleich als Griff und als Zeiger dient. Insoweit die Klemme längs der Feder beweglich sein soll, muss letztere möglichst genau kreisförmig gestaltet sein, damit die Handhabung des Rückers ohne Deformation der Feder und ohne Vergrösserung des Lagerdruckes der Unruhaxe geschehen könne.

Bei Chronometern sind besondere Compensationen nöthig, die ebenso wie beim Compensationspendel auf der verschiedenen Ausdehnbarkeit verschiedener Metalle beruhen. Bei der gewöhnlichen Anordnung (Fig. 152) besteht der Schwungring aus zwei getrennten Theilen AB und $A_1 B_1$, jeder am einen Ende getragen von einem gemeinschaftlichen Stege AA_1, der in der Mitte O auf der Axe festsitzt und an betreffender Stelle (in der Entfernung a von O) mit der cylindrischen Spiralfeder fest verbunden ist. Jede Ringhälfte ist aus einem äusseren Messingstreifen und einem inneren Stahlstreifen zusammengelöthet; wegen der grösseren Ausdehnbarkeit des Messings nimmt dann bei wachsender Temperatur die Krümmung der beiden Halbringe zu, so dass ihre Enden B und B_1 sich der Axe nähern, somit das Trägheitsmoment Q verkleinert und bei passender Wahl der Verhältnisse die Verkleinerung des Elasticitätsmodul E unschädlich gemacht wird. Massen M und M_1, welche an verschiedenen Stellen festgeklemmt oder in Form von Schrauben an verschiedenen Stellen eingeschraubt werden können, dienen zur Regulirung der compensirenden Wirkung. Andere Massen, bei A und A_1 vermittels feiner Schrauben radial beweglich, dienen zur Regulirung von Q und dadurch von τ, abgesehen vom Einflusse der Temperatur.

Fig. 152.



Uebrigens kann auch bei vollkommenster Ausführung dieser Compensation am Schwungrade ein gewisser Einfluss der Temperatur auf die Schwingungsdauer τ dadurch übrig bleiben, dass mit der Längenänderung der Feder zugleich eine Formänderung derselben und somit eine vermehrte Lagerreaction verbunden ist. Um das zu verhindern, muss die Aehnlichkeit der allen Temperaturen entsprechenden Federmittellinien dadurch ermöglicht werden, dass die Abstände a ihrer Endpunkte von der

Axe in demselben Verhältnisse mit der Temperatur veränderlich gemacht werden wie die Länge der Feder. Das wäre der Fall, wenn der Theil des Uhrgestelles, an welchem das unbewegliche Federende befestigt ist, und wenn ebenso das Armsystem des Schwungrades, bezw. der Steg AA_1 (Fig. 152) der Compensationsunruhe aus demselben Material wie die Spiralfeder, also aus Federstahl verfertigt würde; besser aber ist es durch die Wahl solcher Federendigungen zu erreichen, welche $a = 0$ oder wenigstens einem sehr kleinen Werthe von a entsprechen.

§. 145. Einfluss der Bewegungswiderstände auf die Schwingungen des Pendels oder der Unruhe.

Als Widerstände kommen hier in Betracht die Reibung und der Luftwiderstand. Erstere kann beim Pendel durch Federaufhängung, bei der Unruhe (als Axenreibung in den Lagern) durch passende Gestaltung der Spiralfeder beseitigt oder wenigstens auf einen fast unmerklichen Betrag reducirt werden, der Luftwiderstand dagegen lässt sich durch zweckmässige Gestaltung des Pendels oder des Schwungrades der Unruhe nur vermindern, nicht beseitigen. Natürlich würde jeder Widerstand eine fortgesetzte Abnahme des Ausschlagwinkels α zur Folge haben, wenn keine bewegende Kraft vorhanden wäre, die periodisch den Arbeitsverlust ersetzt. Hier, wo es sich nicht sowohl um den Ausschlagwinkel, als um die Schwingungsdauer handelt, soll von jenem zeitweiligen Antriebe abgesehen werden. Auch werden solche Verhältnisse vorausgesetzt (herbeigeführt beim Pendel durch genügend kleine Schwingungen, bei der Unruhe durch Anwendung der in §. 142 und §. 143 entwickelten Regeln), dass eine Aenderung von α an und für sich keinen merklichen Einfluss auf die Schwingungsdauer ausübt, dass also diese beim Pendel

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Q}{Gr}}$$

ist, unter G dessen Gewicht, Q sein Trägheitsmoment für die Aufhängungsaxe und r den Schwerpunktsabstand von dieser Axe verstanden, bei der Unruhe aber nach §. 141, Gl. (4):

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{Ql}{EJ}}$$

mit den dort erklärten Bedeutungen von Q, l, J, E. Wenn dann, wie im §. 142, die Zeit t von einem Augenblicke grössten Ausschlages $= \alpha$ aus der Ruhelage gerechnet und für die Schwingung bis zur andern äussersten

Lage, während also φ ohne Widerstände von α bis $-\alpha$, mit Rücksicht auf dieselben aber von α bis $-\alpha_1$ (α_1 etwas $< \alpha$) abnimmt, die Winkelgeschwindigkeit ω positiv gesetzt wird, so ist bei Abstraction von Widerständen für das Pendel:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Gr\sin\varphi}{Q} \text{ sehr nahe } = \frac{Gr}{Q}\varphi$$

und für die Unruhe nach §. 142:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{EJ}{Ql}\varphi,$$

in beiden Fällen also

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2\varphi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\pi}{k}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{zu setzen mit } k^2 = \dfrac{Gr}{Q} \text{ für das Pendel} \\ \text{bezw. } k^2 = \dfrac{EJ}{Ql} \text{ für die Unruhe} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1).$$

Mit Rücksicht auf die Widerstände kann also auch in beiden Fällen

$$\frac{d\omega}{dt} = k^2\varphi - w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt werden, unter w im Allgemeinen eine Function von ω und φ verstanden. Aus dieser Differentialgleichung folgen dann durch Integration ebenso wie im §. 142 (woselbst w eine Function nur von φ bedeutete), die dort mit (15) und (16) bezeichneten Gleichungen:

$$\omega = k\alpha\sin(kt) - \sin(kt)\int_0^t w\sin(kt)\,dt$$
$$- \cos(kt)\int_0^t w\cos(kt)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\varphi = \alpha\cos(kt) - \frac{\cos(kt)}{k}\int_0^t w\sin(kt)\,dt$$
$$+ \frac{\sin(kt)}{k}\int_0^t w\cos(kt)\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

Wäre w eine Constante, so würde aus (3) folgen:

$$\omega = k\alpha\sin(kt) - \frac{w}{k}\left\{\sin(kt)\left[1-\cos(kt)\right] + \cos(kt)\sin(kt)\right\}$$
$$= \left(k\alpha - \frac{w}{k}\right)\sin(kt)$$

und würde $\omega = 0$ für $t = \frac{\pi}{k}$ unabhängig von w. Durch ein Widerstandsmoment von constanter Grösse wird also zwar das Maximum der Winkelgeschwindigkeit bei gegebenem anfänglichem Ausschlagwinkel α verkleinert, dagegen die Schwingungsdauer nicht verändert. Eine Verkleinerung des Geschwindigkeitsmaximums hat natürlich jeder Widerstand zur Folge; ob aber die Schwingungsdauer durch ihn in anderen Fällen vergrössert oder verkleinert wird, ist daraus zu schliessen, ob die Winkelgeschwindigkeit ω für $t = \frac{\pi}{k}$ noch positiv oder schon negativ ist. Wird diese Winkelgeschwindigkeit mit ω_1 bezeichnet, so folgt aus (3) mit $x = kt$:

$$\omega_1 = \int_0^{\frac{\pi}{k}} w \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k}\int_0^{\pi} w \cos x\, dx = \frac{1}{k}\int_0^{\pi} w\, d \sin x \quad \ldots \quad (5).$$

Ist nun $w = f(\omega)$ eine Function der Geschwindigkeit, wie es namentlich in Folge des Luftwiderstandes der Fall und wobei dann $f(\omega)$ in gleichem Sinne wie ω veränderlich ist, so folgt aus (5) mit dem Näherungswerthe

$$\omega = k\alpha \sin x \text{ nach (3):}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k\alpha \sin x)\, d \sin x - \frac{1}{k}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(k\alpha \sin x)\, d \sin x,$$

also $\omega_1 = 0$, weil $\sin x$ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe durchläuft wie von $x = \pi$ bis $x = \frac{\pi}{2}$. Ist aber $w = f(\pm\varphi)$ eine Function des Absolutwerthes von φ, so folgt aus (5) mit dem Näherungswerthe

$$\varphi = \alpha \cos x \text{ nach (4):}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha \cos x)\, d \sin x - \frac{1}{k}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(-\alpha \cos x)\, d \sin x$$

auch $= 0$, weil $\cos x$ von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe wie $-\cos x$ von $x = \pi$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ durchläuft. Die verhältnissmässige Aenderung der Schwingungsdauer durch die Bewegungswiderstände ist also jedenfalls nur klein von höherer Ordnung.

Der Voraussetzung $w = f(\pm\varphi)$ entspricht das Widerstandsmoment, welches bei einer Unruhe von der durch die Lagerreaction verursachten Axreibung herrührt, sofern die Componenten X, Y dieser Lagerreaction dem Elasticitätsmoment M der Spiralfeder und somit sehr nahe dem Elongationswinkel φ — z. B. gemäss den Gleichungen (6) und (9) in §. 142 — proportional sind. Für diesen Fall lässt sich leicht erkennen, dass der Widerstand die Schwingungsdauer etwas vergrössert. In der That ist nach Gl. (2) mit $w = \pm \varkappa^2 \varphi$ für positive oder negative Werthe von φ:

$$\frac{d\omega}{dt} = (k^2 - \varkappa^2)\varphi \quad \text{bezw.} \quad = (k^2 + \varkappa^2)\varphi$$

und ist daraus auf eine Schwingungsdauer:

$$\tau = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} + \frac{1}{\sqrt{k^2 + \varkappa^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{k}\left\{\begin{array}{l} \quad 1 + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{k^2} + \frac{3}{8}\frac{\varkappa^4}{k^4} + \cdots \\ + 1 - \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{k^2} + \frac{3}{8}\frac{\varkappa^4}{k^4} - \cdots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{k}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\varkappa^4}{k^4} + \cdots\right)$$

zu schliessen, welche um eine kleine Grösse höherer Ordnung $> \frac{\pi}{k}$ ist. —

Auf das Abhängigkeitsgesetz der durch den Bewegungswiderstand verursachten Winkelverzögerung w kann aus dem Gesetze geschlossen werden, nach welchem der Ausschlagwinkel α eines Pendels oder einer Unruhe bei den ohne neuen Antrieb stattfindenden Schwingungen nach und nach abnimmt. Indem nämlich für $t = \frac{\pi}{k}$ die oben mit ω_1 bezeichnete Winkelgeschwindigkeit und ebenso der Unterschied zwischen $\frac{\pi}{k}$ und der Schwingungsdauer τ sehr klein ist, ergiebt sich die Aenderung des Elongationswinkels φ während der Zeit $\tau - \frac{\pi}{k}$ oder $\frac{\pi}{k} - \tau$ als eine sehr kleine Grösse höherer Ordnung, mit deren Vernachlässigung somit $\alpha_1 =$ demjenigen Werthe von $-\varphi$ gesetzt werden kann, welcher der Zeit $t = \frac{\pi}{k}$ entspricht, d. i. nach (4):

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{k}} w \sin(kt)\, dt = \alpha - \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi} w \sin x\, dx \quad \ldots\ldots (6).$$

Ist nun etwa, unter a, b, c, e Constante und unter $(\pm\varphi)$ den Absolutwerth von φ verstanden,

$$w = a + b\omega + c\omega^2 + e(\pm\varphi),$$

so ergiebt sich mit den Näherungswerthen

$$\omega = k\alpha \sin x \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha \cos x,$$

welche den Gleichungen (3) und (4) mit $w = 0$ entsprechen:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{a}{k^2}\int_0^{\pi} \sin x\, dx - \frac{b\alpha}{k}\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx - c\alpha^2 \int_0^{\pi} \sin^3 x\, dx$$

$$\mp \frac{e\alpha}{k^2}\int_0^{\pi} \cos x \sin x\, dx$$

$$= \alpha - 2\frac{a}{k^2} - \frac{\pi}{2}\frac{b\alpha}{k} - \frac{4}{3}c\alpha^2 \pm \frac{e\alpha}{k^2}\int_0^{\pi} \sin x\, d\sin x.$$

Was das letzte Glied dieses Ausdruckes betrifft, so kann mit der hier beabsichtigten Annäherung das obere Vorzeichen von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, das untere von $x = \frac{\pi}{2}$ bis $x = \pi$ genommen und somit gesetzt werden:

$$\mp\int_0^{\pi} \sin x\, d\sin x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, d\sin x - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, d\sin x$$

$$= -\int_0^1 y\, dy - \int_0^1 y\, dy = -1.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2} - \frac{2a}{k^2}\frac{1}{\alpha} - \frac{4}{3}c\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

und ebenso, wenn mit α_2, α_3 ... die Ausschlagwinkel zu Ende der zweiten, dritten ... Schwingung bezeichnet werden,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2} - \frac{2a}{k^2}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{4}{3}c\alpha_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Insbesondere ist für $a = c = 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \ldots = 1 - \frac{\pi b}{2k} - \frac{e}{k^2}$$

= einer Constanten, d. h. der Ausschlagwinkel nimmt nach einer geometrischen Reihe ab, wenn das Widerstandsmoment theils

der Winkelgeschwindigkeit, theils der Winkelentfernung von der Ruhelage proportional ist. Dies ist das Gesetz, welches für schwingende Pendel die Beobachtung thatsächlich ergeben hat, wenigstens für den Fall, dass durch Federaufhängung oder auf sonstige Weise die vorzugsweise der Constanten a entsprechende Reibung eliminirt wurde, widrigenfalls nach (7) eine dem Gesetze:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} > \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \ldots$$

entsprechende Winkelabnahme zu erwarten wäre. Jene Abnahme in geometrischer Reihe lässt aber erkennen, dass der Luftwiderstand des Pendels vorzugsweise in einer Reibung zwischen der Luft und der Linse besteht, welche tangential längs dieser gerichtet und ihrer relativen Geschwindigkeit gegen die Luft proportional ist. Bei einer Unruhe, deren Geschwindigkeit grösser ist, kann auch das Glied mit c von merklicher Grösse und somit nach (7):

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \ldots$$

werden, besonders wenn hervorstehende Theile des Schwungrades (Fig. 152) zu solchen Widerständen Veranlassung geben, welche normal gegen die Oberfläche gerichtet und dem Quadrate der relativen Normalgeschwindigkeit proportional zu setzen sind.

b. Der Motor.

Die bewegende Kraft einer Uhr ist entweder ein Gewicht, welches niedersinkend vermittels einer Schnur, Darmsaite oder Kette, woran es hängt, eine Trommel in Umdrehung setzt, oder die Elasticität einer zusammengewundenen und in der Aufwindung begriffenen Spiralfeder, welche im Gegensatz zur Spiralfeder des Regulators als Triebfeder bezeichnet sei und im Inneren einer Trommel, dem hier sogenannten Federhause, einerseits mit der cylindrischen Trommelwand, andrerseits mit einem Stift, dem Federstift, fest verbunden ist, um welchen als Welle das Federhaus sich drehen kann. In beiden Fällen wird die Drehung der Trommel durch ein damit verbundenes grösseres Zahnrad (Triebrad), welches in ein kleineres von wenig Zähnen eingreift, auf das übrige Uhrwerk übertragen.

Hierbei kommen verschiedene Rücksichten in Betracht, welche entsprechende Anordnungen des Motors bedingen, insbesondere



1. die Forderung möglichst constanter Grösse der Triebkraft während des Ganges einer aufgezogenen Uhr,

2. die Forderung, dass, wenn die Uhr aufgezogen, d. h. die abgelaufene Gewichtschnur auf die Trommel wieder aufgewunden bezw. die aufgedrehte Triebfeder wieder stärker zusammengedreht wird, dadurch weder das übrige Uhrwerk zu einer entgegengesetzten Bewegung oder zum Stillstande veranlasst, noch auch thunlichst eine zeitweilige Unterbrechung oder Störung der Wirksamkeit des Motors herbeigeführt werden soll.

§. 146. Wirksamkeit des Motors während des Ganges einer Uhr.

Indem es praktisch nicht möglich ist, die Schwingungsdauer eines Regulators von der Grösse seines Ausschlagwinkels vollkommen unabhängig zu machen, letzterer aber im periodischen Beharrungszustande dadurch bedingt ist, dass bei jeder Schwingung des Regulators der Arbeitsverlust in Folge seiner Bewegungswiderstände dem Ersatze an Arbeitsvermögen durch den Motor gleich ist, somit jede Aenderung dieses letzteren Arbeitsvermögens entsprechende Aenderungen der Widerstandsarbeit und folglich des Ausschlagwinkels zur Folge hat, so ist es von Wichtigkeit, für möglichste Unveränderlichkeit des dem Regulator periodisch mitgetheilten Arbeitsvermögens Sorge zu tragen. Indem dasselbe durch Vermittlung des Uhrwerkes vom Motor auf den Regulator übertragen wird, kommt es vor Allem darauf an, dass das Kraftmoment möglichst constant sei, mit welchem das Triebrad in Drehung erhalten wird.

Ist die Triebkraft ein niedersinkendes Gewicht, so ist diese Forderung ohne Weiteres und so vollkommen wie möglich erfüllt; eine kleine Unvollkommenheit wird nur durch die Schwere der mit veränderlicher wirksamer Länge das Gewicht tragenden Schnur verursacht, welcher Einfluss sich indessen leicht eliminiren liesse, wenn er überhaupt in Betracht käme. Da der mit der Triebkraft wachsende Ausschlagwinkel besonders bei einem Pendel die Schwingungsdauer beeinflusst, so ist es bei Pendeluhren nicht nur am einfachsten, sondern auch mit Rücksicht auf die Gleichförmigkeit des Ganges am besten, sie durch ein niedersinkendes Gewicht in Gang zu erhalten. Auch geht man von dieser Regel nur ab bei Stutz- und Tafeluhren, bei denen der Raum für ein niedersinkendes Gewicht zu sehr beschränkt ist und die Gleichförmigkeit des Ganges der äusseren Form untergeordnet wird.

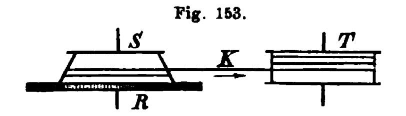


Besteht aber die bewegende Kraft in der Elasticität einer zusammengewundenen Spiralfeder, so ist ihr Moment in Bezug auf die Axe des Federhauses bei Abstraction vom Einflusse des Lagerdruckes nach §. 141, Gl. (2):

$$M = \frac{EJ}{l} \varphi \quad \dots\dots\dots\dots (1),$$

unter E den Elasticitätsmodul des Materials (gehärteter Stahl), J das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Biegungsaxe und unter l die Länge der Feder verstanden. Es ist also M dem Verdrehungswinkel φ proportional und mit diesem beim Ablaufen der Uhr zwischen zwei Grenzwerthen φ_1 und φ_2 abnehmend veränderlich. Dasselbe gilt von der auf den Umfang des Federhauses (Radius $= a$) reducirten Triebkraft $P = \frac{M}{a}$, und um nun trotzdem das Moment $= Pr$, mit welchem diese Kraft auf Umdrehung des Triebrades wirkt, constant zu erhalten, macht man den Hebelarm r zwischen zwei entsprechenden Grenzen r_1 und r_2 so zunehmend veränderlich, dass $\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2$ und überhaupt φr constant ist, indem nämlich (Fig. 153) das Federhaus T vermittels einer Gliederkette K zunächst eine conische Trommel S, die sogenannte Schnecke in Umdrehung setzt, welche ihrerseits mit dem Triebrade R verbunden ist. Beim Ablaufen der Uhr wickelt sich die Kette vom dünneren gegen den dickeren Theil der Schnecke hin von dieser ab und auf das Federhaus auf.

Fig. 153.



Der Einfluss des Ausschlagwinkels, mithin der bewegenden Kraft auf die Schwingungsdauer ist übrigens bei einer Unruhe im Allgemeinen geringer, als bei einem Pendel, wenigstens nicht grösser, als der Einfluss der Temperatur, für welche bei gewöhnlichen Taschenuhren eine Compensation ohnehin nicht vorhanden ist. Man zieht es deshalb heutzutage vor, die Schnecke mit Kette bei den gewöhnlichen Taschenuhren ganz wegzulassen unter Verminderung des betreffenden Fehlers durch möglichst grosse Länge der Triebfeder. Diese gestattet einen grösseren Windungswinkel φ, mithin bei gegebenem Unterschiede der Grenzwerthe φ_1 und φ_2 (etwa $\varphi_1 - \varphi_2 = 4.2\pi$) eine grössere Annäherung des Verhältnisses $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ an 1. Die Taschenuhren haben dadurch eine erhebliche Vereinfachung und Preisermässigung erfahren, und es ist mit der Kette eine Hauptursache von Beschädigungen fortgefallen. Bei Chronometern ist aber die

Schnecke ein wesentlicher Bestandtheil; zur Schonung der Kette wird hier eine besondere Vorrichtung angebracht, welche es verhindert, die Uhr so weit aufzuziehen oder ablaufen zu lassen, dass sich die Kette ganz vom Federhause bezw. von der Schnecke abwickelt.

Für Taschenuhren werden als **Dimensionen der Triebfeder** angegeben (**Rühlmann**, allgem. Maschinenlehre, I, S. 45):

$$\begin{aligned} l &= 400 \text{ bis } 700 \text{ Millimeter Länge,}\\ b &= 2 \quad „ \quad 5 \quad „ \quad \text{Breite,}\\ d &= 0{,}15 \quad „ \quad 0{,}25 \quad „ \quad \text{Dicke.}\end{aligned}$$

Bei 20 Windungen im aufgezogenen Zustande der Uhr, also $\varphi_1 = 40\pi$, ergiebt sich dann mit $E = 20000$ Kgr. pro Quadratmillimeter und mit $J = \frac{bd^3}{12}$ der Anfangswerth des Momentes M:

$$M_1 = 40\pi \frac{EJ}{l}$$

$$= 3{,}5 \text{ Millimeterkgr. für } l = 400,\ b = 2,\ d = 0{,}15$$

$$\text{bezw. } = 23{,}4 \quad „ \quad \text{für } l = 700,\ b = 5,\ d = 0{,}25.$$

Entsprechend 4 Umdrehungen des Federhauses beim Ablaufen der Uhr nimmt dieses Moment bis $M_2 = 0{,}8\, M_1$ ab. Das dabei ausgegebene Arbeitsvermögen ist mit $\varphi_1 = 2\pi n_1$ und $\varphi_2 = 2\pi n_2$:

$$A = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M d\varphi = \frac{EJ}{l} \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{2} = 2\pi^2 (n_1^2 - n_2^2) \frac{EJ}{l} \quad \ldots \quad (2),$$

insbesondere mit $n_1 = 20$ und $n_2 = 16$:

$$A = 80 \text{ Millimeterkgr. für } l = 400,\ b = 2,\ d = 0{,}15$$

$$\text{bezw. } A = 529 \quad „ \quad \text{für } l = 700,\ b = 5,\ d = 0{,}25.$$

Uebrigens ist zu bemerken, dass, wenn auch durch die besprochenen Hülfsmittel vollkommene Unveränderlichkeit der *ganzen* Triebkraft einer Uhr zu erreichen wäre, damit doch wegen unvermeidlicher (z. B. durch Staub und Verdickung des Schmieröls bedingter) Veränderlichkeit der Widerstände des Uhrwerks nicht auch die Gleichförmigkeit der Grösse desjenigen Theils dieser Triebkraft gesichert wäre, welcher nach Abzug des Verlustes durch jene Widerstände zu periodischem Antriebe des Regulators übrig bleibt und worauf es eigentlich allein ankommt. Letzterer Zweck ist am vollkommensten dadurch zu erreichen, dass der Regulator mit einem besonderen schwächeren Hülfsmotor (Gewicht oder Feder) verbunden und dieser periodisch vom Hauptmotor durch Vermittlung des Uhrwerks stets in genau gleichem Maasse aufgezogen (das Hülfsgewicht immer gleich hoch gehoben, bezw. die Hülfsfeder immer gleich stark

gespannt) wird, um so ganz unabhängig von den Aenderungen der Hauptbetriebskraft und der Widerstände des Uhrwerks periodisch immer dasselbe Arbeitsvermögen zum Antriebe des Regulators verfügbar zu machen. Indem aber solche Einrichtungen sich auf die Art der Verbindung des Motors mit dem Regulator beziehen, gehören sie ihrer Wirksamkeit nach zu den Hemmungen, bei deren Besprechung darauf als auf sogenannte „Hemmungen mit constanter Kraft" zurückgekommen werden wird.

§. 147. Wirksamkeit des Motors beim Aufziehen der Uhr.

Das Aufziehen einer Uhr wird im Allgemeinen dadurch ermöglicht, dass das Triebrad mit dem Motor durch ein Gesperre verbunden ist, wodurch beim Aufziehen eine relative Bewegung beider Theile in entsprechendem Sinne möglich wird, während beim Ablaufen der aufgezogenen Uhr die dabei angestrebte entgegengesetzte relative Bewegung unmöglich ist.

Bei der durch ein Gewicht getriebenen Uhr ist die auf ihrer Welle festsitzende Trommel mit dem Klinkrade des Gesperres fest verbunden, während das Triebrad lose auf der Trommelwelle sitzt. Die Klinke ist um einen am Triebrade seitlich befestigten Zapfen drehbar und wird durch eine gleichfalls an diesem Rade befestigte Feder gegen die Verzahnung des Klinkrades angedrückt; auch kann sie selbst zugleich als Feder wirken. Während des Ablaufens der Uhr zieht oder schiebt also das Klinkrad vermittels der Klinke das Triebrad so fort, als ob beide zusammen ein Ganzes ausmachten; beim Aufziehen der Uhr aber, d. h. bei der durch eine äussere Kraft bewirkten entgegengesetzten Drehung der Trommel sammt ihrer Welle und dem Klinkrade bewegen sich die Zähne des letzteren gleitend an der der Reihe nach in die Zahnlücken einfallenden Klinke vorbei.

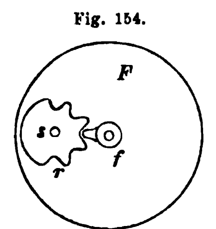
Bei der durch eine Feder getriebenen Uhr mit Schnecke und Kette (Fig. 153) ist das lose auf der Schneckenwelle sitzende Triebrad R ebenso mit der Schnecke S durch ein Gesperre verbunden wie bei der Gewichtuhr mit der Schnurtrommel. Das Aufziehen geschieht durch Umdrehung der Schneckenwelle in solchem Sinne, dass die einerseits am Federhause T, andrerseits am dickeren Theile der Schnecke befestigte Kette K sich auf letztere gegen den dünneren Theil hin aufwickelt und dadurch das Federhaus entgegen seinem Drehungssinne beim Ablaufen der Uhr so dreht, dass die mit ihrem inneren Ende am unbe-

weglichen Federstift befestigte Triebfeder wieder stärker zusammengewunden wird.

Wenn aber bei der durch eine Feder getriebenen Uhr Schnecke und Kette fehlen, wie es bei den heutigen Taschenuhren der Fall zu sein pflegt, so ist das Triebrad mit dem Federhause fest verbunden, kann sich also dieses auch nicht beim Aufziehen in entgegengesetztem Sinne drehen, vielmehr wird das Aufziehen hier durch Drehung des Federstiftes bewerkstelligt. Damit er dann aber beim Ablaufen der Uhr wieder feststehe, trägt er ein nur jene Drehung beim Aufziehen gestattendes Klinkrad, dessen zugehörige Klinke am Ende einer Feder sich befindet, die an der das betreffende Lager des Federstiftes enthaltenden Uhrplatte festgeschraubt ist. Diese Anordnung einer festen Verbindung des Federhauses mit dem Triebrade heisst das Federhaus mit Zähnen oder das verzahnte Federhaus.

Zur Einschliessung des Windungswinkels φ der Triebfeder zwischen gewissen Grenzen φ_1 und φ_2 dient bei dem verzahnten Federhause die sogenannte Stellung. Der dem Triebrade gegenüberliegende Boden des Federhauses F, Fig. 154, trägt nämlich einen Stift s, um welchen mit einiger Reibung, die eine willkührliche Drehung verhindert, ein kleines nur an einem Theile des Umfanges verzahntes Rädchen r drehbar ist. An entsprechender Stelle trägt der Federstift f eine kleine Scheibe, von deren Umfange ein einzelner Zahn, in jene Verzahnung zeitweilig eingreifend, hervorragt. Die beim Ablaufen und beim Aufziehen der Uhr entgegengesetzten relativen Drehungen des Federstiftes und Federhauses gegen einander sind in Folge dessen nur so lange möglich, bis der einzelne Zahn gegen den unverzahnten Theil des Rädchens r auf der einen oder anderen Seite anstösst; die Zahl der möglichen ganzen relativen Umdrehungen ist gleich der Anzahl von Zähnen des Rädchens r. Bei der Uhr mit Schnecke und Kette wird zwar schon durch die begrenzte Länge der letzteren auch die Aenderung des Windungswinkels der Triebfeder begrenzt; weil dann aber durch unvorsichtiges Aufziehen leicht das Reissen der Kette bewirkt wird, kann besser auch in diesem Falle durch eine jener Stellung, Fig. 154, ähnliche Vorrichtung der Zweck ohne Beihülfe der Kette erreicht werden.

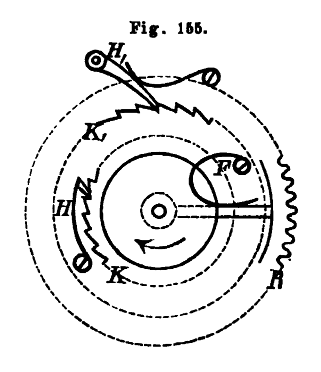
Fig. 154.



Der Forderung, dass die Wirksamkeit der Triebkraft durch das Aufziehen der Uhr nicht unterbrochen werden soll, wird bei dem vorbesprochenen verzahnten Federhause ohne weitere Hülfsvor-

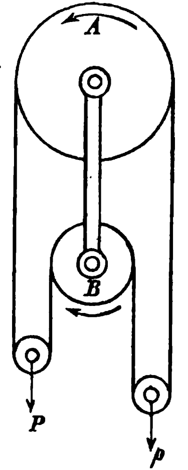
richtung von selbst entsprochen, und es liegt auch hierin ein Vortheil dieses Systems. In den übrigen Fällen ist aber eine weitere Complication nöthig, um jene Bedingung zu erfüllen, und zwar dient dazu im Allgemeinen Harrison's Gegengesperre. Es ist nämlich der federnde Sperrhaken H, welcher in das an der Schnurtrommel einer Gewichtuhr oder an der Schnecke einer Triebfederuhr festsitzende Klinkrad eingreift, nicht unmittelbar am Triebrade, sondern an einem zwischen diesem und jenem Klinkrade K eingeschalteten zweiten Klinkrade K_1 befestigt, dessen Zähne denen von K entgegengerichtet sind und welches ebenso wie das Triebrad R lose auf der Trommelwelle bezw. Schneckenwelle drehbar ist (Fig. 155, woselbst die Verzahnungen der verschiedenen Räder nur theilweise angedeutet sind). Die Axe der in die Verzahnung von K_1 eingreifenden Klinke H_1 ist am Uhrgestelle fest, und endlich ist K_1 mit dem Triebrade durch eine Hülfsfeder F oder durch mehrere solche symmetrisch vertheilte Federn verbunden, welche einerseits an K_1 befestigt sind und andererseits gegen Arme oder Vorsprünge des Triebrades sich stützen.

Fig. 155.



Bei dem Ablaufen der Uhr wirkt nun K, im Sinne des Pfeils rotirend, durch H treibend auf K_1, weiter K_1 durch F treibend auf R, während H_1 auf den Zähnen von K_1 relativ gleitet. Beim Aufziehen der Uhr, also bei umgekehrtem Drehungssinne von K gleitet umgekehrt H auf den Zähnen von K und wird K_1 durch H_1 festgehalten, während die Spannung der Hülfsfeder F unterdessen treibend wirkt mit genügend constanter Kraft, sofern eine nur kurze Zeit zum Aufziehen gebraucht wird.

Fig. 108.



Bei Gewichtuhren kann zu demselben Zwecke auch die von Huyghens angegebene Vorrichtung benutzt werden, welche in §. 102 als Beispiel eines Gewichtsaccumulators erwähnt und durch Fig. 108 im Princip dargestellt wurde. In dieser bedeutet A die mit dem Triebrade fest verbundene, beständig im Sinne des beigesetzten Pfeiles rotirende Schnurtrommel, B eine Leitrolle, welche im Sinne des Pfeils nur beim Aufziehen gedreht wird, indem sie an entgegengesetzter Drehung durch ein Gesperre gehindert ist; beim Aufziehen wie beim Ablaufen der Uhr wirkt

die Triebkraft mit unveränderter Intensität $=\frac{1}{2}(P-p)$ am Umfange der Trommel. Letztere pflegt ebenso wie B als Schnurrolle gebildet zu werden mit zahnartig gekerbter Rinne, in welcher ein Rutschen der endlosen Schnur trotz nur halber Windung nicht zu befürchten ist, während sie anderen Falles bei mehrfacher Umschlingung einer glatten Trommel sich allmählig axial längs derselben bewegen und zeitweilig zurückrutschen würde. Freilich ist damit der Uebelstand verbunden, dass die Schnur bezw. Darmsaite allmählig aufgerauht wird, weshalb diese Einrichtung z. Z. nur noch weniger in Gebrauch ist.

c. Die Hemmung.

§. 148. Einrichtung und Wirkungsweise im Allgemeinen.

Einleitungsweise sei hier zunächst kurz der Uhren mit conischem Pendel gedacht, bei welchen der als Hemmung bezeichnete Mechanismus fehlt, der im Falle einer Uhr mit hin- und herschwingendem Regulator dazu dient, theils durch Vermittlung des letzteren die Bewegung des übrigen Uhrwerkes periodisch zu unterbrechen, theils nach Wiederbeginn dieser Bewegung die antreibende Wirkung des Motors auf den Regulator zur Erhaltung seines periodischen Bewegungszustandes in geeigneter Weise zu vermitteln. Bei einer Uhr mit conischem Pendel wird dieses einfach dadurch angetrieben, dass der Motor vermittels des Räderwerkes eine verticale Spindel in Rotation erhält, welche durch einen geschlitzten horizontalen Arm die Spitze der Pendelstange (ihre Fortsetzung unterhalb der Kugel) continuirlich schiebt. Ist dabei für eine Umdrehung die auf das Pendel übertragene Arbeit $=A$, der Arbeitsverlust des letzteren durch Bewegungswiderstände $=B$, wachsend mit seinem Elongationswinkel α, so ist der Beharrungszustand charakterisirt durch die Gleichung $A=B$; nimmt A zu oder ab, so wird der Beharrungszustand gestört bis er aufs Neue bei einem grösseren bezw. kleineren Werthe von α eintritt. Der Widerstand des Pendels besteht vorzugsweise, besonders im Falle der durch Fig. 147 (§. 140) dargestellten Federaufhängung, im Luftwiderstande der Kugel, wächst also mit ihrer Grösse und mit der Geschwindigkeit v ihres Mittelpunktes. Letztere ist, wenn

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \text{ nach §. 140, Gl. (6)}$$

die Umdrehungszeit und b die Entfernung des Kugelmittelpunktes vom Aufhängungspunkte bedeutet,

$$v = \frac{2\pi b \sin\alpha}{\tau} = b \sin\alpha \sqrt{\frac{g}{l \cos\alpha}} \text{ nahe proportional } \alpha \sqrt{b},$$

so dass, wenn der Luftwiderstand W der Kugel (Radius $= r$) proportional $r^2 v^m$ gesetzt wird (m nahe $= 2$), auch W proportional $r^2 b^{\frac{m}{2}} \alpha^m$ und die Arbeit dieses Widerstandes für eine Umdrehung:

$$B = W \cdot 2\pi b \sin\alpha \text{ nahe proportional } r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^{m+1}$$

ist. Somit kann, unter C eine Constante verstanden, der Beharrungszustand durch die Gleichung:

$$A = B = C r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^{m+1}$$

charakterisirt werden, aus welcher folgt:

$$\frac{dA}{d\alpha} = (m+1)\, C r^2 b^{\frac{m}{2}+1} \alpha^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dieses Verhältniss ist um so grösser, also die Aenderung von α, welche einer gewissen Aenderung von A entspricht, um so kleiner, je länger das Pendel und je grösser die Kugel ist; durch Vergrösserung von α darf die Vergrösserung von $\frac{dA}{d\alpha}$ natürlich nicht erstrebt werden, weil damit nach §. 140 auch der Absolutwerth von $\frac{d\tau}{d\alpha}$ wachsen würde. Der Luftwiderstand der Kugel bietet hier einen gewissen Ersatz für den fehlenden günstigen Einfluss einer Hemmung. —

In dem gewöhnlichen Falle einer Uhr mit ebenem Pendel oder mit Unruhe als Regulator sind im Allgemeinen drei Theile τ_1, τ_2, τ_3 der Schwingungsdauer τ desselben zu unterscheiden. Während der Zeit τ_1 ist die Wirkung des Motors gehemmt, das Uhrwerk in Ruhe, wobei es von der Art der Hemmung abhängt, ob sie während eines grösseren oder kleineren Theiles von τ_1 mit dem seine Schwingung fortsetzenden Regulator in Berührung ist; jedenfalls fällt τ_1 zum Theil auf den Anfang, zum Theil auf das Ende der Schwingung. Während der Zeit τ_2 wirkt der Motor treibend auf das Uhrwerk und durch Vermittlung der Hemmung zugleich auf den damit in Berührung befindlichen Regulator. Während der Zeit τ_3 endlich, welche unmittelbar auf τ_2 folgt, wird nur das Uhrwerk vom Motor angetrieben, indem der Regulator unterdessen

unabhängig davon, nämlich ausser Berührung mit der Hemmung seine Schwingung fortsetzt. Im Allgemeinen ist $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, letztere Zeit τ_3 oft verschwindend klein.

Ist jetzt A der Ueberschuss der Arbeit des Motors über die Arbeit der Widerstände des Uhrwerkes während der Zeit τ_2, B dagegen die Widerstandsarbeit des Regulators für dessen ganze Schwingungsdauer τ, so wird nicht das ganze A als Ersatz für B verwendet, sondern, da zu Anfang der Zeit τ_2 das Uhrwerk in Ruhe war, nur der Theil $A - \frac{1}{2} M v_2^2$, unter M die auf den Angriffspunkt P der Hemmung am Regulator reducirte Masse des Uhrwerkes und unter v_2 die Geschwindigkeit jenes Punktes der Hemmung zu Ende der Zeit τ_2 verstanden. Indem ferner B aus zwei Theilen besteht, nämlich aus der Arbeit $= W$ des Widerstandes, insbesondere Luftwiderstandes, welcher dem Regulator unabhängig von seiner zeitweiligen Berührung mit der Hemmung eigenthümlich ist, und aus der Reibungsarbeit $= R$, welche während der Zeit τ_2 und event. eines Theiles von τ_1 durch die relativ gleitende Bewegung des Regulators längs der ihn berührenden Hemmung veranlasst wird, so gilt die Gleichung:

$$A = \frac{1}{2} M v_2^2 + R + W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Bezeichnet w_2 die der Geschwindigkeit v_2 des Punktes P der Hemmung entsprechende Geschwindigkeit des damit zusammenfallenden Regulatorpunktes, w' das Maximum der Geschwindigkeit w dieses letzteren Punktes, also die Geschwindigkeit desselben im Mittelpunkte seines Schwingungsbogens, so kann mit Rücksicht auf die fast vollständige Unveränderlichkeit des Aenderungsgesetzes von w sowie der Schwingungsdauer τ, selbst bei erheblicher Aenderung des Ausschlagwinkels α, die Geschwindigkeit w' proportional α gesetzt werden, etwa $w' = n\alpha$, somit

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{v_2}{w_2} \frac{w_2}{w'} n\right)^2 \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

unter n eine Constante verstanden. Die Reibungsarbeit R kann, insoweit sie sich auf den Antrieb des Regulators in der Zeit τ_2 bezieht, als unabhängig von α betrachtet werden; insoweit sie aber von relativ gleitender Bewegung des Regulators längs der ihn berührenden Hemmung während der Zeit τ_1 herrührt, ist sie dem betreffenden Wege und somit nahezu dem Winkel α proportional. Im Allgemeinen sei, unter a und b Constante verstanden,

$$R = a + b\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Was endlich die Widerstandsarbeit W betrifft, so kann der sie vorzugsweise bedingende Luftwiderstand bezw. sein Moment für die Schwingungsaxe des Regulators proportional w^m gesetzt werden, etwa

$$= C w^m = C \left(\frac{w}{w'}\right)^m (n\alpha)^m$$

$$\text{und somit } W = 2\int_0^\alpha C w^m \, d\varphi = 2\, C (n\alpha)^m \int_0^\alpha \left(\frac{w}{w'}\right)^m d\varphi .$$

Das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral ist = dem Product aus α und einem durch das Schwingungsgesetz bestimmten Mittelwerthe von $\left(\frac{w}{w'}\right)^m$, so dass, wenn dieser und ebenso $2n^m$ als Factoren in die neue Constante c eingeschlossen werden, damit

$$W = c\alpha^{m+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wird, unter m eine Zahl verstanden, die zwischen 1 und 2 liegt und zwar um so näher bei 1, je mehr der Luftwiderstand vorzugsweise als Reibung zwischen dem schwingenden Regulator und der Luft sich geltend macht.

Die Einsetzung der Ausdrücke (3)—(5) in Gl. (2) giebt:

$$A = \frac{1}{2} M \left(\frac{v_2}{w_2}\frac{w_2}{w'} n\right)^2 \alpha^2 + a + b\alpha + c\alpha^{m+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und folgt daraus:

$$\frac{dA}{d\alpha} = M \left(\frac{v_2}{w_2}\frac{w_2}{w'} n\right)^2 \alpha + b + (m+1)\, c\alpha^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Um die Aenderungen von α möglichst klein zu erhalten, sind die Ursachen der Aenderung von A thunlichst fern zu halten und ausserdem die Verhältnisse so zu wählen, dass $\frac{dA}{d\alpha}$ möglichst gross wird ohne diesen Vortheil durch ebenso grosse anderweitige Nachtheile zu erkaufen. In dem Ausdrucke (7) sind aber m, n, c als durch die Umstände gegebene Grössen zu betrachten, so dass die Vergrösserung von $\frac{dA}{d\alpha}$ durch eine solche von $b, M, \alpha, \frac{v_2}{w_2}$ und $\frac{w_2}{w'}$ herbeigeführt werden könnte. Indessen würde die Vergrösserung von b eine Vermehrung der bei ruhendem Uhrwerke (in der Zeit τ_1) zwischen dem Regulator und der Hemmung stattfindenden Reibung bedeuten, die wie jede Reibung hier möglichst vermieden werden muss theils wegen der damit wachsenden Grösse der

nöthigen Betriebskraft und der Abnutzung an den betreffenden Reibungsflächen, theils wegen schwankender Grösse dieser Reibung und dadurch bedingter Veränderlichkeit von A. Aehnliche Gründe sprechen gegen Vergrösserung der Masse des Uhrwerkes, also von M, weil damit gleichfalls die Reibung und der Bedarf an Betriebskraft zunehmen. Indem auch der Ausschlagwinkel α durch anderweitige Rücksichten auf die Eigenschaften des Regulators dem Früheren zufolge bedingt ist, bleibt in der Hauptsache nur übrig, die Verhältnisse $\frac{v_2}{w_2}$ und $\frac{w_2}{w}$ möglichst gross zu machen. Das erstere derselben ist von den Eigenthümlichkeiten der einzelnen Hemmungsarten abhängig und bei diesen zu besprechen; das Verhältniss $\frac{w_2}{w}$ aber kann allgemein durch eine derartige Anordnung möglichst gross, nämlich möglichst $= 1$ gemacht werden, bei welcher der Regulator stets während einer solchen (im Verhältnisse zur Schwingungsdauer τ meistens kleinen) Zeit τ_2 angetrieben wird, dass er zu Ende derselben mit seiner Maximalgeschwindigkeit die Ruhelage passirt. Die unterschiedenen Bestandtheile der Schwingungsdauer folgen sich dann nahezu in der Ordnung:

$$\tau = \frac{1}{2}\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \frac{1}{2}\tau_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Der Haupttheil der Hemmung ist ein je nach den Umständen mit sehr verschiedenartig gestalteten Zähnen versehenes Rad, das Hemmungsrad oder Steigrad, welches durch die bewegende Kraft der Uhr eine beständige Tendenz zur Drehung in gewissem Sinne besitzt, derselben aber nur während der kleinen Zeit τ_3 bei jedem Schwunge des Regulators ungehindert durch letzteren folgen kann, wogegen es während τ_1 vermittels seiner Zähne gehemmt wird, während τ_2 aber durch diese Zähne treibend auf den schwingenden Regulator wirkt. Es befindet sich dabei während τ_1 und τ_2 entweder in unmittelbarer Berührung mit dem Regulator oder mittelbar vermittels eines zwischen beide Theile eingeschalteten Hülfsmechanismus, wonach man unmittelbar oder direct wirkende und mittelbar oder indirect wirkende Hemmungen unterscheiden kann. Letztere Anordnung ist die vollkommenere und hat den Zweck, den Regulator während des grösseren Theiles der Hemmungsdauer τ_1 ganz frei, d. h. unabhängig von der Hemmung schwingen zu lassen, mithin die Reibungsarbeit R des an der Hemmung entlang gleitenden Regulators möglichst zu verkleinern.

1. Direct wirkende Hemmungen.

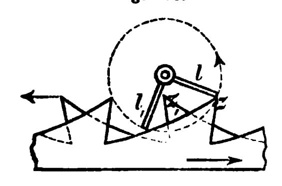
Dieselben werden als zurückspringende und ruhende Hemmungen unterschieden, jenachdem das Hemmungsrad während der Zeiten τ_1 kleinen rückläufigen Bewegungen unterworfen ist oder vollkommen ruht und niemals eine rückläufige Bewegung erhält.

§. 149. Zurückspringende Hemmungen.

Hierzu gehören: die Spindelhemmung oder der sogenannte Spindelgang für Taschenuhren und die zurückspringende Ankerhemmung oder Hakenhemmung für Pendeluhren.

Der Spindelgang ist in seiner ursprünglichen Form, nämlich in Verbindung mit einer Unruhe, die lediglich in einem oscillirenden Schwungrädchen ohne regulirende Spiralfeder bestand, die älteste aller Hemmungen; auch in Verbindung mit der Spiralfederunruhe ist er lange Zeit die gewöhnlichste Hemmung für Taschenuhren geblieben, bis er durch die Cylinderhemmung und später durch indirect wirkende Hemmungen mehr und mehr verdrängt wurde. Seine Einrichtung und Wirkungsweise sind in der Hauptsache folgende. Das Hemmungsrad oder sogenannte Steigrad ist nach Art eines Kronrades mit seitwärts vorstehenden, sägenförmig gestalteten Zähnen versehen und erhält durch den Motor eine Drehung in solchem Sinne, dass die Zahnspitzen vorausgehen. Die Spindel der Unruhe, deren Axe diejenige des Steigrades rechtwinklig schneidet, ist mit zwei radial gerichteten, nahe unter rechtem Winkel gegen einander geneigten Lappen l, l_1 verbunden in einer Entfernung = dem Durchmesser des Steigrades; dieselben treffen an diametral gegenüberliegenden Stellen des Steigrades mit dessen Zähnen abwechselungsweise zusammen, indem sie in die Zahnlücken hineinreichen: siehe Figur 156, in welcher bei verticaler Lage der Steigradaxe, also horizontaler Lage der Spindel der Lappen l und der Zahn z vorn, l_1 und z_1 hinten liegend zu denken sind. Stösst bei den Schwingungen der Unruhe ein Lappen l ihrer Spindel gegen eine Zahnspitze z, so springt das Steigrad zunächst etwas zurück, bis die lebendige Kraft des Schwungrades vernichtet ist; dann erfolgt die umgekehrte Bewegung, wobei der Regulator durch den Motor getrieben wird, während z an l abgleitet. In dem (durch Fig. 156 dar-

Fig. 156.



gestellten) Augenblicke aber, in welchem s und l ausser Berührung kommen, stehen sich s_1 und l_1 schon nahe gegenüber, so dass nach der kleinen Zeit τ_3 ihr Zusammentreffen erfolgt und dann der beschriebene Vorgang in Beziehung auf eine zweite Schwingung der Unruhe sich wiederholt. Das Steigrad hat eine ungerade Anzahl Zähne, damit sich Zähne und Zahnlücken diametral gegenüberliegend entsprechen; nach jeder Doppelschwingung der Unruhe rückt es um eine Zahntheilung bleibend vor.

Es unterscheidet sich diese Hemmung von anderen besonders dadurch, dass der Regulator während des grössten Theiles seiner Bewegung vom Motor getrieben wird und dadurch einen viel grösseren Ersatz an Arbeitsvermögen erhält, als der ihm eigenthümlichen Widerstände wegen nöthig wäre. Die ihm bei jeder Schwingung überschüssig mitgetheilte Arbeit bewirkt das Zurückspringen des Steigrades. Die Zeit τ_1 der Hemmung ist auf die kleine Dauer dieser rückgängigen Bewegung und der darauf folgenden gleich grossen rechtläufigen Bewegung des Steigrades, wodurch jene rückgängige wieder ausgeglichen wird, beschränkt. Die durch die Stösse verursachten Erschütterungen und Arbeitsverluste machen übrigens diesen Spindelgang zu einem wenig vollkommenen Mechanismus. —

Die Hakenhemmung oder zurückspringende Ankerhemmung für Pendeluhren, um das Jahr 1680 von dem Londoner Uhrmacher Clement erfunden, geht durch eine so einfache Modification in die vollkommnere ruhende Ankerhemmung über, dass es genügt, bei Besprechung der letzteren auf den Unterschied beider aufmerksam zu machen.

§. 150. Ruhende Ankerhemmung für Pendeluhren.

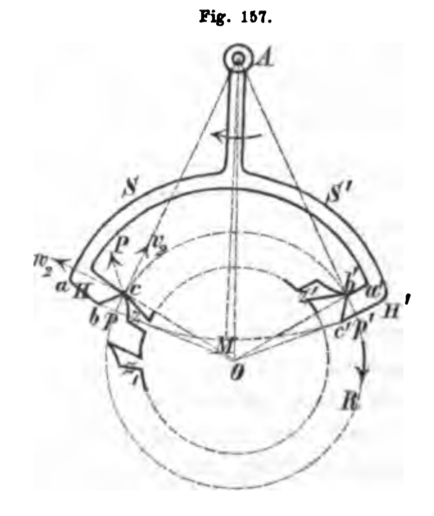
Das Hemmungsrad dieser von Graham 1715 erfundenen Hemmung ist mit etwas schräg stehenden Zähnen versehen, welche in der Radebene hervorragen; der Motor strebt es mit voraus gerichteten Zahnspitzen zu drehen. Der sogenannte Anker ist ein um eine horizontale Axe A, Fig. 157, parallel der Axe O des Hemmungsrades R, drehbarer Körper, dessen zwei Schenkel S, S' an den Enden zu Haken H, H' umgebogen sind. Die Ankerwelle ist durch einen Mitnehmer mit der Pendelstange verbunden, d. h. durch einen abwärts reichenden Arm, welcher unten vermittels einer sogenannten Gabel mit kleinem Spielraume die Pendelstange umfasst; damit hier keine relativ gleitende Bewegung stattfinde, muss die Schwingungsaxe des Ankers mit der Aufhängungsaxe des Pen-



dels zusammenfallen, in welchem Falle die Schwingungswinkel von Anker und Pendel gleich gross sind. Die Wirkung ist dann abgesehen von dem kleinen Spielraume der Pendelstange in der Gabel dieselbe, als ob erstere mit der Ankerwelle fest verbunden wäre, nur mit dem Unterschiede, dass bei der mittelbaren Verbindung durch den Mitnehmer eine möglichst reibungslose Aufhängung des Pendels, insbesondere vermittels einer dünnen und flachen Stahlfeder (Fig. 142) möglich wird. Bei den sonach gemeinschaftlichen Schwingungen des Pendels und des Ankers greifen die Haken H, H' wechselsweise in die Zahnlücken des Hemmungsrades ein und lassen dasselbe bei jeder Doppelschwingung um eine Zahntheilung sich drehen.

Was diese Hemmung zu einer (während der Zeiten τ_1, §. 148) ruhenden macht, ist der Umstand, dass die Haken H, H' durch Cylinderflächen begrenzt sind, deren gemeinsame Axe die Schwingungsaxe A des Ankers ist, und dass die Vorderflächen der Hemmungszähne so gegen die betreffenden Radien des Hemmungsrades geneigt sind, dass sie die äussere Cylinderfläche ab des einen Hakens H und die innere $a'b'$ des andern H' stets nur mit ihren äussersten Kanten berühren. Dadurch, dass diese Bedingungen nicht erfüllt sind, unterscheidet sich die zurückspringende Ankerhemmung, §. 149, von dieser ruhenden. Der Antrieb des Ankers und somit des Pendels während der Zeiten τ_2 wird durch ebene Angriffsflächen bc und $b'c'$ an den Enden der Haken H, H' vermittelt. Sind p und p' die Punkte, in welchen die Peripherie des Hemmungsrades von der äusseren Kreislinie der Ankerhaken geschnitten wird, so ergiebt sich bei entsprechender Construction das folgende Spiel der Hemmung, gerechnet von einem Augenblicke, in welchem das Pendel seinen äussersten Ausschlag rechts hat und das Rad R durch Stützung eines Zahnes z gegen die Fläche ab des Hakens H gehemmt ist. Während der Zeit $\frac{1}{2}\tau_1$ gleitet ab an der Spitze dieses Zahnes entlang bis zu ihrer Berührung mit der Kante b, worauf während der Zeit τ_2 diese Zahnspitze, längs der Angriffsfläche bc gleitend, das Pendel antreibt, indem sich dasselbe mit dem Anker

Fig. 157.



um den kleinen Winkel bAp, Fig. 157, das Hemmungsrad um den Winkel pOc dreht. In dem durch die Figur dargestellten Augenblicke, in welchem die Spitze des Zahnes s die Angriffsfläche bc bei c verlässt, ist die Kante b' des anderen Hakens H' gerade in die Peripherie von R gelangt und befindet sich die Spitze eines Zahnes s' dieser Kante dicht gegenüber, so dass es nur einer sehr kleinen Zeit τ_3 bedarf, um s' durch die Fläche $b'a'$ des Hakens H' aufzufangen und dann während der Zeit $\frac{1}{2}\tau_1$ das Rad R wieder zu hemmen, indem dabei $b'a'$ längs s' gleitet bis das Pendel seinen grössten Ausschlag links erreicht hat. Bei der folgenden Schwingung gleitet zuerst der Haken H' längs dem durch ihn gestützten Zahn s' zurück bis gleichzeitig die Kanten b' und c durch die Peripherie des Hemmungsrades R hindurch gehen; dann gleitet die Spitze von s' längs $b'c'$, um dem Pendel einen neuen Impuls zu geben, während sich R um den Winkel $b'Op' = pOc$ dreht. Indem dann in demselben Augenblicke, in welchem c' durch den Punkt p' hindurch geht, auch b den Punkt p erreicht haben soll, damit der Haken H mit seiner Fläche ab den dem Zahne s folgenden Zahn s_1 von R dicht bei der Kante b auffange, muss $bp = c'p'$, müssen also auch die Drehungswinkel bAp und $c'Ap'$ des Ankers während des Antriebes im einen und im anderen Sinne gleich gross sein. Schliesslich gleitet s_1 längs ba bis zur Grenzlage des Pendels u. s. f.

Aus den Gleichungen $pc = p'b'$ und $pb = p'c'$ folgt die Congruenz der als geradlinig zu betrachtenden kleinen Dreiecke cpb und $b'p'c'$, wenn ausserdem die Winkel cpb und $b'p'c'$, die sich im Allgemeinen zu 180^0 ergänzen, $= 90^0$ sind, wenn also die Peripherie des Hemmungsrades die kreisförmig gekrümmten Ankerhaken rechtwinklig schneidet. Die Erfüllung dieser Bedingung ist zu dem Ende zweckmässig, damit die Richtungslinien der Stösse, mit welchen die Zahnspitzen zu Ende der kleinen Zeiten τ_3 gegen die Hakenflächen ab und $a'b'$ treffen und welche in p normal zu Op, in b' normal zu Ob' sind, möglichst genau durch die Axe A des Ankers gehen, um die Schwingungen des Pendels nicht zu stören. Zwar können die Winkel OpA und $Ob'A$ nicht gleichzeitig genau $= 90^0$ sein, wenn p und b' verschiedenen Kreisen um A als Mittelpunkt angehören, doch fällt die Abweichung möglichst klein aus, wenn die Hemmung so angeordnet wird, dass, unter m und m' die Mittelpunkte der kleinen Bögen pc und $p'b'$ verstanden, die gleichen Winkel OmA und $Om'A = 90^0$ sind. Diese Anordnung vorausgesetzt, können die Punkte A, c, p und ebenso die Punkte A, b', p'



als in gerader Linie liegend betrachtet werden, so dass mit den Bezeichnungen:

$$Ab = Ac' = l,\quad \text{Winkel } bAc = c'Ab' = \lambda$$
$$pc = p'b' = e,\quad \text{Winkel } pcb = p'b'c' = \varepsilon$$

zwischen diesen Grössen die Beziehung stattfindet:

$$l\lambda = e\, tg\, \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nach den allgemeinen Erörterungen im §. 148 soll ferner die Anordnung möglichst so getroffen werden, dass das Pendel zu Ende der Antriebszeit τ_2 seine Ruhelage passirt, und dass in diesen Augenblicken das Verhältniss $\frac{v_2}{w_2}$ der Geschwindigkeit v_2 der treibenden Zahnspitze und der Geschwindigkeit w_2 des von ihr berührten Ankerpunktes möglichst gross ist. Erstere Forderung kann zwar nicht für die Schwingungen im einen und anderen Sinne zugleich vollkommen erfüllt werden, weil die Punkte c und c' (Fig. 157) des Ankers bei verschiedenen Lagen desselben durch die Peripherie des Hemmungsrades hindurchgehen; doch wird ihr mit möglichster Annäherung durch eine solche Disposition entsprochen, welche zur Folge hat, dass die Mittelpunkte n und n' der Angriffslinien bc und $b'c'$ des Ankers bei dessen mittlerer Lage (der Gleichgewichtslage des Pendels entsprechend) mit den Punkten m und m' jener Peripherie zusammenfallen, wie es z. B. dann der Fall ist, wenn die Axe A vertical über der Axe O liegt und die Mittellinie AM des Mitnehmers den Winkel nAn' halbirt.

Was aber die andere Forderung eines möglichst grossen Verhältnisses $\frac{v_2}{w_2}$ betrifft, so ist z. B. mit Rücksicht auf den Zahn s, welcher in Fig. 157 eben im Begriff ist, die Angriffslinie bc bei c zu verlassen, v_2 normal zu Ac oder näherungsweise (wegen Kleinheit des Winkels pOc) normal zu Ob, d. i. längs cA, dagegen w_2 normal zu cA gerichtet, und da diese zwei Geschwindigkeiten, wenn sie in Componenten längs bc und normal zu bc zerlegt werden, nach letzterer Richtung gleiche Componenten ergeben müssen, so folgt:

$$w_2 \cos\varepsilon = v_2 \sin\varepsilon \text{ und somit } \frac{v_2}{w_2} = cotg\,\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

um so grösser, je kleiner ε. Indessen wird die zulässige Verkleinerung dieses Winkels ε begrenzt theils durch die Rücksicht auf die zu erfüllende Gleichung (1), worin $\lambda = 0{,}04$ bis $0{,}05$ gemacht zu werden pflegt, theils durch die Berücksichtigung der Reibung. Die Arbeit der letzteren $= R$

für eine ganze Schwingung besteht aus den Theilen R_1 und R_2, welche den Zeiten τ_1 und τ_2, also den relativen Bewegungen der Hemmungszähne bezw. längs den cylindrischen Hemmungsflächen und längs den ebenen Antriebsflächen des Ankers entsprechen. Während erstere Reibung nach §. 148 wenigstens den Nutzen hat, dass sie in Gl. (7) daselbst den Summand b vergrössert und somit die einer gewissen Aenderung der disponiblen Arbeit A entsprechende Aenderung des Ausschlagwinkels α verkleinert, ist die letztere Reibung unbedingt schädlich. Die Arbeit derselben während des Antriebes ist, wenn dabei der Zahn z den mittleren Normaldruck P auf die Angriffsfläche bc, Fig. 157, ausübt und wenn μ den betreffenden Reibungscoefficienten bedeutet,

$$R_2 = \mu P \cdot \overline{bc} = \mu P \frac{e}{\cos \varepsilon}$$

und da die gleichzeitig auf den Anker übertragene Arbeit des Normaldruckes P:

$$A_2 = P e \sin \varepsilon$$

ist = dem Product aus P und dem Wege des Angriffspunktes im Sinne von P, ergiebt sich der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch diese Reibung:

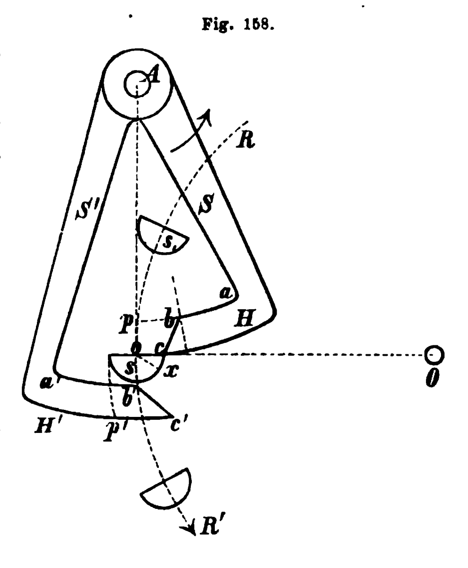
$$\frac{R_2}{A_2} = \frac{\mu}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} = \frac{2\mu}{\sin 2\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

am kleinsten $= 2\mu$ für $\varepsilon = 45^0$. Hiernach ist es rathsam, den Winkel ε nur wenig $< 45^0$ zu machen. Zur Verkleinerung des Reibungscoefficienten μ und der Abnutzung an diesen Angriffsflächen werden dieselben wohl aus Achat oder anderen harten Steinen hergestellt. —

Der Umstand, dass bei der Graham'schen Ankerhemmung, Fig. 157, die Zähne des Hemmungsrades abwechselnd von der einen und andern Seite gegen den Anker stossen, ist mit dem Nachtheile verbunden, dass auch die Axen A und O abwechselnd nach verschiedenen Richtungen gegen die Lager gedrängt werden und so bei etwas Spielraum in denselben Veranlassung zu einem unsanften, schlotternden Gange gegeben werden kann. Auch die Zahnform des Hemmungsrades gemäss Fig. 157 und die zur Umfassung des letzteren weite Oeffnung des Ankers ist bei Ausführungen in grossen Dimensionen und bei entsprechend grosser Triebkraft, insbesondere bei Haus- und Thurmuhren, nicht zweckmässig und wird vielmehr in solchen Fällen die durch Fig. 158 dargestellte Modification der ruhenden Ankerhemmung vorgezogen. Die Zähne des Hemmungsrades sind dabei durch cylindrische Stifte von halbkreisförmigem

Querschnitte ersetzt, welche rechtwinklig zur Radebene einseitig hervorragen; der Radius s dieser Halbkreise ist etwas kleiner, als die Dicke e der Ankerhaken H, H', die übrigens auch hier von coaxialen Kreiscylinderflächen mit der Schwingungsaxe A des Ankers als geometrischer Axe und an den Enden von schräg gerichteten ebenen Angriffsflächen $bc, b'c'$ begrenzt sind. Die Schenkel S, S' bilden einen spitzen Winkel und sind von verschiedener Länge der Art, dass die Radien der inneren Cylinderflächen ab und $a'b'$ der Ankerhaken, welche hier kleiner sein können, als der Radius r des Hemmungsrades, sich um die halbe Theilung des letzteren, gemessen in dem die Mittelpunkte o der Stifte enthaltenden Theilkreise RR', unterscheiden. Nur an diesen inneren Cylinderflächen kommen die Haken H, H' während der Hemmungszeiten τ_1 mit den Stiften in Berührung, und zwar in der Weise, dass bei der durch den Pfeil angedeutetenSchwingung, in welcher der Anker gemäss Fig. 158 begriffen ist, zuerst der Stift s längs ab und später längs $b'a'$ gleitet, bei der folgenden Schwingung aber zuerst derselbe Stift längs $a'b'$ zurück und später der folgende Stift s_1 längs ba gleitet u. s. f. Das Spiel der Hemmung bedarf keiner weiteren Erklärung, und auch die Constructionsregeln ergeben sich leicht nach Analogie der vorhergehenden Erörterungen.

Fig. 158.



Unter der Voraussetzung, dass die Ankerhaken H, H' gleiche Dicken $= e$ erhalten und dass der Radius s der die Stifte begrenzenden Kreiscylinderflächen etwas $< e$ ist, kann $e = {}^1/_4$ der Theilung des Hemmungsrades gemacht werden, so dass der Radius l der Cylinderfläche, welche den Haken H von aussen begrenzt, $=$ dem arithmetischen Mittel der Radien von ab und $a'b'$ wird. Aus früher besprochenen Gründen ist es zweckmässig, dass der um A mit diesem Halbmesser l beschriebene Kreis den Theilkreis RR' rechtwinklig schneide.

In dem durch Fig. 158 dargestellten Augenblicke, in welchem ein Stift zu Ende der Antriebszeit τ_2 im Begriffe ist, die Angriffsfläche bc

des Hakens H an der scharfen Kante c zu verlassen, soll die stumpfe Kante b' des Hakens H' gerade in den Theilkreis RR' eingetreten sein; ebenso soll sich bei der im umgekehrten Sinne stattfindenden folgenden Schwingung die Kante b von H im Theilkreise befinden, wenn derselbe Stift den Haken H' an der Kante c' verlässt. Ist p der Durchschnittspunkt von RR' mit dem verlängerten Kreisbogen ab und p' der Punkt, in welchem die äussere Kreislinie des Hakens H' von einem mit RR' concentrischen Kreise geschnitten wird, dessen Halbmesser $= r + s$ ist, so wird jene Forderung dadurch erfüllt, dass die Winkel bAp und $c'Ap'$ einander gleich gemacht werden. Zwischen der Grösse $= \lambda$ dieser Winkel und dem spitzen Winkel ε, unter welchem die Angriffsfläche bc gegen die Gerade Ab geneigt ist, besteht mit der Bezeichnung $Ac = l$ die Beziehung:

$$l\lambda = e\, tg\, \varepsilon + s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

welche hier an die Stelle obiger Gleichung (1) tritt. Die Angriffsfläche $b'c'$ ist dann gegen Ab' unter einem etwas grösseren Winkel ε' geneigt zu richten gemäss der Gleichung:

$$(l + 2e)\lambda = e\, tg\, \varepsilon' + s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Uebrigens ergiebt sich $b'c'$ durch Construction, wenn bc gegeben ist.

Damit in den Augenblicken, in welchen zu Ende der Antriebszeiten τ_2 abwechselungsweise b oder b' durch den Theilkreis RR' hindurch geht, das Pendel möglichst wenig, also in beiden Fällen gleich viel auf entgegengesetzten Seiten von seiner Ruhelage abweiche, ist der Mitnehmer so anzuordnen, dass das Pendel dann seine Ruhelage passirt, wenn die Gerade Ab des Ankers den Winkel bAp von Fig. 158 halbirt, also mit der Geraden Ao, welche den Theilkreis RR' bei o berührt, auf der Seite gegen den Schenkel S hin einen Winkel $= \frac{\lambda}{2}$ bildet.

Uebrigens ist der Vorgang während des Antriebes hier weniger einfach, so dass auch die obigen Erwägungen in Betreff des vortheilhaftesten Winkels ε hier nur näherungsweise zutreffend sind. Ist nämlich o der Mittelpunkt, s der (in RR' liegende) Scheitelpunkt der den Stiftquerschnitt begrenzenden halben Kreislinie, deren Radius auch mit s bezeichnet wurde, und ist x der in dem Viertelkreise sc, Fig. 158, so gelegene Punkt, dass der Winkel $oox = \varepsilon$ ist, so zerfällt die Antriebszeit τ_2 in drei Theile so, dass im ersten der Bogen sx des Stiftes längs dem Punkte b des Ankers, im zweiten der Punkt x des Stiftes längs der Geraden bc des Ankers, im dritten der Bogen xc des Stiftes längs dem Punkte c des

Ankers gleitet. Während dieser drei Zeiten sind

die Drehungswinkel des Hemmungsrades $= sOx,\ bOc,\ xOc$

„ „ des Ankers $= sAx,\ bAc,\ xAc$

und ist die Richtung des vom Stifte auf den Anker ausgeübten Druckes in der ersten dieser drei Zeiten wechselnd von os bis ox, in der zweiten constant und normal zu bc, in der dritten wechselnd von ox bis oc. Dabei nimmt, wie es sein muss, die Winkelgeschwindigkeit des Hemmungsrades, welches zu Anfang der Zeiten τ_2 in Ruhe war, nach und nach zu. In der That ist näherungsweise das Verhältniss seiner mittleren Winkelgeschwindigkeiten während der fraglichen drei Theile von τ_2 mit Rücksicht darauf, dass die Winkelgeschwindigkeit des Ankers in der Nähe seiner Mittellage, also während der ganzen Zeit τ_2 nur wenig veränderlich ist,

$$= \frac{sOx}{sAx} : \frac{bOc}{bAc} : \frac{xOc}{xAc}$$

$$= \frac{s(1 - \sin\varepsilon) : r}{s\cos\varepsilon : l} : \frac{e : r}{e\,tg\,\varepsilon : l} : \frac{s\sin\varepsilon : r}{s(1 - \cos\varepsilon) : l}$$

$$= \frac{1 - \sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} : \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} : \frac{\sin\varepsilon}{1 - \cos\varepsilon}$$

$$= \frac{\sin\varepsilon}{1 + \sin\varepsilon} : 1 : \frac{1 + \cos\varepsilon}{\cos\varepsilon}.$$

Um die Abnutzung der Angriffsflächen zu vermindern, sollten die Stifte ziemlich lang gemacht werden. Indem aber damit auch die Schwierigkeit wächst, sie stets längs einer Geraden mit den Angriffsflächen des Ankers in Berührung zu bringen, ist wohl die Einrichtung getroffen worden (z. B. bei der grossen Uhr zu Windsor), dass diese Flächen als besondere Platten um geeignete Axen etwas drehbar hergerichtet und mit Federn versehen wurden, welche sie stets in richtiger Lage mit den Stiften in Berührung erhalten.

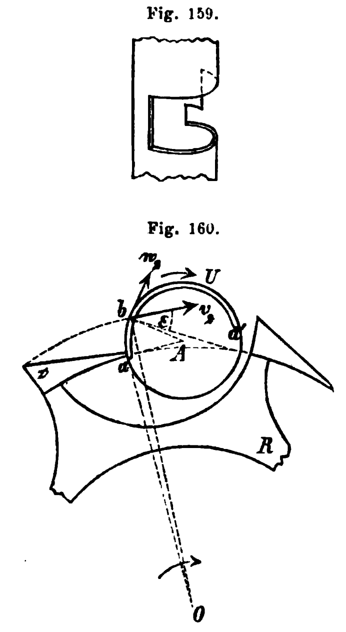
§. 151. Cylinderhemmung für Unruhuhren.

Bei dieser für Taschenuhren sehr gebräuchlichen Hemmung, welche von Tompion (1695) erfunden, von Graham verbessert wurde, wird die Axe der Unruhe durch einen kurzen Hohlcylinder gebildet, der an einer Stelle auf eine gewisse kleine Länge ausgeschnitten ist, und zwar an einem Theile dieser Länge ungefähr zur Hälfte des Umfanges, am anderen Theile etwas weiter, wie Fig. 159 andeutet. Das Hemmungsrad

R, Fig. 160, trägt an entsprechenden Armen keilförmig gestaltete Zähne, welche vor der Radebene etwas hervorstehen, so dass sie selbst der weniger weit, die Arme der weiter ausgeschnittenen Stelle des Hohlcylinders entsprechen; der Motor treibt dieses Rad mit vorausgerichteten Zahnspitzen (im Sinne des Pfeiles bei *O*, Fig. 160) um. Während der Hemmungszeiten τ_1 stützen sich die Zähne abwechselnd gegen die äussere und innere Cylinderwand, je zu Anfang einer Schwingung gegen die eine, zu Ende gegen die andere; der Antrieb während der Zeiten τ_2 aber wird dadurch vermittelt, dass die schräg gegen die betreffenden Radien des Hemmungsrades gerichteten äusseren Zahnflächen an den Lippen *a* und *a'*, Fig. 160, des Hohlcylinders, nämlich an den der Axe desselben parallel laufenden Schnittflächen seines weniger weiten Ausschnittes entlang gleiten.

Fig. 159.

Fig. 160.



Das Spiel der Hemmung ist hiernach folgendes. Zu Anfang einer Schwingung der Unruhe, die im Sinne des Pfeiles *U*, Fig. 160, erfolge, findet Hemmung statt, indem sich der Zahn *z* gegen die äussere Cylinderfläche stützt bis nach der Zeit $\frac{1}{2}\tau_1$ in der durch Fig. 160 angedeuteten Stellung die schräge Fläche jenes Zahnes an der Lippe *a* des Hohlcylinders entlang zu gleiten und dadurch die Unruhe anzutreiben beginnt. Während dieses Antriebes in der Zeit τ_2 dreht sich die Unruhe um einen Winkel $aAb = \lambda$, dessen Grösse, wie in Fig. 160 angedeutet ist, von der Zahnhöhe (der radialen Dimension des Zahnes *z*) abhängt. Zu Ende der Zeit τ_2 ist der Zahn *z* ganz in das Innere des Hohlcylinders eingetreten, und bedarf es nur der sehr kurzen Zeit τ_3, während welcher das Uhrwerk mit dem Hemmungsrade *R* ohne die Unruhe vom Motor getrieben wird, bis die vordere Kante von *z* nahe bei der andern Lippe *a'* gegen die innere Cylinderfläche trifft und damit auf's Neue das Uhrwerk zum Stillstande bringt, indem die Unruhe noch während der Zeit $\frac{1}{2}\tau_1$ ihre Schwingung fortsetzt; gegen das Ende derselben findet der den

Zahn z tragende Arm in dem bei a' sich etwas weiter erstreckenden Theile des Cylinderausschnittes Platz, falls der Ausschlagwinkel der Unruhe eine gewisse Grösse überschreitet. Wie sich dann die umgekehrte Schwingung der Unruhe vollzieht, wobei sie vom Zahne z an der Lippe a' getrieben wird, bedarf keiner weiteren Erklärung.

Im Princip ist die Cylinderhemmung von der ruhenden Ankerhemmung, Fig. 157, nicht verschieden, indem dort die cylindrischen Begrenzungsflächen ab, $a'b'$ der Ankerhaken H, H' dieselbe Function haben wie hier die äussere und innere Cylinderfläche; letztere Ausführungsform des gleichen Princips gestattet einen grösseren Ausschlagwinkel des Regulators, wie er für die Unruhe im Gegensatze zum Pendel gefordert werden muss. Auch ist es kein wesentlicher Unterschied, dass, während dort die Angriffsflächen für den Antrieb dem Anker, die entsprechenden Angriffskanten den Zähnen des Hemmungsrades angehören, hier das Umgekehrte der Fall ist. Dass es bei der durch Fig. 157 dargestellten Ausführungsform der ruhenden Ankerhemmung verschiedene Zähne z, z' sind, welche nach einander zur Wirkung kommen, während bei der Cylinderhemmung derselbe Zahn z nach einander gegen die eine und andere Lippe des Cylinderausschnittes treibend wirkt, bezw. durch Stützung gegen die eine und andere Cylinderfläche die Hemmung vermittelt, ist ein Unterschied, der auch schon zwischen den zwei Formen Fig. 157 und Fig. 158 der Ankerhemmung zu bemerken war. Auch die bei dieser letzteren Art von Ankerhemmung besprochene Complication des Verhaltens in Folge des Ersatzes von Angriffskanten am Hemmungsrade durch die cylindrischen Angriffsflächen der Stifte hat ihr Analogon bei der Cylinderhemmung, insofern dabei die Hemmungszähne nicht gegen scharfkantig abgeschrägte, sondern gegen abgerundete Lippen des Cylinderausschnittes zur Wirkung kommen.

Die Constructionsregeln der Cylinderhemmung sind hiernach auch denen der ruhenden Ankerhemmung besonders bei ihrer Ausführungsform gemäss Fig. 158 ganz entsprechend. Damit auch bei ersterer durch die Stösse, welche die vorderen Zahnkanten des Hemmungsrades zu Ende der Zeiten τ_3 gegen die äussere oder innere Cylinderfläche ausüben, die Bewegung des Regulators, also hier der Unruhe, möglichst wenig gestört werde, soll die durch jene Zahnkanten gehende Cylinderfläche die mittlere Cylinderfläche des Hohlcylinders rechtwinklig schneiden. Indem dabei letzterer zwischen einer vorderen Zahnkante und der Hinterfläche des voraufgehenden Nachbarzahnes, ein Zahn aber in der Höhlung des Cylinders Platz finden muss, ist es nöthig, dass der innere Durchmesser

des Hohlcylinders etwas grösser, als die (im Sinne der Peripherie verstandene) Zahnlänge e, der äussere Durchmesser etwas kleiner, als die um jene Zahnlänge verminderte Theilung des Hemmungsrades sei. Je kleiner die betreffenden Unterschiede gemacht werden, desto kleiner sind die Zeiten τ_3 und desto geringer die Stösse beim Anschlagen der Zahnkanten gegen den Cylinder zu Ende dieser Zeiten.

Für die Wahl des Winkels ε, unter welchem die Angriffsfläche eines Zahnes gegen die Peripherie des Hemmungsrades geneigt und dessen trigonometrische Tangente = dem Verhältnisse der Höhe und Länge eines Zahnes ist, sind hier ebenso wie bei der im vorigen Paragraph besprochenen ruhenden Ankerhemmung die zwei Rücksichten massgebend, dass das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{v_2}{w_2}$ möglichst gross und das Arbeitsverhältniss $\frac{R_2}{A_2}$ möglichst klein sein soll. Die Geschwindigkeiten v_2 und w_2 beziehen sich auf das Ende der Zeiten τ_2, also etwa auf die Lage b, Fig. 160, der Angriffskante a des Hohlcylinders, und ist dabei v_2 die Geschwindigkeit des Punktes b des Hemmungsrades, w_2 die Geschwindigkeit desselben Punktes des Hohlcylinders. Erstere ist normal zu Ob oder sehr nahe normal zu Oa, letztere normal zu Ab, folglich der Winkel zwischen den Richtungen von v_2 und w_2 nahe $= 90^0 \mp$ Winkel $aAb = 90^0 \mp \lambda$. Das obere Vorzeichen gilt für die Angriffskante a, das untere für a'. Indem nun die normal zur Angriffsfläche des Zahnes gerichteten Componenten von v_2 und w_2 einander gleich sind, folgt

$$v_2 \sin \varepsilon = w_2 \sin (\varepsilon + 90^0 \mp \lambda) = w_2 \cos (\varepsilon \mp \lambda)$$

$$\frac{v_2}{w_2} = \cot g\, \varepsilon \cos \lambda \pm \sin \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Ist aber r der Radius des Hohlcylinders, so ist

$$\sin \lambda = \frac{e\, tg\, \varepsilon}{r}$$

und da auch nahe (mit um so kleinerem Fehler, mit je kleinerem Spielraume der Zahn im Hohlcylinder gerade Platz finden, je kleiner also die betreffende Zeit τ_3 sein soll)

$$e = r(1 + \cos \lambda)$$

gesetzt werden kann, so folgt

$$tg\, \varepsilon = \frac{\sin \lambda}{1 + \cos \lambda} = tg \frac{\lambda}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

und somit nach Gl. (1):

$$\frac{v_2}{w_2} = cotg\,\frac{\lambda}{2}\cos\lambda \pm \sin\lambda \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Dieser Ausdruck ist für beide Vorzeichen des letzten Gliedes unendlich gross für $\lambda = 0$, also $\varepsilon = 0$ nach Gl. (2), und ist folglich ε möglichst klein zu machen, um $\frac{v_2}{w_2}$ möglichst gross zu erhalten.

Ist wieder P der mittlere zur Angriffsfläche des Hemmungszahnes normal gerichtete Druck zwischen ihm und der Angriffskante des Hohlcylinders während der Zeit τ_2 und μ der Reibungscoefficient, so ergiebt sich die Reibungsarbeit

$$R_2 = \mu P \frac{e}{\cos\varepsilon},$$

während die unterdessen auf die Unruhe übertragene Arbeit nahe

$$A_2 = P\frac{e\,tg\,\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt

$$\frac{R_2}{A_2} = \mu\, cotg\,\varepsilon \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

um so kleiner, je grösser ε.

Während im Falle der Ankerhemmung der Rücksicht auf einen möglichst kleinen Werth von $\frac{R_2}{A_2}$ das Hauptgewicht beizulegen war, weil dort τ_2 ein erheblicher Theil der ganzen Schwingungsdauer und damit auch R_2 ein erheblicher Theil der ganzen durch die Hemmung veranlassten Reibungsarbeit ist, verhält es sich hier anders in Folge des grossen Ausschlagwinkels einer Unruhe, und pflegt deshalb ε thatsächlich nur ein kleiner Winkel zu sein. Die Reibungsarbeit R_1 während der Hemmungszeit τ_1 ist um so mehr $> R_2$, als auch der Druck P_1, welchen die Zahnspitze dabei auf den Hohlcylinder ausübt, wesentlich grösser, als die Theilrisskraft P_2 des Hemmungsrades während der Zeit τ_2 ist; letztere ist kleiner als P_1 um die Summe der auf den Umfang des Hemmungsrades reducirten Reibung des Uhrwerkes und der ebenso verstandenen bewegenden Kraft zur Beschleunigung des Uhrwerkes. Auch ist die Reibungsarbeit R_2 thatsächlich kleiner, als sie oben berechnet wurde, und zwar um so mehr kleiner, je kleiner der Winkel ε ist. Indem nämlich zu Anfang der Zeiten τ_2 die Unruhe nahe das Maximum ihrer Geschwindigkeit besitzt, während das Hemmungsrad mit

dem ganzen Uhrwerke erst allmählig in Bewegung versetzt wird, eilt erstere dem letzteren zunächst voraus, so dass beide ausser Berührung kommen und der Druck P nebst entsprechender Reibung μP in der That nur an einem gewissen gegen die äussere Zahnkante hin liegenden Theile der schrägen Zahnfläche zur Wirkung gelangen. Bei der Ankerhemmung kommt ein ähnliches Verhalten deshalb weniger in Betracht, weil der dem Winkel ε entsprechende Winkel grösser und die Geschwindigkeit des Pendels kleiner ist.

Die bedeutende Gesammtreibung und entsprechende Abnutzung der Cylinderhemmung sind Mängel derselben. Man hat deshalb wohl, während gewöhnlich Cylinder und Hemmungsrad aus gehärtetem Stahl verfertigt werden, ausnahmsweise Cylinder aus hartem Stein (Rubin) verfertigt angewendet. Allein solche Uhren werden sehr theuer, und pflegt man heutzutage indirect wirkende Ankerhemmungen bei den besseren Taschenuhren vorzuziehen.

2. Indirect wirkende Hemmungen.

Dieselben haben den Zweck, durch Einschaltung eines Hülfsmechanismus zwischen das Hemmungsrad und den Regulator die Schwingungen des letzteren während des grössten Theiles der Hemmungsdauer τ_1 ganz frei geschehen zu lassen und so die betreffende Reibungsarbeit auf ein Minimum zu reduciren, was besonders bei den grossen Ausschlagwinkeln der Unruhen von Wichtigkeit ist.

Solche indirect wirkende Hemmungen, bei denen dieser Zweck sehr vollkommen erreicht ist, pflegt man **freie Hemmungen** zu nennen.

Endlich unterscheidet man als die vollkommensten Einrichtungen dieser Art noch sogenannte **freie Hemmungen mit constanter Kraft**, bei denen man nicht sowohl die mehr oder weniger veränderliche Hauptbetriebskraft des Uhrwerkes, sondern eine davon abgeleitete constante **Hülfskraft** (Gewicht oder Feder) bei jedem Schwunge auf den Regulator wirken lässt, um ihm den nöthigen Ersatz an lebendiger Kraft zu leisten.

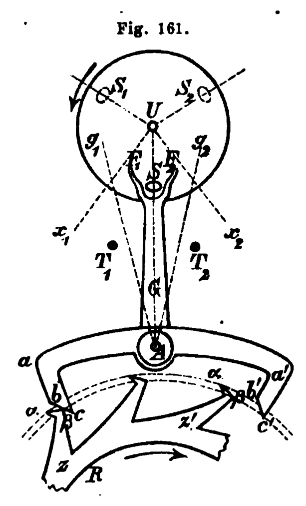
§. 152. Indirect wirkende Ankerhemmung.

Die Einrichtung einer indirect wirkenden Ankerhemmung, wie sie bei Taschenuhren gebräuchlich ist, zeigt Fig. 161. Die Ankerwelle A ist mit einem Arme G, der **Gabel**, verbunden, welcher am Ende in



zwei Zinken oder Fangohren F_1 und F_2 ausläuft. Die Unruhspindel U trägt eine Scheibe oder einen Kurbelarm mit einem so weit hervorstehenden Treibstifte S, dem sogenannten Hebesteine, dass er von den Fangohren F_1, F_2 gefasst werden kann. Durch Anschlagstifte T_1 und T_2 oder auf sonstige Weise ist der Winkel $g_1 A g_2$ begrenzt, innerhalb dessen die Gabel hin- und herschwingen soll.

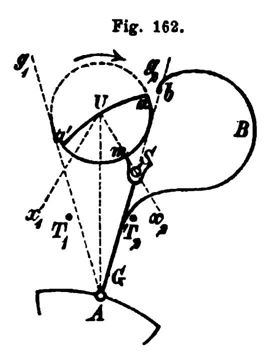
Fig. 161.



Angenommen die Unruhe befinde sich in der äussersten Lage, in welcher S bei S_1 liegt, und sie beginne ihre Schwingung im Sinne des beigesetzten Pfeils. G ist in der Lage $A g_1$; die Kante β des Zahnes z des Hemmungsrades R stützt sich gegen die Fläche ab des linken Ankerhakens fast bei b, welche, damit die Gabel sanft gegen T_1 angedrückt wird, eine solche Richtung haben muss, dass die Richtungslinie des Normaldruckes von β gegen ab etwas unter A vorbeigeht. Das Uhrwerk ist nun gehemmt und die Unruhe bewegt sich frei von der Hemmung etwa bis die Richtung US in Ux_1 fällt; dann stösst der Hebestein S gegen das Fangohr F_2 und entfernt die Gabel von T_1, die Zahnkante β gleitet von der Fläche ab auf die Endfläche bc des Ankers, darauf die Zahnfläche $\alpha\beta$ längs der Ankerkante c und wird dabei treibend zunächst auf den Anker und dadurch, indem jetzt F_1 gegen S stösst, auch treibend auf die Unruhe gewirkt. Die beiden Stösse von S gegen F_2 und von F_1 gegen S hört man bei solcher Uhr unmittelbar nach einander. Wenn der Zahn z den linken Ankerhaken verlässt, steht die Kante β eines anderen Zahnes z' schon dicht vor der Fläche $a' b'$ des rechten Ankerhakens, wodurch alsbald das Uhrwerk wieder gehemmt wird, während G in die Lage $A g_2$ und US in die Lage Ux_2 gelangt ist. Damit jetzt G sanft gegen T_2 gedrückt wird, muss $a' b'$ eine solche Richtung haben, dass die Richtungslinie des Normaldruckes von β gegen $a' b'$ etwas über A vorbeigeht. Nun schwingt die Unruhe wieder frei von der Hemmung bis US die Richtung US_2 hat. Kommt dann bei der umgekehrten Schwingung US in die Lage Ux_2, so stösst S gegen F_1, β gleitet an $a' b'$, dann $\alpha\beta$ an b', endlich α an $b' c'$, wobei der Anker angetrieben wird und durch seine Gabel, indem F_2 gegen S stösst, auch die Unruhe u. s. f.

Bei der Ausführung pflegt die Gabel G über A hinaus als ein Gegengewicht verlängert zu werden, um den Schwerpunkt in die Axe A zu bringen. Auch kann durch eine verschieden auszuführende Sicherheitsvorrichtung verhindert werden, dass die Gabel in Folge einer zufälligen äusseren Einwirkung (Erschütterung) ihre Lage Ag_1 oder Ag_2 früher verlässt, als bis sie vom Hebesteine S gestossen wird. Eine Art solcher Sicherung ist durch Fig. 162 angedeutet. Dabei wird die Spindel der Unruhe an geeigneter Stelle von einer Scheibe $Uama'$ gebildet von solchem Durchmesser aa', dass sie von A aus unter einem Winkel nahe $= g_1Ag_2$, Fig. 161, erscheint. Dieselbe ist längs ama' kreisförmig zum Mittelpunkte U begrenzt, und zwar an solcher Stelle, dass die Mittellinie Um des Winkels aUa' mit der Richtung US zusammenfällt; der flache Begrenzungsbogen aUa' ist aus einem Mittelpunkte beschrieben, welcher in UmS liegend von U eine Entfernung etwas $< AU$ hat. Jenem scheibenförmigen Theile der Unruhspindel entsprechend geht von der Gabel G ein Bügel B aus von solcher Gestalt und Lage, dass die Scheibe bei jeder Richtung von US darin Platz finden kann und dass sein Endpunkt b von der Ankeraxe A etwas weiter als die Unruhaxe U entfernt, übrigens in der verlängerten Mittellinie der Gabel gelegen ist. Zu Anfang der im Sinne des Pfeiles stattfindenden Schwingung der Unruhe liegt dann b so nahe an der Begrenzungsfläche $a'ma$, dass zwischen ihr und dem Anschlage T_2 nur ein sehr kleines Spiel für die Gabel frei ist. Kommt aber US in die Lage Ux_2, wie Fig. 162 zeigt, so hat sich die Kante a der Sicherungsscheibe eben an b vorbei bewegt, so dass jetzt die Gabel G ungehindert gegen den anderen Anschlag T_1 getrieben werden kann, indem sich das Ende b des Sicherungsbügels B längs aUa' hin bewegt. Ist US in die Lage Ux_1, die Gabel in die Lage Ag_1 gekommen, so liegt b der Kante a' der Sicherungsscheibe gegenüber, und wird im weiteren Verlaufe der Unruheschwingung durch die Begrenzungsfläche $a'ma$ dieser Scheibe eine etwaige Lagenänderung des Ankers wieder unmöglich gemacht, bis bei umgekehrter Schwingung der Unruhe die Kante a' den Punkt b wieder passirt hat u. s. f.

Fig. 162.



Analog der durch Fig. 158 dargestellten Ausführungsform einer direct wirkenden Ankerhemmung (§. 150) können auch hier die Hemmungszähne durch Stifte ersetzt werden, wenn es sich um grössere Uhr-



werke handelt. Bei allen diesen indirect wirkenden Ankerhemmungen schwingt zwar die Unruhe während des grösseren Theils ihres Winkelweges frei, aber es ist der Winkel $x_1 U x_2$, Fig. 161, im Vergleich mit dem ganzen Schwingungswinkel doch noch zu gross, als dass dieser Hemmung schon die Bezeichnung als freie Hemmung gebührte.

§. 153. Freie Hemmungen.

Die freien Hemmungen, wie sie namentlich bei Chronometern Anwendung finden, sind dadurch charakterisirt, dass der die indirecte Wirkung vermittelnde Zwischenmechanismus eine federnde Beschaffenheit hat und dass der Regulator nur bei seiner Schwingung in einem Sinne angetrieben wird, während er selbst bei der umgekehrten Schwingung eine dünne Feder etwas zu biegen hat, um diejenige Lage aller Theile wieder herbeizuführen, welche für den Impuls bei der neuen Schwingung im ersteren Sinne nöthig ist. Uebrigens schwingt der Regulator fast ganz frei und bestehen seine Widerstände, insoweit sie von der Hemmung herrühren und ihm nicht ohnehin eigenthümlich sind, bei jeder Doppelschwingung lediglich in zweimaliger sehr geringer Biegung einer Feder, in einer kleinen Reibung während des Impulses und einer solchen bei der Auslösung der Hemmung.

Fig. 163.

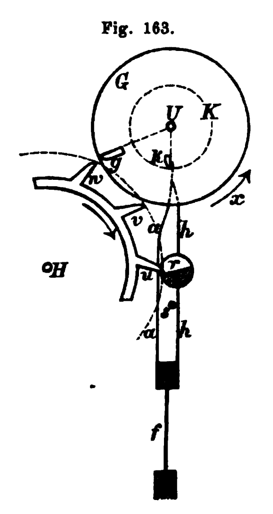
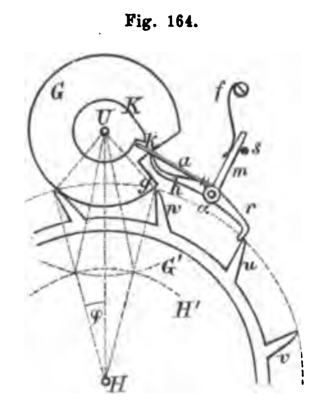


Fig. 163 lässt die wesentliche Einrichtung der freien Chronometerhemmung von Earnshaw erkennen. Die Unruhespindel U ist mit zwei zu ihr senkrechten Scheiben G und K ausgerüstet, welche bezw. den grossen Hebestein g und den kleinen Hebestein k tragen, deren wirksame Flächen radial gerichtet sind. Der Zwischenmechanismus besteht aus zwei Federn, einer schwächeren sogenannten Auslösungsfeder a und einer stärkeren sogenannten Hemmungsfeder h; beide laufen am Ende zu einer einzigen Feder f zusammen. Am anderen Ende stützt sich a gegen die Spitze der etwas kürzeren Feder h; an letzterer befindet sich ein ungefähr zur Hälfte ausgeschnittener Cylinder, der Ruhestein r. Die Federn a, h liegen entsprechend der Scheibe K so, dass die Spitze von a eben vom kleinen Hebesteine k getroffen werden kann; die Scheibe G mit dem grossen Hebesteine g sowie auch der Ruhestein

r treten aber so weit vor, dass *g* und die ebene Hemmungsfläche von *r* mit den Zahnspitzen des Hemmungsrades zusammentreffen können, die an den Federn ungehindert vorbeigehen.

In der durch die Figur dargestellten Lage ist Hemmung vorhanden, indem der Zahn *u* sich gegen *r* stützt. Die Unruhe befindet sich ungefähr in der Mitte ihrer Schwingung im Sinne des Pfeiles *x*, und es ist eben *k* im Begriff gegen *a* zu stossen. In Folge dessen werden die Federn, besonders die Feder *f* gebogen, *r* gleitet unter *u* weg, kehrt aber sofort in seine frühere Lage zurück, nachdem *k* die Feder *a* verlassen hat. Unterdessen ist *g* am Zahne *w* vorbeigegangen, wird aber alsbald von demselben eingeholt und dadurch die Unruhe angetrieben, bis dieser Zahn *w* den grossen Hebestein *g* wieder verlässt und unmittelbar darauf der dem Zahne *u* folgende Hemmungszahn *v* vom Ruhesteine *r* aufgehalten wird. Bei der umgekehrten Schwingung hat nur der kleine Hebestein *k* die dünne Feder *a* allein etwas zu biegen, um passiren zu können, während die Hemmung erhalten bleibt und die Unruhe übrigens ganz frei schwingt. Auch bei der erstgenannten Schwingung, bei welcher die Hemmung ausgelöst und die Unruhe angetrieben wird, kommt die Feder *h* als solche kaum zur Wirkung, so dass sie auch durch ein starres Stäbchen ersetzt werden könnte. Durch einen Anschlagstift *s* für die Feder, bezw. das Stäbchen *h* kann bewirkt werden, dass, wenn zur Vorbereitung neuer Hemmung die Feder *f* nach ihrer Biegung durch den kleinen Hebestein *k* wieder zurückschnellt, der Ruhestein *r* über eine passende Grenzlage nicht hinausgeht und überhaupt eine schwingende Bewegung desselben vermieden wird. Wesentlich ist es, der ebenen Hemmungsfläche des Ruhesteins *r* eine solche Richtung zu geben, dass seine relative Bewegung längs dem gehemmten Zahne *u* behufs der Freigebung des letzteren ohne rückläufige Bewegung des Hemmungsrades geschehen kann.

Fig. 164.



Eine Chronometerhemmung nach Jürgens von ganz ähnlicher Wirkung zeigt Fig. 164. Auf der Unruhaxe *U* befindet sich eine grössere Scheibe *G* mit radialer Angriffsfläche *g* ihres Ausschnittes und eine kleinere Scheibe *K* mit einer Nase von gleichfalls radialer Angriffsfläche *k*, beide entsprechend den gleich bezeichneten Theilen der vorbeschriebenen Hemmung. Die Axe α trägt drei

Arme: r in der Ebene der Scheibe G und des Hemmungsrades, h in der Ebene der Scheibe K, m in beliebiger Ebene. Auf h ist nahe bei α das leichte Auslösungsfederchen a befestigt, welches etwas in den von der Nasenspitze k beschriebenen Kreis hineinreicht und nahe bei diesem freien Ende sich gegen die Spitze des etwas gekrümmten Armes h stützt. Gegen den Arm m wirkt die Feder f, und es ist der Stift s so angebracht, dass, wenn m durch f dagegen gedrückt wird, r etwas in den äusseren Theilkreis des Hemmungsrades hineinreicht.

Das Spiel ist dasselbe wie bei der vorigen Hemmung und passt darauf die vorhergehende Beschreibung, indem gleich bezeichnete Theile in beiden Fällen gleiche Function haben unbeschadet dessen, dass hier der Zahn v, welcher nach u gehemmt wird, nicht gegen w hin, sondern auf der anderen Seite liegt. Das System der drei Hebelarme h, r, m kann übrigens verschiedentlich in seiner Anordnung modificirt werden. —

Eine weitere Vervollkommnung, welche an diesen freien Hemmungen noch angebracht werden kann, ergiebt sich aus folgender Ueberlegung. Während mit Hülfe des Stiftes s, der die Lage des Armes r, bezw. des Ruhesteines sichert, der letztere so adjustirt werden kann, dass er nur äusserst wenig in den äusseren Theilkreis des Hemmungsrades hineintritt und also sowohl die Deformationsarbeit der Feder f wie die Reibungsarbeit beim Lösen der Hemmung beliebig klein wird, auch die Biegungsarbeit der feinen Auslösungsfeder bei der umgekehrten Unruheschwingung beliebig klein gemacht werden hann, besteht die hauptsächlichste Reibung, welche auch hier noch immer am Regulator hervorgerufen wird, in derjenigen beim Entlanggleiten der treibenden Zahnkante an der ebenen Fläche g. Der Weg dieser Reibung, während der Zeit τ_2 hin und her durchlaufen, ist

$$s = g + h - e,$$

wenn e die Axenentfernung UH, g den Radius der Scheibe G und h den äusseren Radius des Hemmungsrades bedeutet. Ist aber 2φ der Drehungswinkel des letzteren während τ_2, so ist, da φ ein hinlänglich kleiner Winkel, um

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

setzen zu können,

$$g^2 = e^2 + h^2 - 2eh\cos\varphi = (e-h)^2 + eh\varphi^2$$

$$g = e - h + \frac{1}{2}(e-h)^{-1}.eh\varphi^2$$

$$s = g + h - e = \frac{eh}{e-h}\,\frac{\varphi^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nun ist, wenn P der Druck des Zahnes gegen die Scheibe G und μ der Reibungscoefficient, die Reibungsarbeit beim Antriebe der Unruhe:

$$R_2 = \mu P . 2s.$$

Ihr Verhältniss zu der gleichzeitig auf die Unruhe übertragenen Arbeit

$$A_2 = P . 2h\varphi$$

ist mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{R_2}{A_2} = \frac{\mu s}{h\varphi} = \mu \frac{e}{e-h} \frac{\varphi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

unter übrigens gegebenen Umständen um so kleiner, je kleiner h.

Darauf beruht der Vorzug einer sogenannten Doppelrad-Hemmung, bei welcher das Hemmungsrad aus zwei auf derselben Axe miteinander verbundenen Rädern besteht, von denen das grössere zur Hemmung, das kleinere aber, welchem entsprechend die Scheibe G vergrössert ist, als treibendes Rad dient, wie die gestrichelten Kreise G', H' in Fig. 164 andeuten. Dieselbe Figur lässt übrigens erkennen, dass die Verkleinerung des Kreises H' mit Verkleinerung des Schwingungswinkels der Unruhe während ihres Antriebes verbunden ist, und wird dadurch die zulässige Verkleinerung jenes Kreises H' beschränkt, weil das Hemmungsrad, nachdem es seine nicht mehr gehemmte Bewegung mit der Geschwindigkeit Null begonnen hat, einer gewissen Zeit und somit eines gewissen Schwingungswinkels der Unruhe bedarf, um letztere mit seinem betreffenden Zahne w einzuholen, bevor dieser das Bewegungsgebiet der Angriffsfläche g wieder verlassen hat und dann abermals Hemmung erfolgt ist.

§. 154. Hemmungen mit constanter Kraft.

Um die freie Hemmung schliesslich noch zu einer sogenannten Hemmung mit constanter Kraft zu machen, deren Zweck und vortheilhafte Wirkungsweise zu Ende von §. 146 im Allgemeinen erklärt wurden, kann man die Hauptbetriebskraft der Uhr in der Weise mittelbar auf den Regulator wirken lassen, dass man sie veranlasst, bei jeder Doppelschwingung desselben eine besondere Feder stets auf's Neue und immer um gleich viel zu spannen, welche dann ihrerseits den jedesmaligen Impuls während der Zeit τ_2 ertheilt. Letzterer ist sonach stets gleich, wie auch die Betriebskraft oder die Widerstände des Uhrwerkes veränderlich sein mögen.

Von der im vorigen Paragraph beschriebenen Doppelradhemmung ausgehend, könnte zu dem Ende die feste Verbindung zwischen dem

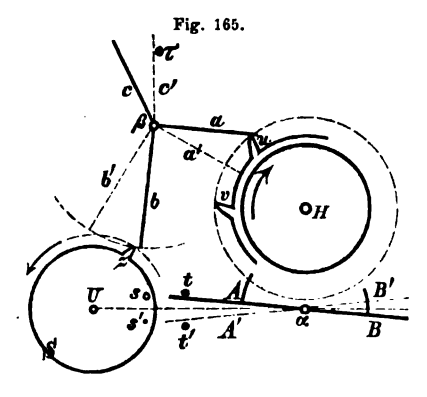


kleineren Rade (dem Triebrade) und dem grösseren (dem Hemmungsrade im engeren Sinne), welches letztere unter der unmittelbaren Einwirkung der Hauptbetriebskraft steht, aufgehoben und jenes kleinere, unter der Einwirkung der Hülfskraft stehende Rad mit einer besonderen Hemmungsvorrichtung versehen werden, welche in denselben Augenblicken wie die Haupthemmung unterbrochen wird.

Dergleichen Hemmungen mit constanter Kraft mögen zwar bei den an sich schon sehr vollkommenen freien Hemmungen von Chronometern, deren Triebkraft zudem durch eine Schnecke möglichst constant erhalten wird, am wenigsten Bedürfniss sein; sie leisten aber, auch ohne freie Hemmungen zu sein, gute Dienste besonders bei grossen Uhrwerken, z. B. bei Thurmuhren wegen der hier verhältnissmässig grossen Veränderlichkeit der Reibungswiderstände des Räderwerkes und des grösseren Ausschlagwinkels des als Regulator dienenden Pendels, dessen Aenderung somit (§. 139) eine verhältnissmässig bedeutende Aenderung von τ bedingt. Die Hülfsfeder kann dabei durch ein periodisch zu hebendes Hülfsgewicht ersetzt werden. —

Im Einzelnen ist die Anordnung sehr grosser Mannigfaltigkeit fähig. Als Beispiel zeigt Fig. 165 eine indirect wirkende Ankerhemmung mit constanter Kraft nach einem Modell der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Dabei ist H das Hemmungsrad. Durch AB, $A'B'$ sind die Grenzlagen des um α drehbaren, links in die (nicht gezeichnete) Gabel auslaufenden Ankers angedeutet, dessen Drehung durch die Anschlagstifte t, t' begrenzt wird. Die schrägen Endflächen der Ankerhaken sind hier so geneigt, dass sie mit den Zähnen des Rades H nicht in Berührung kommen

Fig. 165.



und dass somit der Anker nur zur Hemmung, nicht auch zum Antriebe dient. U ist die Axe der Unruhe, S eine Scheibe auf derselben mit einem radial hervorragenden Antriebzahne z und einem von der Seitenfläche hervorstehenden Auslösungsstifte s. Mit der Axe β des Armsystems a, b, c ist das innere Ende der Hülfsspiralfeder verbunden, deren äusseres Ende am Uhrgehäuse befestigt ist.

In der Lage abc dieses Armsystems, wie sie die Figur als augenblicklich stattfindend voraussetzt, hat die Hülfsfeder das Maximum ihrer

Spannung, indem der auf dem Zahne *u* von *H* ruhende Arm *a* die Aufdrehung der Feder verhindert. Die Unruhe ist etwas über die Mitte ihrer Schwingung im Sinne des Pfeils hinaus, und ist durch den Stift *s* vermittels der Gabel so eben der Anker aus der Lage *A'B'* in die Lage *AB* gebracht worden. Dadurch ist so eben der bis dahin gehemmte Zahn des Hemmungsrades von der äusseren Fläche des rechten Ankerhakens abgeglitten. Das Hemmungsrad wird jetzt durch die Triebkraft der Uhr im Sinne des Pfeils gedreht, und zwar um eine halbe Theilung, indem dann durch den Anschlag eines anderen Zahnes von *H* gegen die innere Fläche des linken Ankerhakens abermals Hemmung eintritt. Wenn diese Bewegung von *H* um eine halbe Zahntheilung beginnt, wird die Hülfsfeder nur noch ganz wenig weiter gespannt (entsprechend der kleinen Strecke, um welche der Arm *a* in den äusseren Theilskreis des Hemmungsrades hineinreicht, wenn ein Zahn des letzteren gegen die äussere Fläche des rechten Ankerhakens sich stützt), dann aber schnappt *a* von *u* ab, die Hülfsfeder kommt zur Wirkung, bringt *abc* in die durch Stützung des Armes *c* gegen den Anschlagstift *r* fixirte Lage *a'b'c'*, und es wirkt dabei der Arm *b* durch den Zahn *z* antreibend auf die Unruhe. In der Lage *a'b'c'* des Armsystems steht der Arm *a* dem um eine halbe Theilung fortgerückten Zahne *v* dicht gegenüber.

Bei der umgekehrten Schwingung der Unruhe geht *z* an dem in der Lage *b'* befindlichen Arme *b* vorbei, *s* ergreift die Gabel und hat, in die Lage *s'* gekommen, den Anker in die Lage *A'B'* gebracht. Dadurch ist die Hemmung wieder gelöst, *H* rückt um eine halbe Theilung weiter. wobei der Zahn *v*, den Arm *a* aus der Lage *a'* in die Lage *a* schiebend. die Hülfsfeder auf's Neue spannt bis durch Anschlag eines Zahnes von *H* gegen die äussere Fläche des rechten Ankerhakens wieder Hemmung in solcher Lage aller Theile eintritt, von welcher die Betrachtung ausging.

Bei den Schwingungen der Unruhe im einen Sinne wird also sie durch die Hülfsfeder angetrieben, bei den Schwingungen im anderen Sinne wird die Hülfsfeder durch die Triebkraft der Uhr neu gespannt.

Uebrigens pflegt der Ersatz an Arbeitsvermögen, dessen ein Regulator für jede Doppelschwingung bedarf, so klein zu sein, dass bei einem Uhrwerke von jener durch das Modell, Fig. 165, dargestellten Einrichtung entweder die Hülfsfeder sehr schwach oder die jedesmalige Aenderung ihres Windungswinkels sehr klein gemacht werden müsste, letzteres entsprechend sehr grossen Längen der Arme *a* und *b*. Meistens wird deshalb die Einrichtung so getroffen, dass die Hülfsfeder, wenn sie auch bei jeder einfachen oder doppelten Schwingung den Regulator antreibt,



doch nur jeweils nach einer grösseren Zahl von Schwingungen desselben auf's Neue gespannt wird durch Verdrehung um einen Winkel, welcher nicht an und für sich sehr klein zu sein braucht, wenn er nur im Vergleich mit dem bleibenden Verdrehungswinkel dieser Feder hinlänglich klein ist. Geboten ist solche Einrichtung bei Thurmuhren und ähnlichen grossen Uhrwerken mit springenden Zeigern; indem letztere nur jeweils nach Verlauf einer Minute durch den in den Zwischenzeiten gehemmten Hauptmotor für wenig Secunden in (durch einen Windfang einigermassen regulirte) Bewegung versetzt werden, wird dadurch gleichzeitig die neue Anspannung einer als Triebkraft für den Regulator sammt Hemmung dienenden Hülfsfeder von Minute zu Minute bewirkt. Um dabei auch grösseren Aenderungen der Reibungswiderstände Rechnung zu tragen, wie sie besonders bei Frostwetter durch Verdickung des Schmieröls verursacht werden, kann sowohl die Haupttriebkraft (in den genannten Fällen ein Gewicht), als auch die bleibende Minimalspannung der Hülfsfeder durch den Wärter entsprechend verändert werden.

d. Das Uhrwerk.

§. 155. Räderwerk einer Uhr.

Zu dem im engeren Sinne sogenannten Uhrwerke gehört vor Allem das Räderwerk, nämlich der Zahnrädermechanismus, welcher dazu dient, die Bewegung vom Motor auf das Steigrad (Hemmungsrad) und auf die Zeiger, insbesondere auf den Minuten- und den Stundenzeiger zu übertragen, die, mit einer im Verhältnisse 12 : 1 verschiedenen Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotirend, durch ihre augenblickliche Lage gegen die Kreistheilung eines Zifferblattes die betreffende Zeit abzulesen gestatten. In der Regel geift das mit der Trommel einer Gewichtuhr, bezw. mit dem Federhause oder der Schnecke einer Triebfederuhr rotirende Triebrad unmittelbar in ein kleineres Rad auf der mit dem Minutenzeiger fest verbundenen Minutenwelle, von welcher dann die Bewegung einerseits nach dem Steigrade abgezweigt und andrerseits auf den Stundenzeiger übertragen wird.

Was die erstere Uebertragung betrifft, so ist zu bemerken, dass bei allen besprochenen Hemmungen das Steigrad für jede Doppelschwingung des Regulators um einen Zahn fortrückt. Ist also s die Zahl der Doppelschwingungen des Regulators pro Secunde, z die Zahl der Zähne des



Steigrades, so dass letzteres pro Secunde $\frac{s}{z}$ Umdrehungen macht, so muss, da die Minutenwelle stündlich eine, also pro Secunde $\frac{1}{3600}$ Umdrehung macht, die Steigradwelle

$$n = 3600 \frac{s}{z}$$

mal so schnell umlaufen, als die Minutenwelle. Bei Pendeluhren genügt dazu gewöhnlich eine Zwischenwelle, die sogenannte Mittelwelle, welche ein kleines und ein grösseres Rad trägt, von denen jenes mit dem Minutenrade auf der Minutenwelle, dieses mit einem kleinen Rade auf der Steigradwelle in Eingriff ist, entsprechend einer Zerlegung jenes Umsetzungsverhältnisses n in zwei Factoren. Bei Unruheuhren werden aber wegen des grösseren Werthes von n, in Folge besonders der grösseren Schwingungszahl s, im Allgemeinen zwei Zwischen- oder Mittelwellen zwischen die Minuten- und Steigradwelle eingefügt, wird also die resultirende Uebersetzung n in drei einzelne zerlegt.

Um den Stundenzeiger S, Fig. 166, mit $\frac{1}{12}$ der Geschwindigkeit des Minutenzeigers M um die Minutenwelle m rotiren zu lassen, ist er mit einer um m drehbaren Hülse h verbunden, die zugleich ein Rad, das Stundenrad R, trägt in Eingriff mit dem kleinen Rade r auf der Vorgelegewelle v; letztere erhält ihre Bewegung von der Minutenwelle aus durch die Räder R_1 und r_1, welche gewöhnlich einander gleich gemacht werden, so dass R dann 12mal so viel Zähne haben muss, wie r, z. B. R_1 und r_1 je 36 Zähne, R und r bezw. 72 und 6 Zähne. Die Theilung der Räder R und r muss dann nur im Verhältnisse

Fig. 166.

$$\frac{36+36}{72+6} = \frac{12}{13}$$

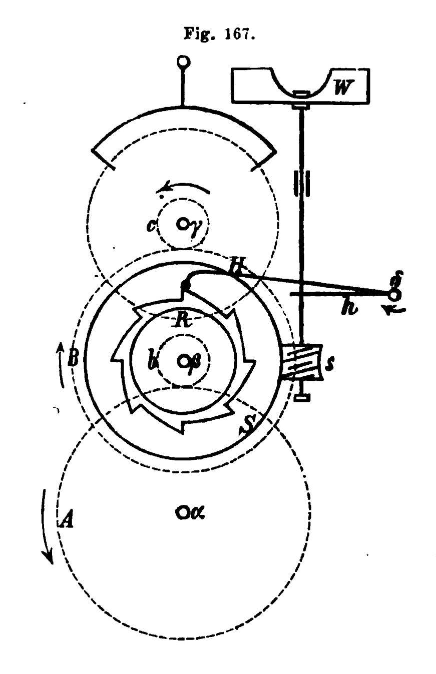
kleiner sein, als die von R_1 und r_1. Die Theilungen würden gleich, wenn bei 72 und 6 Zähnen von R und r die Räder R_1 und r_1 je 39 Zähne erhielten, doch pflegt man jene Zahnzahlen von grösserer Theilbarkeit vorzuziehen.

Um den Stundenzeiger leicht in die richtige Lage zum Minutenzeiger bringen zu können, wird er mit der Hülse h nicht fest, sondern vermittels einer Klemme verbunden, die mit entsprechender Reibung um jene Hülse gedreht werden kann. —

Abgesehen von der durch Fig. 166 angedeuteten Bewegungsübertragung vom Minuten- auf den Stundenzeiger setzen die obigen Bemerkungen bezüglich des Räderwerkes einer Uhr den gewöhnlichen Fall einer schleichenden Zeigerbewegung voraus. Wenn aber bei grösseren Uhrwerken die Zeiger eine minutenweise springende Bewegung erhalten sollen, in welchem Falle durch einen gleichfalls minutenweise neu aufzuziehenden Hülfsmotor (§. 154) der beständige Antrieb auf das Steigrad auszuüben ist, so erhält das Uhrwerk eine abweichende Einrichtung, zu deren Erklärung die Thurmuhr der Kreuzkirche zu Hannover* mit Bezugnahme auf Fig. 167 als Beispiel diene.

Hier ist α die horizontale Welle des Haupttriebrades A, angeregt zur Drehung im Sinne des Pfeils durch ein Triebgewicht mit zugehöriger Trommel. Indem aber das Rad A in das Trieb b auf der Welle β und das auf letzterer gleichfalls fest sitzende Schneckenrad S in die Schnecke s auf der verticalen Welle des Windfanges W eingreift, wird die Bewegung der genannten Theile in der Zwischenzeit zwischen zwei vollen Minuten dadurch verhindert, dass ein Ansatz der Windfangwelle von einer Umbiegung am Ende des Arms h aufgehalten wird, welcher rechtwinklig an der horizontalen Welle δ befestigt ist. Die mit ihrem äusseren Ende an der Innenwand eines Federhauses befestigte Hülfsfeder ist mit ihrem inneren Ende fest an der Welle β, indem sie diese in Windungen so umgiebt, dass dadurch das Federhaus zu relativer Drehung um β in demselben Sinne (des Pfeils B) angetrieben wird, in welchem die Welle β selbst nach Auslösung der vorbemerkten Hemmung des Windfanges durch die Haupttriebkraft gedreht wird. Mit dem Federhause fest verbunden ist das Rad B, eingreifend in das Trieb c auf der Steigradwelle γ, und ausserdem das nach Art eines Klinkrades gestaltete Auslösungsrad R,

Fig. 167.



* Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, §. 25.

auf dessen schrägen Zahnflächen der an der Welle δ sitzende Auslösungshebel H mit seinem Ende aufliegt. Nun sind die Zahnzahl $= n$ dieses Rades R, sowie die Zahnzahlen der Räder B, c und des Steigrades so gewählt, dass R in einer Minute $\frac{1}{n}$ Umdrehung um β macht, und indem dann je zu Ende einer Minute die Endkante des Hebels H von einer Zahnkante des Rades R fast erreicht ist, wurde dadurch die Welle δ im Sinne des beigesetzten Pfeils so weit gedreht, dass der Hemmungshebel h den Windfang W und damit die Wellen β, α frei giebt. Indem dieselben in Bewegung gerathen, während R seine langsamere Drehung unter dem durch das Pendel regulirten Einflusse der Hülfsfeder fortsetzt, fällt die Angriffskante des Hebels H in die folgende Zahnlücke des Rades R herunter, bevor noch W eine volle Umdrehung gemacht hat; dadurch wird δ in solchem Sinne zurückgedreht, dass der Windfang nach vollendeter Umdrehung wieder aufgehalten wird, somit auch die Wellen β und α wieder in Ruhe kommen. Weil aber das Umsetzungsverhältniss vom Schneckenrade S zur (mehrgängigen) Schnecke s so gewählt ist, dass eine Umdrehung des Windflügels $\frac{1}{n}$ Umdrehung von β entspricht, so wird durch letztere die Hülfsfeder um ebenso viel stärker zusammengewunden, wie sie in der vorigen Minute sich aufgewunden hatte. Während jener $\frac{1}{n}$ Drehung von β musste der Minutenzeiger $\frac{1}{60}$ Umdrehung machen; er kann also, wenn die Zahnzahlen der Räder b und A bezw. $= z$ und Z so gewählt werden, dass $\frac{1}{n}\frac{z}{Z} = \frac{1}{60}$ ist, unmittelbar mit der Welle α verbunden werden.

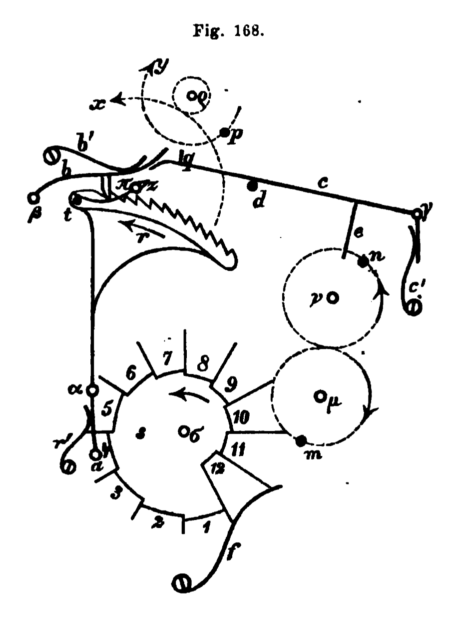
§. 156. **Schlagwerke.**

Die Schlagwerke der Uhren, welche dazu dienen, den Ablauf gewisser Zeitabschnitte (voller, halber, Viertel-Stunden) durch Schläge eines Hammers gegen eine Glocke oder einen sonstigen dadurch zum Tönen zu bringenden Körper hörbar zu machen, pflegen in zweierlei Formen ausgeführt zu werden: mit Rechen und Staffel oder mit Schlossrad und Falle.

Die wesentliche Einrichtung eines Stunden-Schlagwerkes mit Rechen und Staffel zeigt Fig. 168. Der Rechen ist ein verzahntes Segment r, drehbar um die Axe a, mit welcher ausserdem vermittels

eines dem Zahnsegmente r gegenüberliegenden kürzeren Armes $\alpha\alpha$ ein Stift a verbunden ist, dessen Bestimmung sich weiterhin ergeben wird. Eine gegen den Arm $\alpha\alpha$ wirkende Feder r' strebt den Rechen im Sinne des Pfeiles r zu drehen; doch wird in dem durch die Figur dargestellten Ruhezustande des Schlagwerkes jene Drehung durch eine Sperrklinke verhindert, welche sich an dem um β drehbaren und durch eine Feder b' gegen den Rechen hin gedrückten Hebel b befindet. Fragliche Drehung kann nur stattfinden, nachdem zuvor die Sperrklinke aus der betreffenden Zahnlücke herausgehoben wurde dadurch, dass gegen den Hebel b das Ende eines um γ drehbaren Hebels c drückt, welcher durch den Druck einer Feder c' gegen den Anschlagstift d anliegt, aber von demselben kurz vor Ablauf einer Stunde vermittels des Seitenarmes e entfernt wird. Dies geschieht durch einen Stift n, welcher, seitlich von einem Zahnrade hervorragend, mit diesem um die Axe ν stündlich eine Umdrehung macht, indem jenes Rad mit einem gleichen Rade auf der Minutenwelle μ in Eingriff ist; letzteres trägt gleichfalls einen seitlich hervorragenden Stift m von weiterhin zu erklärender Bestimmung. Zwischen ihm und dem Stifte a befindet sich die Staffel s, eine schneckenförmig mit 12 Stufen, gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechend, versehene Scheibe, welche um die Axe σ im Sinne des Pfeils, nämlich in solchem Sinne drehbar ist, dass die mit 1, 2, 3 . . . 12 bezeichneten Stufen in dieser Reihenfolge dem Stifte a gegenüber zu liegen kommen. Diese Drehung, und zwar jeweils um $^1/_{12}$ Umdrehung, wird durch einen auf der Axe σ sitzenden Stern vermittelt, von dessen 12 Strahlen, bezw. spitzen Zähnen immer einer kurz vor Ablauf einer Stunde von dem Stifte m getroffen wird, während in der Zwischenzeit zwei benachbarte dieser Strahlen die Arretirung der Scheibe in ihrer augenblicklichen Lage durch die Feder f vermitteln.

Fig. 168.



Noch bleibt anzuführen, dass das Schlagwerk seinen besonderen Motor

besitzt, und dass von dem mit der Gewichtstrommel bezw. dem Federhause verbundenen betreffenden Triebrade mehrere Wellen der Reihe nach mit wachsenden Geschwindigkeiten in Umdrehung versetzt werden können, indem jede derselben ein kleines und ein grösseres Zahnrad trägt, von denen jenes die Bewegung empfängt, dieses sie weiter fortpflanzt. Drei aufeinander folgende dieser Wellen heissen die Hebnägelradwelle, die Schöpfradwelle und die Anlaufradwelle. Auf der erstgenannten sitzt das Hebnägelrad, ausgerüstet mit einer gewissen Zahl von gleichmässig am Umfange vertheilt seitlich hervorstehenden Stiften (Hebnägeln), durch welche entgegen dem Drucke einer Feder der Hammer gehoben wird, welcher zurückschnellend den tonerzeugenden Schlag ausübt. Die Lage der folgenden Welle (Schöpfradwelle) ist in der Figur durch den Buchstaben π bezeichnet; sie wird durch den Motor des Schlagwerkes zur Drehung im Sinne des Pfeils x angeregt und trägt einen Arm, den sogenannten Schöpfer, der nach zwei entgegengesetzten Seiten von der Welle π hervorragt. Die kürzere Hervorragung bildet einen Zahn z, welcher bei der Rotation des Schöpfers im Sinne des Pfeils x durch seinen periodischen Eingriff in eine Zahnlücke des Rechens diesen im entgegengesetzten Sinne des Pfeils r bewegt; in der Zwischenzeit zwischen zwei vollen Stunden wird jedoch jene Rotation des Schöpfers und damit überhaupt die Bewegung aller Theile des Schlagwerkes dadurch verhindert, dass sich der Rechen in seiner durch Fig. 168 dargestellten äussersten Lage rechts befindet, in welcher der von ihm hervorstehende Anschlagstift t den dem Zahne z gegenüberliegenden längeren Hebelarm des Schöpfers aufhält. Die Anlaufradwelle, in der Figur mit ϱ bezeichnet, wird von dem auf der Welle π sitzenden Schöpfrade bei ungehemmtem Schlagwerke im Sinne des Pfeils y gedreht; sie trägt ein Rad, das Anlaufrad, mit einem seitlich hervorragenden Stifte p, welcher gegen den Ansatz q des Auslösungshebels c treffen kann, wenn dieser durch den Stift n gehoben ist. Dasselbe Anlaufrad setzt mit abermals vergrösserter Winkelgeschwindigkeit eine letzte Welle mit einem Windflügel in Rotation, der dazu dient, eine allzu beschleunigte Bewegung des ausgelösten Schlagwerkes zu hindern, namentlich also die Zeiten zwischen den aufeinander folgenden Hammerschlägen annähernd gleich zu machen.

Der Vorgang ist nun folgender. Einige Zeit vor dem Ablauf der $n$ten Stunde, bevor also der Hammer zu n Schlägen veranlasst werden soll, trifft der mit der Minutenwelle μ rotirende Stift m gegen einen Strahl des Staffelsterns und ertheilt der Staffel eine solche Zwölfteldrehung, dass ihre $n$te Stufe dem Stifte a gegenüber zu liegen kommt.

Kurze Zeit nachher trifft auch der Stift *n* gegen den Arm *e* des Auslösungshebels und hebt durch diesen zugleich den Sperrhebel *b*. Sobald dann die an letzterem sitzende Sperrklinke die betreffende Zahnlücke des Rechens verlassen hat, kann dieser dem Drucke seiner Feder *r'* nachgebend sich im Sinne des Pfeils *r* um *α* drehen so lange, bis der Stift *a* gegen jene *n* te Stufe der Staffel trifft, was einen der Stellenzahl *n* dieser Stufe proportionalen, nämlich *n* Zähnen des Rechens entsprechenden Drehungswinkel desselben erfordert. In Folge dieser Bewegung ist der Schöpfer von dem Aufhaltungsstifte *t* abgeschnappt und es setzt sich der ganze Mechanismus des Schlagwerkes in Bewegung, vorläufig jedoch nur so lange, bis der Stift *p* des Anlaufrades gegen den Ansatz *q* des gehobenen Auslösungshebels trifft und damit die Hemmung des Schlagwerkes auf's Neue herbeiführt. Indem das spätestens nach einer ganzen Umdrehung des Anlaufrades der Fall sein musste, konnte sich unterdessen der Schöpfer nur um einen kleinen Theil einer Umdrehung bewegen, entsprechend dem Umsetzungsverhältnisse von seiner Welle *π* zur Anlaufwelle *ϱ*; eine noch kleinere Drehung macht dann das vorhergehende Hebnägelrad, so dass eine Hammererhebung durch einen Hebnagel unterdessen nicht zu Stande kommen konnte. Jetzt befindet sich das Werk im Zustande der Vorbereitung, bis möglichst genau zu Ende der betreffenden *n* ten Stunde der Stift *n* den Hebelarm *e* wieder frei giebt. Sobald das geschehen ist, fallen die Hebel *c* und *b*, ihren Federn *c'* und *b'* nachgebend, zurück, bis *c* vom Stifte *d*, der Hebel *b* durch seine Sperrklinke vom Rechen aufgehalten wird. Indem aber der Anlaufstift *p* jetzt frei geworden ist, gelangt das Uhrwerk in ungehinderte Bewegung, bei welcher der Zahn *z* des Schöpfers für jede Umdrehung des letzteren einmal in eine Zahnlücke des Rechens einfällt und diesen um einen Zahn entgegen dem Sinne des Pfeils *r* bewegt. Die Sperrklinke des Hebels *b* hindert diese Bewegung des Rechens nicht, indem sie auf den schrägen Zahnflächen desselben gleitet; jedoch dauert die Bewegung nur so lange, bis der längere Arm des Schöpfers vom Anschlagstifte *t* des Rechens wieder aufgehalten wird, was nach *n* Umdrehungen des Schöpfers der Fall ist. Nun ist die Zahl der Hebnägel ebenso gross wie das Verhältniss gleichzeitiger Winkelwege der Schöpfradwelle und der Hebnägelradwelle, so dass bei jeder Umdrehung der ersteren das Hebelnägelrad um einen Hebnagel fortrückt, durch diesen also ein Hammerschlag vermittelt wird, entsprechend im vorliegenden Falle *n* Hammerschlägen bis zur Hemmung des Schlagwerkes.

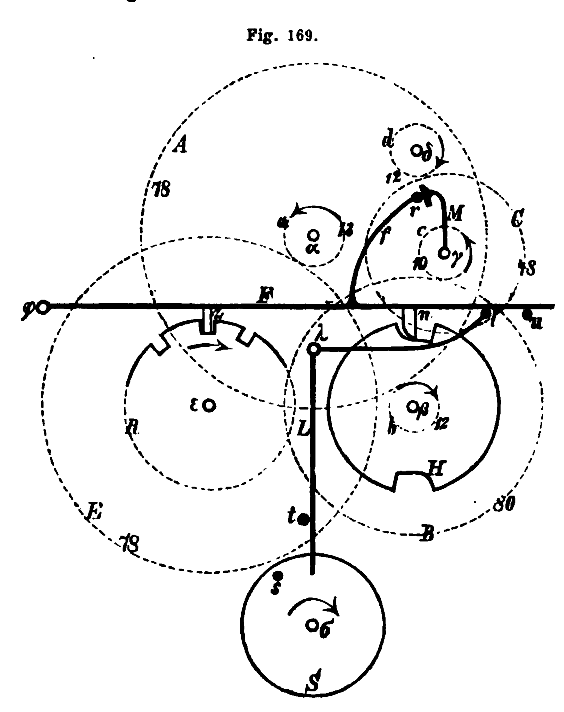
Wenn man zu einer beliebigen Zeit nach dem Ablauf der *n* ten Stunde



und bevor noch die Vorbereitung des Schlagwerkes für die folgende $(n+1)$te Stunde erfolgt ist, während also der Stift *a* des Rechens noch der *n*ten Staffelstufe gegenüber liegt, den Hebel *c* willkürlich von seinem Anschlagstifte *d* entfernt und wieder zurückfallen lässt, so erfolgen natürlich die *n* Hammerschläge auch und lassen sie sich so oft wiederholen, als man auf's Neue den Hebel *c* vom Stifte *d* entfernt und so lange der Motor des Schlagwerkes noch nicht abgelaufen ist. Hierauf beruht die Einrichtung sogenannter Repetiruhren, bei welchen die Auslösung überhaupt nur willkürlich, nicht zugleich durch den mit dem Uhrwerke beweglichen Stift *n* bewirkt wird. —

Schlagwerke mit Schlossrad und Falle finden vorzugsweise bei grösseren Uhrwerken (für öffentliche Gebäude) sowie auch bei den billigen Schwarzwälder Uhren Anwendung. In Einzelheiten zeigen sie mancherlei Unterschiede; im Princip werde ihre Einrichtung durch Fig. 169 erläutert, entsprechend einem Modell der polytechnischen Schule in Karlsruhe. Uebrigens ist ihre Wirkungsweise derjenigen des eingehend beschriebenen Schlagwerkes mit Rechen und Staffel in so vielen Beziehungen analog, dass hier eine kürzer gefasste Erläuterung genügen wird.

Fig. 169.



Bei dem fraglichen Modell eines Stundenschlagwerkes ist der Motor eine Spiralfeder; mit ihrem Federhause, drehbar um die Welle *α*, ist das Hebnägelrad *A* und ein Trieb *a* fest verbunden. Letzteres ist in Eingriff mit dem Schlossrade *E*, auf derselben Axe *ε* sitzend wie die Schlossscheibe *R*. Diese ist am Umfange mit 12 Einschnitten versehen, deren Entfernungen von Mitte zu Mitte sich wie 1 : 2 : 3 : … 11 : 12 ver-

halten, welche also wegen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 11 + 12 = (1 + 12)\frac{12}{2} = 78$$

bezw. $^1/_{78}$, $^2/_{78}$ ⋯ $^{12}/_{78}$ des Umfanges betragen; indem aber die Einschnitte selbst über je $^1/_{78}$ des Umfanges sich erstrecken, sind diejenigen zwei derselben, deren Mittelpunktsentfernung auch nur ebensoviel beträgt, zu einem einzigen Einschnitte von doppelter Breite vereinigt. Das Hebnägelrad A greift in das Trieb b, welches mit dem Fallenrade B und der Hebescheibe H auf der Axe β sitzt; jene Scheibe hat zwei diametral gegenüber liegende Ausschnitte, die an den bei der Bewegung hinteren Seiten abgerundet sind. B ist in Eingriff mit dem Triebe c, mit dem Anlaufrade C auf der Welle γ sitzend, womit zugleich der Anlaufarm M fest verbunden ist; C endlich greift in ein Trieb d der Windflügelwelle δ. Die Zahnzahlen der verschiedenen Räder sind ihren Theilkreisen beigeschrieben; die Zahl der Hebnägel ist $= 13$. Ferner ist S die sogenannte Stundenscheibe, welche den Auslösungsstift s trägt und sich stündlich einmal um ihre Axe σ dreht. L ist der Auslösungshebel, um λ drehbar, mit dem einen Hebelarme so weit bis vor die Stundenscheibe reichend, dass er eben vom Auslösungsstifte s getroffen werden kann, am Ende des anderen Armes selbst einen Stift l tragend. F ist die sogenannte Falle, ein um φ drehbarer Hebel mit dem Zahne z und der Nase n, von welchen im Ruhezustande des Schlagwerkes, wobei F auf dem Stifte u ruht, jener in einen Einschnitt der Schlossscheibe R, diese in einen der beiden Ausschnitte der Hebescheibe H hineinreicht. Ausserdem ist die Falle mit einem Arm f versehen, dessen Stift r den Anlaufarm M aufhält und dadurch das Schlagwerk hemmt bis nach Verlauf von je einer Stunde s gegen L trifft. Dann wird L so gedreht, dass durch den Stift l die Falle F gehoben wird; M wird dadurch frei und macht eine halbe Umdrehung bis zum Anprall gegen l. Die dieser halben Umdrehung von M entsprechende $^1/_{16}$ Umdrehung von H reicht gerade hin, um vermittels der Nase n die Falle F vollends so weit zu heben, dass jetzt n auf dem Umfange von H aufliegt und auch z den Einschnitt von R verlassen hat; der Spielraum von z in diesem Einschnitte liess schon vorher die entsprechende kleine Drehung von R zu, die den beigeschriebenen Zahnzahlen gemäss für die $^1/_{16}$ Drehung von H nur

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{12}{78} \cdot \frac{13}{78} = \frac{1}{624}$$

einer ganzen Umdrehung betrug.

Jetzt befindet sich das Schlagwerk im Zustande der Vorbereitung bis s von L abschnappt, dadurch L bis zum Anschlage an den Stift t zurückfällt, M wieder frei wird und das Schlagwerk in jetzt länger dauernde Bewegung kommt, da das Zurückfallen von n in den anderen Ausschnitt der Hebescheibe H nach einer halben Umdrehung der letzteren vorläufig durch das Aufliegen des Zahnes z auf R unmöglich gemacht ist ausser wenn sich z über dem oben erwähnten Einschnitte der Schlossscheibe von doppelter Breite befindet. Indem dann aber gerade nur ein Glockenschlag erfolgen sollte, war schon durch die halbe Umdrehung von H, welcher $\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{78} = \frac{1}{13}$ Umdrehung des Hebnägelrades entspricht, gerade Zeit dazu gewesen. In anderen Fällen kann man bemerken, dass für jeden Glockenschlag die Welle α mit dem Hebnägelrade $^1/_{13}$ Umdrehung, also die Welle ε mit der Schlossscheibe $\frac{1}{13} \cdot \frac{13}{78} = \frac{1}{78}$ Umdrehung macht, so dass, wenn dann z auf dem Umfangstheile von R gleitet, welcher von Mitte zu Mitte der benachbarten Einschnitte gerechnet $\frac{n}{78}$ des Umfanges beträgt, erst nach n Glockenschlägen das Zurückfallen von z in den folgenden Einschnitt stattfindet, sobald auch die Nase n wieder über einem Einschnitte von H steht. Die Hemmung erfolgt dann unmittelbar danach durch den Anprall von M gegen r, und zwar ist M so auf der Welle γ befestigt, dass in diesem Augenblicke die Nase n dicht an dem hinteren abgerundeten Ende eines Ausschnittes von H sich befindet.

Das hier als Modell beschriebene Schlagwerk eignet sich zur Ausführung in grossen Verhältnissen, nur würde es dann vorzuziehen sein, das Federhaus um ε drehbar zu machen, also mit dem Schlossrade E fest zu verbinden, um die entsprechend stärker zu machende Triebfeder oder ein an ihrer Stelle zu benutzendes Gewicht mit Trommel weniger schnell ablaufen zu lassen. Das Schlagwerk einer Schwarzwälder Uhr hat im Wesentlichen dieselben Theile, wie das hier beschriebene, nur der leichten Ausführung entsprechend von anderer Form; insbesondere wird die Schlossscheibe durch seitliche Hervorragungen am Umfange des als Triebrad dienenden Schlossrades ersetzt und erhält die Scheibe H mit der Nase n der Falle lediglich die Function eines Gesperres, indem die Erhebung der Falle hier vollständig durch den Auslösungshebel bewirkt wird.

Wenn auch die halben Stunden durch je einen einzelnen Glocken-

schlag angezeigt werden sollen, so kann natürlich die Einrichtung gerade so getroffen werden, als ob es sich um die Folge 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1 ... von Stunden handelte, indem zugleich die Stundenscheibe S durch eine Halbstundenscheibe oder der einzelne Stift s durch ein Paar von solchen diametral gegenüber sitzenden Stiften ersetzt wird. Wenn aber, wie es bei grossen Uhrwerken üblich ist, die Viertelstunden durch 1, 2, 3, 4 Schläge, letztere unmittelbar vor den Stundenschlägen angezeigt werden sollen, und zwar mit Glocken von anderem Ton, so ist ausser dem Stundenschlagwerke ein besonderes Viertelstundenwerk anzuordnen, das übrigens auf denselben Principien beruht wie jenes.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass dergleichen Schlagwerke mit Schlossrad und Falle sich offenbar nicht als Repetirwerke eignen. Denn bei willkürlicher Auslösung der Falle des Stundenschlagwerkes, Fig. 169, können nach den zuletzt erfolgten n Schlägen immer nur $n + 1$, darauf $n + 2$ Schläge u. s. f. stattfinden, auf 12 Schläge einer. Der wesentliche Unterschied von einem Schlagwerke mit Rechen und Staffel besteht eben darin, dass bei letzterem die Lage der Staffel, welche die Zahl der Schläge bedingt, durch das Stattfinden dieser Schläge nicht verändert wird, wie es dagegen bezüglich des der Staffel analogen Schlossrades thatsächlich der Fall ist.

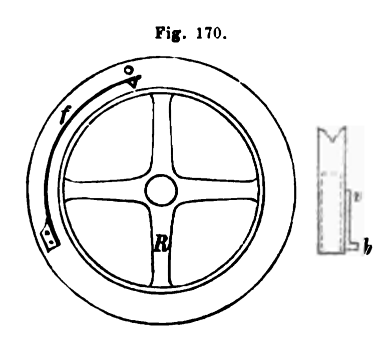
§. 157. Registrirwerke.

Während die in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Zeiger- und Schlagwerke die Zeit nur momentan für das Auge oder Ohr wahrnehmbar machen, kann es in manchen Fällen von Interesse sein, die Zeiten dauernd behufs beliebig späterer Ablesung zu registriren, zu welchen gewisse Ereignisse stattgefunden haben. Die Einrichtung solcher Registrirwerke kann sehr mannigfaltig sein je nach der Art der zu registrirenden Ereignisse, und sei hier nur als Beispiel von technischem Interesse der Wächter-Controluhren gedacht, welche dazu dienen, die Pünktlichkeit der Pflichterfüllung von Nachtwächtern in technischen Anlagen zu controliren. Selbst zu diesem besonderen Zwecke sind mancherlei verschiedene Vorrichtungen angegeben und mehr oder weniger benutzt worden; von denselben hat in Deutschland die Controluhr des Uhrmachers Bürk in Schwenningen (Württemberg) wegen ihrer Einfachheit unbeschadet ihrer Sicherheit mit Recht Anerkennung und Verbreitung gefunden. Ihre Einrichtung ist in der Hauptsache folgende.



In einem cylindrischen Gehäuse befindet sich zunächst am Boden ein gewöhnliches Uhrwerk, dessen Centralwelle aber nicht der Bewegung eines Minuten-, sondern der eines Stundenzeigers entspricht, also in 12 Stunden eine Umdrehung macht. Auf ihrer Verlängerung in der oberen, durch einen Deckel verschlossenen Abtheilung des Gehäuses trägt diese Welle mittels entsprechender Arme einen Ring *R*, Fig. 170, ähnlich einer Riemenrolle, nur nicht gewölbt, sondern mit cylindrischer Umfläche. Dieser Ring wird täglich vor der Wache von dem Controleur mit einem Papierstreifen (Länge = Umfang, Breite = Breite des Ringes) bespannt, welcher durch gerade Linien der Läge nach in $6 \cdot 12 = 72$ Felder, den $^1/_6$ Stunden entsprechend, der Breite nach in *n* Felder getheilt ist = der Zahl der zu besuchenden *n* Stationen.

Fig. 170.



Den letzteren Feldern bezw. ringsum laufenden schmalen Flächenstreifen gegenüber liegen zwischen dem Ringe und der Wand des Gehäuses *n* Federn *f*, an ihren freien Enden mit Spitzen ausgerüstet, die dem Ringe zugekehrt sind; diese Spitzen, denen gegenüber der Ring an seiner Umfläche mit *n* ringsumlaufenden Rillen versehen ist, verursachen kleine Löcher in dem Papier, wenn die Federenden durch entsprechende Schlüssel gegen den Ring gedrückt werden. Solcher Schlüssel befinden sich an jeder Station einer, an einer Kette angeschlossen, und zwar von solcher Beschaffenheit, dass jeder Stationsschlüssel seinen Bart an derjenigen Stelle hat, welche der betreffenden Stationsfeder der Controluhr entspricht, wenn der Schlüssel mit seinem Rohr soweit es angeht auf den Dorn geschoben wird, der als Schlüsselführung zwischen den Federn und der Wand des Gehäuses angebracht ist. Ein seitlicher Schlitz des Schlüsselloches im Gehäusedeckel und entsprechende Vorsprünge aussen an den Schlüsselrohren zwingen den Wächter zum vollständigen Aufschieben des Schlüssels auf den Dorn, damit eine Drehung möglich werde, und verhindern so die Möglichkeit, mit einem bestimmten Schlüssel andere Federn zu biegen ausser derjenigen, welche ihm und also der betreffenden Station zukommt. Die betreffende Einrichtung eines solchen Schlüsselrohrs lässt die Nebenfigur 170 erkennen beispielsweise für den zur untersten Feder gehörigen Schlüssel, dessen Bart *b* somit ganz am Ende des fraglichen Vorsprunges *v* sich befindet.

III. Instrumente zur Messung von Geschwindigkeiten. (Tachometer.)

§. 158. Uebersicht.

Die Instrumente zur Messung von Geschwindigkeiten, welch letztere dabei immer als relative Geschwindigkeiten in Betracht kommen, sind hauptsächlich verschieden, jenachdem es sich um die relative Geschwindigkeit von zwei festen Körpern oder eines festen Körpers und einer Flüssigkeit handelt. Der erstere Fall interessirt hier nur bezüglich der relativen Geschwindigkeit von Theilen einer Maschine, indem darauf auch andere hierher gehörige Fälle von technischer Wichtigkeit zurückgeführt werden können. So ist die relative Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges gegen die Schienenbahn bestimmt durch die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die auf letzterer ohne Gleitung rollenden Locomotiv- oder Wagenräder sich um ihre Axen relativ gegen den Rahmen der Locomotive bezw. des Wagens drehen, oder durch die relative Geschwindigkeit der Kolben gegen die mit dem Locomotivrahmen fest verbundenen Cylinder.

Die relative Geschwindigkeit von festen Körpern und Flüssigkeiten hat technisches Interesse nicht nur bezüglich der strömenden Bewegung von Flüssigkeiten gegen die Erde oder gegen feste Leitungswände, insbesondere der strömenden Bewegung des Wassers in Fluss- und Canalbetten, der freien Luft als Wind, der Verbrennungsluft bei Feuerungsanlagen u. s. f., sondern auch bezüglich der relativen Bewegung von Schiffen, wenigstens von Seeschiffen, gegen das Wasser. Die letztere relative Bewegung kann deshalb nicht, wie die eines Eisenbahnzuges gegen die Schienenbahn, auf die gegenseitige Bewegung von Maschinentheilen zurückgeführt werden, weil die Bewegung des Schiffspropellers (Schaufelrad, Schraube) gegen das Wasser nicht ebenso einfach und a priori bekannt ist wie die rollende Bewegung der Räder auf den Schienen.

Hiernach sollen im Folgenden besprochen werden:

a. Tachometer für Maschinen,

b. Instrumente zur Messung der relativen Geschwindigkeit von festen Körpern und Flüssigkeiten, insbesondere Instrumente



zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in Canälen (Strommesser im engeren Sinne), zur Messung der Luftgeschwindigkeit (Anemometer) und zur Messung der Schiffsgeschwindigkeit auf See.

In allen Fällen können die Instrumente bezw. die Messungsmethoden mit denselben entweder so beschaffen sein, dass sie die augenblicklich stattfindende Geschwindigkeit, oder so, dass sie die mittlere Geschwindigkeit für ein gewisses Zeitintervall bezw. für einen gewissen Weg erkennen lassen, wonach momentan wirkende und totalisirende Instrumente zu unterscheiden sind, sofern sich im letztern Falle das Gesammtresultat einer Reihenfolge von Geschwindigkeiten ergiebt. Je nach den Umständen kann jene oder diese Messungsweise vorzuziehen sein, so dass in dieser Hinsicht solche Instrumente als die vollkommensten erscheinen, welche sowohl eine momentane, als eine totalisirende Messung gestatten, wie es dann der Fall ist, wenn die betreffende Folge von Geschwindigkeiten durch eine Curve verzeichnet wird, deren Abscissen den verflossenen Zeiten oder durchlaufenen Wegen und deren Ordinaten den betreffenden Geschwindigkeiten proportional sind.

a. Tachometer für Maschinen.

§. 159. Totalisirende Tachometer.

Um die mittlere Geschwindigkeit eines rotirenden oder schwingenden Maschinentheiles für einen Zeitraum zu messen, in welchem eine grössere Zahl von Rotationen bezw. Schwingungen stattfindet, bedarf es natürlich nur eines Zählwerkes (§. 130) in Verbindung mit einer Uhr. Gewöhnlich enthält die Maschine eine rotirende Welle A, deren Winkelgeschwindigkeit die Ganggeschwindigkeit der Maschine charakterisirt, und wenn dann von A aus durch Zahnräder- oder Schneckengetriebe oder auf sonstige Weise eine andere Welle B bewegt wird, deren Winkelgeschwindigkeit zu der von A in constantem Verhältnisse steht, von B aus aber ein prismatisch geführtes Glied C so bewegt wird, dass seine Progressivgeschwindigkeit der Winkelgeschwindigkeit von B und folglich auch von A in bekanntem Verhältnisse proportional ist, so kann man mit C einen Zeichenstift S verbinden und längs demselben nach einer zu seiner Bewegungsrichtung OS senkrechten Richtung OT durch das Uhrwerk einen Papierstreifen mit gleichförmiger Bewegung fortziehen lassen, um so auf diesem als relative Bahn von S eine Curve zu erhalten,



deren entsprechende Coordinatenänderungen Δs und Δt den Winkelweg der Welle A in einer gewissen Zeit und somit ihre mittlere Winkelgeschwindigkeit für dieselbe ergeben. Anstatt des geradlinig bewegten Papierstreifens kann auch mit Vortheil für die compendiöse Ausführung des Instrumentes eine runde Metallscheibe, auf welcher eine entsprechende Papierscheibe centrisch zu befestigen ist, vom Uhrwerke aus gleichförmig um ihre Axe gedreht werden, und wenn dann S in radialer Richtung längs derselben geführt wird, so liefert das Verhältniss des Weges Δs von S zu dem gleichzeitigen Winkelwege $\Delta \varphi$ der Scheibe ein Maass für die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Welle A während der betreffenden Zeit. Um für eine längere Zeit andauernde Messung den Zeichenstift S seinen hinlänglich grossen Weg innerhalb einer Strecke von mässiger Länge durchlaufen zu lassen, ist es passend, ihn durch ein Curvenschubgetriebe von der Welle B aus geradlinig so hin und her zu führen, dass er (unbeschadet beständiger Proportionalität seines Weges und des Winkelweges von B) abwechselungsweise für eine halbe Umdrehung von B im einen, für die folgende halbe Umdrehung im anderen Sinne bewegt wird.

Von solcher Art ist z. B. der Geschwindigkeitsmesser für Eisenbahnfahrzeuge von Dorpmüller.* Dabei wird die Bewegung von einer Fahrzeugaxe aus auf die erste Welle des Instruments durch eine Kautschukschnur und von dieser durch dreifaches Schneckengetriebe auf die letzte Welle B desselben so übertragen, dass B eine Umdrehung macht, während sich der Radumfang auf einer Strecke = 6 Kilometer der Schienenbahn abwälzt. In derselben Zeit bewegt sich der Schreibstift S radial längs der Papierscheibe von 300 Millimeter Durchmesser nahe ihrer Peripherie um eine Strecke von 50 Millimeter einmal hin und her. Erfolgt dann eine Umdrehung der Scheibe etwa in 6 Stunden, so kann das Instrument selbst für noch längere Zeit ohne Erneuerung der Papierscheibe functioniren, sofern nicht zufällig in den ersten 6 Stunden die durchfahrene Strecke gerade ein ganzes Vielfaches von 6 Kilometern beträgt, in welchem Falle die zickzackförmige relative Bahn von S für die folgenden 6 Stunden, von demselben Anfangspunkte ausgehend, von der früheren vielleicht nicht genügend zu unterscheiden wäre, obschon das wegen verschieden lange dauernder und in verschiedenen Zeitintervallen eintretender Stationsaufenthalte (welchen auf dem Papierstreifen geradlinige, auf der Papierscheibe kreisförmige Curven-

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1879, S. 364.



stücke entsprechen) selbst bei übrigens nahe gleicher Fahrtgeschwindigkeit nicht zu erwarten ist.

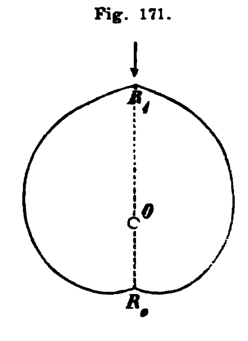


Fig. 171.

Wenn die auf der Welle B sitzende Curvenscheibe gegen eine Angriffskante des von einer Feder beständig gegen die Scheibe angedrückten Stiftträgers C wirkt (nach Art des Curvenschubgetriebes Fig. 72, S. 199, mit den Gliedern a, c, d), so muss natürlich die Scheibe nach zwei symmetrisch liegenden archimedischen Spiralen profilirt werden mit den Polargleichungen:

$$r = r_0 + h\frac{\varphi}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

unter r_0 den willkürlich anzunehmenden Minimalwerth des Fahrstrahles r und unter h die verlangte Schublänge des Stiftes S verstanden. Siehe Fig. 171, wo $OR_0 = r_0 = h$ genommen ist, also $OR_1 = r_0 + h = 2h$.

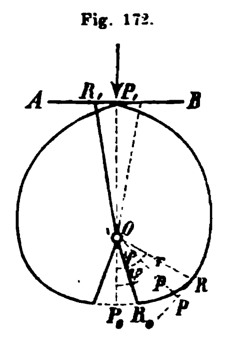


Fig. 172.

Soll aber wegen zu schneller Abnutzung einer Angriffskante des Stiftträgers C dieselbe durch eine zur Schubrichtung von C senkrechte ebene Angriffsfläche AB, Fig. 172, ersetzt werden, so können die zwei symmetrisch gleichen Curven $R_0 R_1$ nicht eine Fläche umschliessen, muss also die einzige Herzscheibe des vorigen Falles durch zwei Scheiben ersetzt werden, von denen die eine die Bewegung von C im einen, die andere im umgekehrten Sinne vermittelt. Was die Form der Profile $R_0 R_1$ dieser Scheiben betrifft, so sei $OR = r$ irgend ein Fahrstrahl, $OP = p$ das vom Drehungsmittelpunkte O auf die Tangente für den Punkt R gefällte Perpendikel, $P_0 P_1$ die den Punkt O enthaltende gerade Verbindungslinie der Lagen des Punktes P, welche den äussersten Lagen R_0, R_1 des Punktes R entsprechen, ferner der Winkel $P_0 OR = \varphi$, Winkel $P_0 OP = \psi$. Während dann im Falle von Fig. 171 der Differentialquotient $\frac{dr}{d\varphi}$ einen constanten Werth haben musste, muss hier $\frac{dp}{d\psi}$ eine Constante, folglich

$$p = p_0 + h\frac{\psi}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sein, wenn h dieselbe Bedeutung hat wie in Gl. (1). Hiernach kann die Curve als Umhüllungslinie einer Schaar von Geraden PR verzeichnet

werden, die durch $OP = p$ und Winkel $OPR = 90^0$ für verschiedene Werthe von ψ durch Gl. (2) bestimmt sind. Uebrigens wird die Zeichnung der Curve durch die Bemerkung erleichtert, dass die Strecke PR einen constanten Werth hat. Indem nämlich

$$p = r \sin(ORP) = r \sin\tau,$$

also

$$dp = r\cos\tau\, d\tau + \sin\tau\, dr$$
$$= r\cos\tau\left(d\tau + tg\,\tau \frac{dr}{r}\right)$$

und

$$tg\,\tau = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{dr}\, d\left(\psi + \frac{\pi}{2} - \tau\right),$$

also

$$tg\,\tau \frac{dr}{r} = d\psi - d\tau$$

ist, so folgt:

$$PR = r\cos\tau = \frac{dp}{d\psi} = \frac{h}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Curve $R_0 R R_1$ wird also aus der durch Gl. (2) bestimmten archimedischen Spirale $P_0 P P_1$ dadurch abgeleitet, dass in deren Punkten P_0, P, P_1 normal zu den betreffenden Fahrstrahlen OP_0, OP, OP_1 die gleichen Strecken $P_0 R_0 = PR = P_1 R_1 = \frac{h}{\pi}$ angetragen werden. In Fig. 172 ist $OP_0 = p_0 = h$, also $OP_1 = p_0 + h = 2h$ angenommen worden.

Bei anderen solchen Fahrtmessern für Eisenbahnzüge, z. B. bei dem Instrument von Dato, ist die Einrichtung so getroffen, dass in den mit gleichförmiger und bekannter Geschwindigkeit bewegten Papierstreifen ein durch einen entsprechenden Mechanismus von der Wagenaxe aus bewegter Stift ein kleines Loch sticht, so oft ein Punkt der betreffenden Radperipherie einen gewissen Weg, z. B. 1 Kilometer durchlaufen hat. Die Entfernungen der in gerader Linie aufeinander folgenden Löcher ergeben dann unmittelbar die Zeiten, in welchen die betreffenden Kilometer von jenem Punkte durchlaufen, also auch bei gleitungslos rollender Bewegung der Räder auf den Schienen vom Zuge durchfahren wurden.

Im Falle der Verzeichnung einer zusammenhängenden Curve, wie bei dem Instrument von Dorpmüller, ergiebt zwar die Richtung ihrer Tangente im Princip auch die augenblickliche Geschwindigkeit; indessen müsste doch die Curve in unpraktisch grossen Verhältnissen gezeichnet werden, um grössere Genauigkeit auch für solche Verwendung des Instrumentes zu verbürgen, da die Richtung einer Curve in einem gewissen Punkte derselben nicht mit ebenso grosser Zuverlässigkeit gemessen werden kann wie eine Länge, z. B. eine Coordinate jenes Punktes.

§. 160. Centrifugaltachometer.

Die veränderliche Winkelgeschwindigkeit ω einer rotirenden Welle, die entweder der betreffenden Maschine selbst oder, mit proportionaler Geschwindigkeit rotirend, einem mit der Maschine verbundenen Messinstrumente angehören mag, kann dadurch bezüglich ihrer jeweiligen Grösse sichtbar gemacht und in jedem Augenblicke gemessen werden, dass man mit der Welle eine Masse rotiren lässt, deren relative Gleichgewichtslage in bekannter Weise durch ω bestimmt wird, so dass umgekehrt jene Lage, bezw. die durch dieselbe bestimmte Configuration des Mechanismus, welcher die Masse mit der Welle verbindet, einen Schluss auf die Grösse von ω gestattet. Bei den auf diesem Princip beruhenden Instrumenten befindet sich die fragliche Masse unter der Einwirkung von zwei Kräften, deren eine von ω abhängig und deren andere von ω unabhängig ist. Als erstere bietet sich am unmittelbarsten die Centrifugalkraft dar, so dass die danach als Centrifugaltachometer zu bezeichnenden betreffenden Instrumente sich hauptsächlich nur dadurch unterscheiden, dass diese Centrifugalkraft entweder mit der Schwerkraft oder mit einer Federkraft als von ω unabhängiger Kraft in Gleichgewicht gebracht, und dass als Masse selbst entweder ein fester Körper oder eine Flüssigkeit benutzt wird.

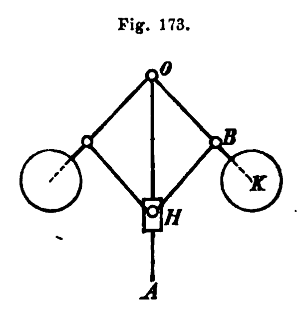
1. Die üblichen Centrifugaltachometer mit fester rotirender Masse, deren Centrifugalkraft mit der Schwerkraft im Gleichgewicht ist, beruhen auf dem Princip des conischen Pendels, nämlich eines schweren Körpers, welcher mit der in diesem Falle verticalen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Welle durch ein Charnier verbunden ist, dessen Axe OY die verticale Wellenaxe OZ rechtwinklig (in O) schneidet. Unter der Voraussetzung, dass, wenn S der Schwerpunkt des Körpers, die Masse desselben in Bezug auf die Ebenen ZOS und YOS symmetrisch vertheilt ist, besteht nämlich im Gleichgewichtszustande und abgesehen von Bewegungswiderständen nach §. 140, Gl. (5) die Beziehung:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} \quad \text{mit} \quad l = \frac{Q - q}{mr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

unter g die Beschleunigung der Schwere, α den Winkel ZOS, r die Strecke OS, m die Masse des Körpers, Q sein Trägheitsmoment für die Charnieraxe OY und unter q das Doppelte seines Trägheitsmomentes für die Ebene YOS verstanden. Wenn insbesondere, wie gewöhnlich, das Pendel aus einer cylindrischen Stange mit einer am Ende derselben befindlichen Kugel besteht, so ergiebt sich für l der Ausdruck (7) in §. 140.

Hiernach ist der Winkel α ein Maass für die Winkelgeschwindigkeit ω. Indem sich aber α bei dem rotirenden Pendel nur schätzen, nicht messen lässt, wird, um eine Messung möglich zu machen, das Pendel gemäss Fig. 173 verdoppelt und an den Kugelstangen OK vermittels der Stangen BH eine auf der rotirenden Welle OA verschiebliche Hülse aufgehängt, deren Bewegung bei Veränderung von ω durch einen geeigneten Mechanismus auf einen Zeiger oder auch auf einen Registrirapparat übertragen werden kann, dessen Bleistift z. B. eine Curve verzeichnet, deren Abscissen und Ordinaten proportional den Zeiten und den Verschiebungen der Hülse auf der Welle OA sich ändern, so dass diese Curve einen zu beliebig späterer Zeit abzulesenden Bericht erstattet über das Gesetz, nach welchem sich die Geschwindigkeit der Maschine in einem gewissen Zeitintervall unter gewissen Umständen geändert hatte. Wenn man zudem die Hülse mit verschiedenen Gewichten Q belastet, erhält man dadurch ein Mittel, das Instrument für verschiedene Geschwindigkeiten zu adjustiren, so dass es stets die nöthige Empfindlichkeit behält. Nach §. 114, Gl. (4) besteht nämlich für einen mittleren, d. h. solchen Gleichgewichtszustand, bei welchem die Reibungen weder im einen, noch im umgekehrten Sinne entwickelt sind, und wenn vorläufig von den Gewichten der Stangen abgesehen wird, die Gleichung:

Fig. 173.



$$\omega^2 = \frac{g}{h}\left(1 + \frac{a}{l}\frac{Q}{G}\right)$$

mit $OB = BH = a$, $Ok = l$ und unter Q das Gewicht nebst Belastung der Hülse, G das Gewicht einer Kugel, g die Beschleunigung der Schwere und unter h die Projection von OK auf OA verstanden. Letztere ist, wenn die Strecke OH mit x bezeichnet wird,

$$h = \frac{l}{a}\frac{x}{2}$$

und deshalb auch

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{x}\frac{a}{l}\left(1 + \frac{Qa}{Gl}\right)} = \sqrt{\frac{C}{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

d. h. ω umgekehrt proportional $\sqrt{x}$.

Diese Messung von ω durch $OH = x$ ist um so genauer, je grösser die Aenderung von x ist, welche einer gewissen Aenderung von ω ent-

spricht. Aus der Gleichung $\omega^2 x = C$ folgt aber

$$\omega^2 dx + 2\omega d\omega \cdot x = 0, \text{ also } \frac{dx}{d\omega} = -\frac{2x}{\omega} \quad \ldots \ldots . (3)$$

absolut genommen um so grösser bei gegebenem ω, je grösser x. Ist somit ω_0 der kleinste Werth einer mit dem Instrumente zu messenden Winkelgeschwindigkeit ω und x_0 der bei übrigens gegebenen Dimensionen grösstmögliche Werth von x, so ist die Belastung Q der Hülse so zu wählen, dass $x = x_0$ und $\omega = \omega_0$ entsprechende Werthe sind, also

$$Q = \left(\frac{C}{2g}\frac{l}{a} - 1\right)\frac{l}{a} G \text{ mit } C = \omega_0^2 x_0 \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Die Kugeln fangen dann erst bei $\omega > \omega_0$ an auseinander zu gehen.

Um nun aber mit dem so bestimmten Instrumente eine zuverlässige Messung von $\omega = \sqrt{\frac{C}{x}}$ auszuführen, ist die Berücksichtigung des bis dahin ausser Acht gelassenen Einflusses der Schwerkräfte und Centrifugalkräfte der verschiedenen Stangen unerlässlich, was näherungsweise nach den Angaben im §. 114 geschehen kann, besser aber dadurch geschieht, dass x bei bekannten Werthen von ω beobachtet und damit $C = \omega^2 x$ berechnet wird, am besten als Mittelwerth aus mehreren Beobachtungen, welche weit auseinander liegenden solchen Werthen von ω entsprechen, zu deren Messung das Instrument bestimmt ist.

Fig. 120.

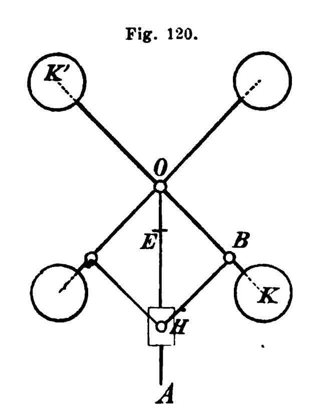
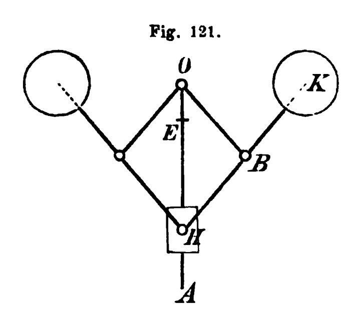


Fig. 121.



Wenn dasselbe bei nicht verticaler Lage der Welle OA, insbesondere also bei Maschinen benutzt werden soll, welche nicht eine feste Lage haben, z. B. auf Schiffen, Eisenbahnfahrzeugen u. s. f., so muss die Schwerkraft ausgeglichen und durch Federkraft ersetzt werden, etwa gemäss den im §. 121 besprochenen, durch die Figuren 120 u. 121 dargestellten Anordnungen. Dabei ist E ein Vorsprung auf der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Welle OA, zwischen welchen und die Hülse H eine die Welle umgebende Spiralfeder eingefügt ist, die auf H den Druck Q

ausübt. Ist dann ferner G das Gewicht einer Kugel (Fig. 121) oder die Summe der Gewichte beider an derselben Stange sitzenden Kugeln (Fig. 120), e die Entfernung von O, bis zu welcher die ungespannte Feder reicht, und Q_1 die Kraft, durch welche sie um die Längeneinheit zusammengedrückt wird, endlich $OB = BH = a$, $Ok = l$, $OH = x$ und g die Beschleunigung der Schwere, so ist nach §. 122, Gl. (4) für den mittleren, nämlich reibungslosen Gleichgewichtszustand:

$$\omega = \sqrt{2g\frac{Q_1 a^2}{Gl^2}\frac{e-x}{x}} = \sqrt{C\frac{e-x}{x}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Durch Aenderung von e, also durch Verstellung des Vorsprunges E auf der Welle OA kann hier die Adjustirung des Instrumentes für verschiedene Geschwindigkeiten ω bewirkt werden, um eine möglichst grosse Empfindlichkeit, wachsend mit $\frac{dx}{d\omega}$, zu erzielen. Dieser Differentialquotient ergiebt sich aus

$$\omega^2 = C\frac{e-x}{x}, \text{ also } 2\omega\, d\omega = -\frac{Ce}{x^2}dx$$

$$\frac{dx}{d\omega} = -\frac{2\omega x^2}{Ce} = -\frac{2\omega}{C}\frac{x}{\frac{\omega^2}{C}+1} = \frac{-2x}{\omega + \frac{C}{\omega}} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

absolut genommen wachsend unter übrigens gegebenen Umständen mit x. Ist also wieder x_0 der grösstmögliche Werth von x, den das Instrument gestattet, und ω_0 die kleinste Winkelgeschwindigkeit, welche mit ihm messbar sein soll, so ist der Vorsprung E so zu reguliren, dass

$$e = x_0\left(\frac{\omega_0^2}{C}+1\right) \text{ mit } C = 2g\frac{Q_1 a^2}{Gl^2} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

wird. Für den Gebrauch des so vorgerichteten Instruments zur Messung von ω gemäss Gl. (5) ist es am besten, beide Constante C und e dieser Gleichung aus den für bekannte Werthe von ω beobachteten Werthen von x abzuleiten.

Die Vergleichung der Ausdrücke (3) und (6) von $\frac{dx}{d\omega}$ lässt übrigens erkennen, dass die Empfindlichkeit eines solchen Centrifugaltachometers unter sonst gleichen Umständen bei Federkraftwirkung kleiner ist, als bei Schwerkraftwirkung, so dass letztere vorzuziehen ist, sofern sie nicht, wie auf Schiffen und Eisenbahnfahrzeugen, durch die veränderliche Lage

der rotirenden Welle und durch den Einfluss von Stössen verboten wird, oder sofern es nicht auf ein sehr weites Umfangsgebiet der Geschwindigkeiten ω ankommt, welche mit demselben Instrument von mässigen Dimensionen bei unveränderter Adjustirung messbar sein sollen. Insbesondere sind beliebig kleine Geschwindigkeiten ω nur durch das Instrument mit Federkraftwirkung messbar, da x in Gl. (5) wohl $= e$, nicht aber in Gl. (2) unendlich gross werden kann.

Bei der Verwendung für Eisenbahnzüge und auf Seeschiffen können übrigens auch bei vollkommener Ausgleichung der Schwerkräfte Störungen verursacht werden durch Stösse, besonders wenn dieselben bei der einfacheren Anordnung gemäss Fig. 121 parallell der Axe OA stattfinden und somit von gleicher Wirkung auf beide Kugeln sind. In solchen Fällen ist deshalb die weniger einfache Construction nach Fig. 120 vorzuziehen und zugleich eine solche Anordnung rathsam, dass die Axe OA im Mittel horizontal zu liegen kommt, weil die Stösse in den genannten Fällen vorzugsweise nach verticaler Richtung stattfinden. Auch ist es dann zweckmässig, den Kugeln möglichst grosse Masse zu geben.

Diese Erwägungen liegen dem Geschwindigkeitsmesser für Eisenbahnzüge von Finckbein und Schäfer* zu Grunde, bei welchem die Bewegung der Hülse theils durch einen Zeiger auf einem Gradbogen zu augenblicklicher Ablesung markirt, theils durch einen Schreibstift auf einem durch ein Uhrwerk geradlinig bewegten Papierstreifen oder auf einer dadurch in gleichförmiger Rotation erhaltenen Scheibe registrirt wird. Ein Glied des Mechanismus, welcher die Bewegung von der Hülse auf den Zeiger und auf den Schreibstift überträgt, kann durch eine feine Schraube so verlängert oder verkürzt werden, dass auch bei veränderlicher Grösse des Radumfanges (wegen Abnutzung oder Abdrehung des Radreifens) und somit bei veränderlichem Verhältnisse der Fahrgeschwindigkeit zur Winkelgeschwindigkeit der betreffenden Radaxe und der ihr proportionalen Winkelgeschwindigkeit der Welle OA des Instruments doch eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit immer denselben Stellungen des Zeigers und des Schreibstiftes entspricht.

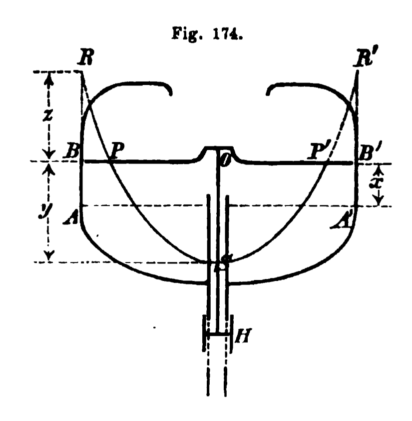
2. Centrifugaltachometer mit flüssiger rotirender Masse, als welche gewöhnlich Quecksilber verwendet wird behufs grösstmöglicher Wirksamkeit bei mässigen Dimensionen, können auch entweder so ausgeführt werden, dass die Centrifugalkraft mit der Schwere oder so, dass

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1879, S. 466.



sie mit einer Federkraft im Gleichgewicht ist. Als Beispiel des ersten Falles diene das durch Fig. 174 im Princip dargestellte, von **Stenberg** zu seinem sogenannten hydroparabolischen Regulator* benutzte Tachometer von folgender Einrichtung. Ein als Umdrehungskörper gestaltetes Gefäss rotirt mit der zu messenden Winkelgeschwindigkeit ω um seine verticale Axe und enthält Quecksilber, das für $\omega = 0$ mit horizontaler ebener Oberfläche bis AA' reichen mag, für $\omega > 0$ aber sich mit parabolischer Oberfläche in der Mitte senkt und am Rande erhebt, indem es durch radiale Rippen am Gefässboden gezwungen wird, jeder Aenderung von ω sofort zu folgen.

Fig. 174.



Die das Gefäss tragende Welle ist in ihrem oberen Theile hohl und ragt bis etwas über AA' in das Gefäss hinein. Letzteres ist oberhalb AA' cylindrisch gestaltet, insoweit darin der vom Quecksilber getragene scheibenförmige Schwimmer BB' auf und nieder beweglich ist; dieser ist am Umfange durch eine Membran mit der Gefässwand verbunden, um seine reibungslose Beweglichkeit mit dichtem Abschlusse des Quecksilbers unter ihm zu vereinigen. Von der Mitte des Schwimmers reicht ein Stab abwärts in die Höhlung der Welle hinein und ist am Ende durch einen kurzen Querstab, der zwei diametral gegenüberliegende Längsschlitze der Wand dieser Welle durchdringt, mit der auf ihr verschieblichen Hülse H verbunden. Die somit an der Hülse sichtbar gemachte Bewegung des Schwimmers kann durch die üblichen Mittel auf einen Zeiger oder auf den Schreibstift eines Registrirwerkes übertragen werden.

Um die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω des Instrumentes und der Erhebung $AB = x$ des Schwimmers auszudrücken, sei Q die Belastung incl. Eigengewicht des letzteren, γ das specifische Gewicht des Quecksilbers und PSP', Fig. 174, die parabolische Meridianlinie der freien Quecksilberoberfläche, welche, über BB' hinaus fortgesetzt, den cylindrischen Theil der Gefässwand in einem horizontalen Kreise RR' schneiden würde. Indem nun der Druck in jedem Punkte der ringförmigen Berührungsfläche zwischen dem Quecksilber und dem

* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1878, S. 392.



Schwimmer ebenso gross ist, wie er an derselben Stelle dann sein würde, wenn ohne Schwimmer sich das Quecksilber bis zum Kreise RR' erstreckte, ist die relative Gleichgewichtslage charakterisirt durch die Gleichung:

$$Q = \gamma V,$$

unter V das Volumen verstanden, welches durch Umdrehung der Fläche BPR um die Axe OS erzeugt werden würde. Dieses Volumen ist, unter O den Mittelpunkt von BB', unter S den Scheitelpunkt der Parabel RSR', unter P und P' ihre Durchschnittspunkte mit der Geraden BB' verstanden, wenn

$$OS = y, \quad BR = z, \quad OB = r, \quad OP = p$$

gesetzt wird, und wenn mit den betreffenden Flächen der Figur die durch sie bei der Umdrehung um OS erzeugten Volumina bezeichnet werden,

$$V = BRR'B' + PSP' - RSR'$$

oder wegen $PSP' = ABB'A'$

$$V = ARR'A' - RSR'$$

$$= \pi r^2 \left(x + z - \frac{y+z}{2}\right) = \pi r^2 \left(x + \frac{z-y}{2}\right) \quad \ldots \ldots (8).$$

Um hierin y und z durch x auszudrücken, hat man nach der Gleichung der Parabel RSR' (siehe Bd. I, §. 55, Gl. 6):

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2}(y + z)$$

sowie mit Rücksicht auf die Gleichheit der Volumina $ABB'A'$ und PSP', von denen letzteres = der Hälfte des Cylinders mit der Höhe OS auf der Grundfläche PP' ist,

$$r^2 x = \frac{1}{2} p^2 y = \frac{g}{\omega^2} y^2.$$

Aus beiden folgt:

$$y = r\omega \sqrt{\frac{x}{g}}; \quad z = \frac{r^2\omega^2}{2g} - r\omega \sqrt{\frac{x}{g}} \quad \ldots \ldots \ldots (9)$$

$$\frac{z-y}{2} = \frac{r^2\omega^2}{4g} - r\omega \sqrt{\frac{x}{g}}$$

und damit nach Gl. (8):

$$Q = \gamma V = \gamma \pi r^2 \left(x + \frac{r^2\omega^2}{4g} - r\omega \sqrt{\frac{x}{g}}\right)$$

$$= \gamma \pi r^2 \left(\frac{r\omega}{2\sqrt{g}} - \sqrt{x}\right)^2.$$

In der hieraus folgenden Gleichung

$$\frac{r\omega}{2\sqrt{g}} = \pm \frac{1}{r}\sqrt{\frac{Q}{\gamma\pi}} + \sqrt{x}$$

gilt natürlich nur das obere Vorzeichen, weil zur Erhebung des Schwimmers auf eine gewisse Höhe x eine um so grössere Geschwindigkeit nöthig, je grösser seine Belastung Q ist. Somit ist schliesslich:

$$\omega = \frac{2}{r^2}\sqrt{\frac{gQ}{\gamma\pi}} + \frac{2}{r}\sqrt{gx} = a + b\sqrt{x} \quad \dots\dots\dots (10)$$

mit $$a = \frac{2}{r^2}\sqrt{\frac{gQ}{\gamma\pi}} \text{ und } b = \frac{2\sqrt{g}}{r}.$$

Für den Gebrauch des Instrumentes ist es mit Rücksicht auf untergeordnete Umstände, welche, wie der Einfluss des Durchmessers der in das Gefäss hineinreichenden hohlen Welle, bei obiger Entwicklung unberücksichtigt geblieben sind, wieder am besten, die Constanten (hier a und b) der nur ihrer allgemeinen Form nach zu Grunde gelegten Gleichung zwischen ω und x aus solchen Werthen von x abzuleiten, welche für bekannte Werthe von ω beobachtet werden. Bei der Herstellung des Instrumentes für einen gewissen Zweck ist aber von der kleinsten und grössten Geschwindigkeit bezw. $= \omega_0$ und ω_1 auszugehen, welche, entsprechend angenommenen Grenzwerthen x_0 und x_1 von x, mit dem Instrument messbar sein sollen. Durch die Gleichungen

$$\omega_0 = a + b\sqrt{x_0} \text{ und } \omega_1 = a + b\sqrt{x_1}$$

sind dann a, b und dadurch r, Q bestimmt. Die Annahme $x_0 = 0$ ist hierbei nicht rathsam, weil aus Gl. (10) sich

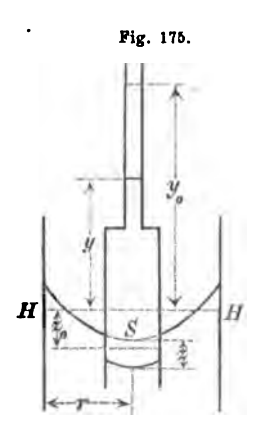
$$d\omega = \frac{b}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}, \text{ also } \frac{dx}{d\omega} = \frac{2\sqrt{x}}{b} \quad \dots\dots\dots\dots (11)$$

$= 0$ für $x = 0$, d. h. die Genauigkeit der Messung verschwindend klein ergeben würde. Selbst abgesehen davon ist der kleinste messbare Werth von $\omega > a$; so lange $\omega < a$ ist, wird die parabolische Krümmung der Quecksilberoberfläche und entsprechende Erhebung der Schwimmerscheibe durch das Gewicht der letzteren verhindert.

Von der letztgenannten Beschränkung frei ist eine Einrichtung, welche zugleich ohne Anwendung von mit Reibungswiderständen verbundenen Mechanismen die durch die Rotation bewirkte Deformation der Quecksilberoberfläche in vergrössertem Maassstabe sichtbar macht, aber nur zu augenblicklicher Ablesung, nicht zur Registrirung geeignet ist.

In das um seine verticale Axe rotirende Gefäss mit Quecksilber ist nämlich coaxial von oben her eine am Gefässe befestigte beiderseits offene Röhre bis unter die Quecksilberoberfläche eingesenkt, welche nach oben in eine engere Glasröhre ausläuft und bis in diese hinein mit Wasser (unter entsprechender Depression des Quecksilbers im unteren Theile der Röhre) gefüllt ist. Die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω des Gefässes und dem Wasserstande in der Röhre ergiebt sich dann durch folgende Entwicklung mit Bezugnahme auf Fig. 175 und unter der Voraussetzung, dass, insoweit die Veränderungen der Flüssigkeitsoberflächen sich erstrecken, die innere Wandfläche des Gefässes (Radius $= r$) und die Wandflächen der Röhre coaxiale cylindrische Flächen sind. Es sei

Fig. 175.



m das Verhältniss des Querschnittes des zwischen der Innenwand des Gefässes und der Aussenwand des unteren Röhrenstückes befindlichen cylindrischen Raumes zum inneren Querschnitte $= F$ dieses unteren Theiles der Röhre,

n das Verhältniss von F zum inneren Querschnitte des engeren oberen Röhrenstückes,

δ das Dichtigkeitsverhältniss von Quecksilber und Wasser;

ferner für den Zustand der Ruhe ($\omega = 0$):

HH die horizontale Oberfläche des Quecksilbers im Gefässe,

y_0 die Höhe der Wasseroberfläche in der Röhre über HH,

z_0 die Tiefe der Quecksilberoberfläche in der Röhre unter HH;

dagegen für den Gleichgewichtszustand bei der Rotation des Gefässes:

s die Tiefe des Scheitelpunktes S der (durch die Röhre fortgesetzt gedachten) Quecksilberoberfläche im Gefässe unter HH,

y die Höhe der Wasseroberfläche in der Röhre über HH,

z die Tiefe des Scheitelpunktes der Quecksilberoberfläche in der Röhre unter S.

Würde nun im Zustande der Ruhe das Wasser aus der Röhre beseitigt und durch ein bis HH reichendes Quecksilbervolumen $= Fz_0$ ersetzt, so erführe der Scheitelpunkt S der Quecksilberoberfläche durch die Rotation eine Senkung

$$= \frac{r^2 \omega^2}{4g} \text{ (siehe Bd. I, §. 55, Gl. 7).}$$

Um dann aber den thatsächlichen Zustand herzustellen, muss mit der Wiedereinfüllung des Wassers in die Röhre aus dem Innenraume derselben das Quecksilbervolumen Fz, aus dem äusseren Gefässraume folglich das Quecksilbervolumen $F(z_0 - z)$ weggenommen werden, wodurch der Scheitelpunkt S die weitere Senkung $= \frac{z_0 - z}{m}$ erfährt und somit

$$s = \frac{r^2 \omega^2}{4g} + \frac{z_0 - z}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

wird. Mit Rücksicht darauf, dass die Quecksilberoberfläche in der Röhre nur sehr wenig gekrümmt ist, hat man auch

$$y_0 - y = n(s + z - z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

und endlich folgt aus

$$\delta = \frac{y_0 + z_0}{z_0} = \frac{y + s + z}{z}$$

$$\delta - 1 = \delta' = \frac{y_0}{z_0} = \frac{y + s}{z}$$

$$z_0 - z = \frac{y_0 - y - s}{\delta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Durch die Gleichungen (12), (13) und (14) sind s, $z_0 - z$ und $y_0 - y$ bestimmt; insbesondere findet man:

$$y_0 - y = x = \frac{1 + \frac{m-1}{1 + m\delta'}}{\frac{1}{n} + \frac{m-1}{1 + m\delta'}} \frac{r^2 \omega^2}{4g}$$

$$\omega = b\sqrt{x} \quad \text{mit} \quad b = \frac{2}{r} \sqrt{g \frac{\frac{1}{n} + \frac{m-1}{1 + m\delta'}}{1 + \frac{m-1}{1 + m\delta'}}} \quad \ldots\ldots (15).$$

Für $n = 1$, einer oben und unten gleich weiten Röhre entsprechend, wäre $b = \frac{2\sqrt{g}}{r}$ wie in Gl. (10) mit $a = 0$; die Wasserfüllung der Röhre hätte dann nur den Zweck, die Flüssigkeitsoberfläche an eine sichtbare Stelle zu verlegen. Durch Erweiterung der Röhre unten, also durch Vergrösserung von n, wird aber b verkleinert und somit die einer gewissen Geschwindigkeit ω entsprechende Aenderung x des Wasserstandes vergrössert.

Anstatt die Röhre mit dem Gefässe rotiren zu lassen, wodurch die Ablesung des Wasserstandes (an einer dicht neben der Glasröhre befestigten Skala) erschwert wird, wenn die Röhrenaxe nicht ganz genau mit der Rotationsaxe zusammenfällt, könnte man auch die Röhre ausserhalb des Gefässes befestigen, doch würde dann die Reibung zwischen dem mitrotirenden Quecksilber und der unbeweglichen Röhre die einfache Beziehung (15) stören. —

Solche Flüssigkeits-Centrifugaltachometer, bei denen die Elasticität als die mit der Fliehkraft im Gleichgewicht befindliche Kraft benutzt wird, sind in der Weise (von Schäffer und Budenberg) ausgeführt worden, dass das um eine verticale Axe rotirende Gefäss an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen mit Ansätzen versehen ist, die sich nach aussen trichter- oder schüsselförmig erweitern und hier durch runde gewellte (concentrische Wellen bildende) dünne Stahlbleche abgeschlossen sind, während oben in den Deckel des Gefässes coaxial mit demselben ein offenes Glasrohr eingesetzt ist. Je schneller dann die Rotation stattfindet, desto mehr werden die Bleche durch die Fliehkraft des Quecksilbers nach aussen hin durchgebogen, muss also letzteres aus dem Glasrohre in das Gefäss eintreten, um dessen vergrösserten Hohlraum gefüllt zu erhalten. Der Quecksilberstand in der Röhre wird an einer dicht daneben befestigten Skala abgelesen, die hier natürlich eine ganz empirische Theilung erhalten muss. Die Schwere des Quecksilbers ist bei diesem Instrumente zwar auch mit einem Theile der Federkraft der Stahlbleche im Gleichgewicht, spielt aber, wenn die Quecksilbersäule in der Röhre nicht überflüssig hoch ist, eine um so mehr untergeordnete Rolle, je weiter die Stahlbleche von der Axe entfernt sind, so dass dann auch durch etwas geneigte Lage der Axe die Ablesungen nicht wesentlich geändert werden. Hierdurch erhält das Instrument, ähnlich wie das früher besprochene Centrifugaltachometer mit Federkraftwirkung und mit Schwungkugeln, deren Schwerkräfte vollständig ausgeglichen sind, allgemeinere Brauchbarkeit bis auf den Umstand, dass es nur zu augenblicklicher Messung, nicht zugleich zur Registrirung der Geschwindigkeit geeignet ist.

Uebrigens haben Centrifugaltachometer mit flüssiger rotirender Masse bisher nur geringere Verbreitung gefunden. Die Gefahr einer nicht hinlänglich schnell erkennbaren Aenderung durch willkürlich herbeigeführte oder zufällige Aenderung der Flüssigkeitsmenge lässt sie in den meisten Fällen als weniger zuverlässig erscheinen.



b. Instrumente zur Messung der relativen Geschwindigkeit von festen Körpern und Flüssigkeiten.

Die hierher gehörigen Messinstrumente beruhen im Allgemeinen auf denselben Principien wie gewisse Arten der vorzugsweise ausgebildeten und technisch wichtigen, im engeren Sinne sogenannten Strommesser, welche zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in Canälen, d. h. in oben offenen Leitungen dienen. Von diesen wird deshalb hier zunächst die Rede sein. Aehnlich wie die Tachometer für Maschinen lassen sie sich als totalisirende und als momentan wirkende Instrumente (§. 158) unterscheiden.

§. 161. Totalisirende Strommesser.

Wegen mannigfacher Störungen, denen die Gleichförmigkeit der Wasserbewegung eines Canals, besonders eines natürlichen Flusses stets unterworfen ist, kommt es hier meistens weniger auf die Kenntniss einer augenblicklich stattfindenden Strömungsgeschwindigkeit, als auf diejenige ihres Mittelwerthes an, und sind deshalb den momentan wirkenden Strommessern im Allgemeinen die totalisirenden, d. h. solche vorzuziehen, deren Angaben auf einer längere Zeit dauernden Einwirkung beruhen. Durch dieselben wird die mittlere Geschwindigkeit gemessen, welche während einer gewissen Zeit entweder in einem bestimmten Punkte herrscht oder in einer Folge von gleich gelegenen Punkten aller Querschnitte einer gewissen Canalstrecke. Die erstere Wirkungsweise hat namentlich der hydrometrische Flügel, die letztere ein Schwimmer, der zwar als einfacher ungegliederter Körper nicht eigentlich als Instrument zu bezeichnen ist, jedoch als ein wichtiges Hülfsmittel zu dem hier in Rede stehenden Messungszwecke vor Allem Erwähnung verdient.

1. Schwimmer. — Wenn man einen Körper auf dem Wasser eines natürlichen oder künstlichen Canals (ein Strom, Fluss, Bach wird als natürlicher Canal verstanden) schwimmen lässt und die Zeit t beobachtet, in welcher der Körper von einem gewissen Querschnitte F_0 einer geraden und möglichst gleichförmig profilirten Canalstrecke bis zu einem andern F gelangt, der in der abgemessenen Entfernung s von jenem sich befindet, so ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers an den vom Körper passirten Stellen $=\frac{s}{t}$, falls die Geschwindigkeit des

Körpers stets derjenigen des Wassers an derselben Stelle gleich gesetzt werden darf. Damit dies mit genügender Sicherheit geschehen könne, muss der Schwimmer schon aus mässiger Entfernung oberhalb F_0 herkommend diesen Querschnitt passiren; auch muss er von passender mässiger Grösse sein, weil ein zu grosser schwimmender Körper, z. B. ein Schiff, durch seine Geschwindigkeit diejenige der Strömung nicht für eine bestimmt angebbare Stelle des Wasserquerschnittes erkennen lässt, ein sehr kleiner aber zu leicht durch zufällige Umstände in seiner Bewegung gestört wird; endlich soll der Körper nur wenig aus dem Wasser hervorragen, um dem Einflusse des Luftzuges nicht wesentlich ausgesetzt zu sein. Bei merklichem Winde sind dergleichen Schwimmerbeobachtungen ganz zu vermeiden.

Als schwimmenden Körper kann man ein Stück Holz, eine verschlossene Glasflasche, auch eine besonders dazu hergestellte Kugel verwenden von 10 bis 20 Centimeter Durchmesser, entweder massiv von Holz, auffällig angestrichen und nach Erforderniss durch eingetriebene Eisenkeile, eingegossenes Blei etc. beschwert, oder hohl von Blech und mit einer verschliessbaren Oeffnung zum Einfüllen von Sand, Schrot oder Wasser versehen.

Sofern ein solcher Schwimmer nur wenig eingetaucht ist, findet man damit die Oberflächengeschwindigkeit an einer gewissen Stelle des Wasserquerprofils, d. h. für eine gewisse Entfernung vom einen oder anderen Ufer, vorausgesetzt dass diese während des Schwimmens längs der Strecke $F_0 F = s$ unverändert bleibt. Letzteres ist aber deswegen oft nicht genügend der Fall, weil das Wasser eines Flusses in den oberen Schichten eine gewisse gegen den Stromstrich, d. h. gegen den Ort der grössten Geschwindigkeit hin gerichtete Seitengeschwindigkeit zu haben pflegt. Dieselbe, welche mit der Strömungsgeschwindigkeit nach der Längenrichtung des Flusses wächst und durch Unregelmässigkeiten des Flussbettes beträchtlich verstärkt werden kann, ertheilt einem ausserhalb des Stromstriches schwimmenden Körper den Antrieb zur Annäherung an denselben, so dass ein Schwimmer mit Sicherheit nur zur Messung der Geschwindigkeit im Stromstriche dienen kann, falls nicht das Flussbett bei schwacher Strömung sehr regelmässig gestaltet ist. Hierdurch wird ein Hauptwerth des Schwimmers nicht beeinträchtigt, welcher darin besteht, dass er ein einfaches Mittel darbietet, um durch vergleichende Messungen im Stromstriche die Constanten anderer Instrumente zu bestimmen, die zu Geschwindigkeitsmessungen an beliebigen Stellen des Wasserquerschnittes geeigneter sind.

Um die Stromgeschwindigkeit w in der Tiefe x unter der Oberfläche durch einen Schwimmversuch zu finden, kann man zwei gleich grosse, aber ungleich schwere Schwimmkugeln durch einen Faden oder Draht von solcher Länge verbinden, dass der Mittelpunkt der unteren, stärker belasteten Kugel in der Tiefe x, derjenige der oberen aber dicht unter der Oberfläche des Wassers sich befindet, während das System beider Kugeln mit geringer Neigung des Fadens oder Drahtes gegen die Lothrechte schwimmt. Geschieht das mit der gemessenen Geschwindigkeit w_1, während die Oberflächengeschwindigkeit mittels einer schwimmenden Kugel $= w_0$ für denselben Längenschnitt gefunden ist, und setzt man dann

$$w_1 = \frac{w_0 + w}{2}, \text{ so folgt } w = 2w_1 - w_0.$$

Diese Berechnung von w beruht indessen auf einer zweifelhaften Voraussetzung, und ist es namentlich bei den ausgedehnten hydraulischen Untersuchungen am Mississippi (Bd. I, S. 726) vorgezogen worden, zu fraglichem Zwecke einen Doppelschwimmer zu benutzen, der aus einer kleinen, passend beschwerten Tonne bestand, die durch eine Schnur mit einem viel kleineren, an der Oberfläche schwimmenden Körper von Kork, leichtem Holz oder hohl aus Blech hergestellt verbunden war. Je kleiner dieser obere im Vergleich mit dem unteren Schwimmer ist, mit desto geringerem Fehler kann die Wassergeschwindigkeit an der Stelle des letzteren der gemessenen Geschwindigkeit des Doppelschwimmers gleich gesetzt werden.

Wenn die Messungen dazu dienen sollen, das den Querschnitt F in der Zeiteinheit durchfliessende Wasserquantum $Q = Fu$ zu bestimmen, unter u die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querschnittes verstanden, so ist dazu die Kenntniss der mittleren Geschwindigkeit v in senkrechten Geraden dieses Querschnittes erforderlich, welche zwar nach Bd. I, §§. 124 und 125 aus den Geschwindigkeiten w für einzelne Punkte derselben abgeleitet, jedoch auch unmittelbar mit Hülfe von Schwimmstäben gefunden werden können, wie sie als einfache, am unteren Ende mit Eisen beschlagene Holzstäbe, die schwimmend bis fast an den Boden reichen, u. A. von Wiebeking, in neuerer Zeit von Grebenau bei ausgedehnten Strommessungen im Rheine benutzt wurden. Behufs leichter Anpassung an verschiedene Wassertiefen kann auch der Schwimmstab als Blechröhre von 3 bis 4 Centimeter Durchmesser aus mässig langen Stücken zu geeigneter Länge zusammengeschraubt und im untersten, durch einen Boden geschlossenen Stücke mit Schrot oder dergl. beschwert werden.



2. Der hydrometrische Flügel ist dasjenige Instrument, welches, seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts von Woltmann in Hamburg zuerst zu diesem Zwecke vorgeschlagen und benutzt, zur Zeit als Strommesser am allgemeinsten in Anwendung ist. Sein hauptsächlichster Bestandtheil ist ein Flügelrädchen von 10 bis 15 Centimeter Durchmesser mit 2, 3 oder 4 gleichförmig ringsum vertheilten schraubenflächigen oder schräg gestellten ebenflächigen Flügeln; der Lagerkörper seiner Welle ist gewöhnlich mittels einer Hülse um einen mit einer Theilung versehenen hölzernen Stab von kreisförmigem Querschnitte drehbar, der unten mit einer eisernen Spitze versehen ist und beim Gebrauche vertical auf den Boden des Canalbettes aufgesetzt wird, indem ein auf diesem Stabe an verschiedenen Stellen festzuklemmender Ring die Hülse unterstützt. Die Axe des Flügelrades ist dadurch in einer horizontalen Ebene in willkürlich abzuändernder Tiefe unter der Wasseroberfläche beweglich und wird durch einen nach der Richtung dieser Axe sich erstreckenden ebenen Steuerflügel, der auf der andern Seite mit der Hülse verbunden ist, in die Strömungsrichtung so eingestellt, dass der Wasserstrom im Sinne vom Flügelrade längs der Welle desselben gegen den Stab und längs dem Steuerflügel hin gerichtet ist. Die Umdrehungen des Flügelrades werden durch ein Zählwerk registrirt, dessen erstes Rad gewöhnlich ein mit einem Schraubengewinde, einer sogenannten Schnecke, auf der Flügelradwelle in Eingriff zu bringendes Schneckenrad ist. Um dieses Zählwerk willkürlich in und ausser Gang setzen zu können, sind seine Räder nicht im Lagerkörper des Flügelrades, sondern auf einem Hebel gelagert, der selbst gegen jenen Lagerkörper um eine die Flügelradaxe rechtwinklig kreuzende Axe zwischen Anschlägen etwas drehbar ist, und zwar pflegt die Einrichtung so getroffen zu sein, dass für gewöhnlich durch den auf jenen Lagerhebel ausgeübten Druck einer Feder das Schneckengetriebe ausgerückt ist, dass aber durch den Zug an einer von oben her mit dem Hebel verbundenen Schnur entgegen dem Drucke jener Feder die Einrückung bewirkt wird.

Zum Gebrauche des Instruments wird bei kleinen Flüssen ein Steg querüber vorgerichtet, von welchem aus die Operationen besorgt werden. Bei grösseren Flüssen kann ein Seil quer über den Fluss gespannt werden, um längs demselben mittels einer Rolle und eines Anhängeseils ein Boot hin und her zu führen, von dessen Bug bezw. einem darüber hinausragenden Brette aus der das Instrument tragende Stab in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Durchbiegung des Leitseiles entsprechend ist dabei das Anhängeseil gegen die Strommitte hin so zu verkürzen, dass



sich der Bug des Bootes in dem Querschnitte bewegt, für welchen die Messungen ausgeführt werden sollen. Auch kann man sich bei grossen Flüssen zweier unter sich durch einen Steg verbundener Kähne bedienen, die successive an verschiedenen Stellen der Flussbreite vor Anker gelegt werden. In allen Fällen wird dann mit Hülfe einer Secundenuhr so operirt, dass die in einem gewissen Augenblicke plötzlich angezogene Schnur während einer gewissen Zahl von (etwa 30, 45 oder 60) Secunden angespannt gehalten und plötzlich wieder nachgelassen, endlich zur Ablesung der unterdessen veränderten Zeigerstellung des Zählwerkes das Instrument mit dem Stabe heraufgeholt wird, um es in gleicher Weise an einer anderen Stelle dem Einflusse des Wasserstroms zu unterwerfen, falls nicht zur Erlangung eines von Fehlern möglichst freien Mittelwerthes die Messung an derselben Stelle wiederholt werden soll.

Uebrigens haben die Einrichtung und Gebrauchsart des hydrometrischen Flügels in neuerer Zeit mehrfache Verbesserungen, besonders durch Prof. Amsler-Laffon,* erfahren. Zunächst kann es mit Rücksicht darauf, dass die Strömungsrichtung oft mehr oder weniger von der Normalen zum ebenen Wasserquerschnitte abweicht, dass es aber bei Wassermessungen nur auf die zu demselben senkrechten Geschwindigkeitscomponenten anzukommen pflegt, mit Amsler vorgezogen werden, das Instrument nicht um den Stab drehbar einzurichten, sondern an ihm zu befestigen und diesen dann jeweils so aufzustellen (etwa mit Hülfe eines an ihm angebrachten Visirs und zweier an den Ufern aufgerichteter Markirstäbe), dass die Flügelradwelle in die Längenrichtung des Flusses, also senkrecht zum Querschnitte zu liegen kommt. Auch kann in diesem Falle statt des kreisrunden Querschnitts des eingetheilten Stabes ein ovaler oder linsenförmiger Querschnitt vorgezogen werden, so dass dieser Stab, wenn er mit einer am vorderen Rande befindlichen Spitze auf den Boden aufgesetzt wird, schon an und für sich unter dem Einflusse der Strömung insoweit wie ein Steuerflügel wirkt, als es auch in diesem Falle zur Erleichterung seiner sicheren Haltung erwünscht ist. Uebrigens kann die Wahl eines runden Querschnittes durch den Umstand veranlasst sein, dass mit Amsler als Stab ein eisernes Rohr (Gasrohr von etwa 20 Millimeter Weite) benutzt wird, um darin die Zugschnur von dem das Zählwerk tragenden Hebel nach oben hinaus und über eine Leitrolle zu führen und sie so dem Einflusse des Wasserstroms zu entziehen, durch

---

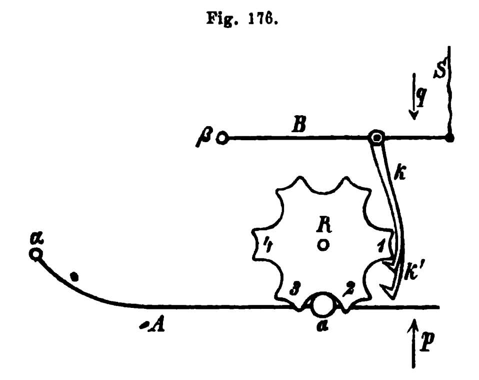
* Der hydrometrische Flügel mit Zählwerk und elektrischer Zeichengebung von J. Amsler-Laffon in Schaffhausen. 1877.



welchen bei starker Strömung und grosser Tiefe unwillkürlich eine ähnliche Anspannung der Schnur wie durch einen willkürlichen Zug an derselben bewirkt werden könnte.

Auch die Unbequemlichkeit, dass bei der gewöhnlichen Einrichtung die Zugschnur beständig angespannt gehalten werden muss, so lange das Zählwerk laufen soll, ist von Amsler vermieden worden durch einen Mechanismus von solcher Art, dass es nur eines kurzen ruckweisen Zuges an der Schnur bedarf, um das ausgerückte Zählwerk einzurücken oder umgekehrt, während zugleich durch Sperrung der eine oder andere Zustand bei ungespannter Schnur so lange erhalten bleibt bis die Aenderung durch neuen Anzug bewirkt wird. Fig. 176 lässt den Mechanismus im Princip erkennen. A ist der um α drehbare Hebel, welcher das Zählwerk trägt und durch eine Feder im Sinne des Pfeils p stets so weit aufwärts gedrückt wird, wie es die Stützung des an A sitzenden cylindrischen Stiftes a gegen das Sternrädchen R gestattet. B ist ein Hebel, der um die Axe β innerhalb eines durch Anschläge begrenzten kleinen Winkels schwingen kann; eine Feder drückt ihn im Sinne des Pfeils q abwärts, so lange nicht ein überwiegender Zug an der Schnur S die entgegengesetzte Bewegung bewirkt. Von diesem Hebel B hängen zwei Schaltklinken k, k' herab, deren Längen um die halbe Theilung des Sternrades R verschieden gewählt sind. Wenn nun bei dem in der Figur dargestellten Zustande, wobei das Zählwerk eingerückt ist, durch einen Zug an der Schnur S der Hebel B aufwärts gedreht wird, so greift k unter den Zahn 1 und dreht R um eine halbe Theilung um, wobei der Zahn 3 durch seine Wirkung auf den Stift a den Hebel A abwärts drückt und das Zählwerk auslöst bis a auf der etwas ausgehöhlten Stirnfläche des Zahnes 3 aufliegt und die Sperrung zur Erhaltung dieses Zustandes bewirkt. Das Nachlassen des Zuges an S veranlasst dann nur die rückläufige Schwingung von B infolge des Federdruckes q, wobei k' unter den Zahn 2 greift zur Vorbereitung einer weiteren Drehung von R um eine halbe Theilung durch einen Zug an S, damit a in die Lücke zwischen den Zähnen 3 und 4 einfällt und das

Fig. 176.



Zählwerk abermals eingerückt wird u. s. f. Bei der Einsenkung des Instrumentes in das Wasser muss natürlich das Zählwerk ausgerückt und sein Zeigerstand vorher notirt worden sein.

Bei der Benutzung des hydrometrischen Flügels zu Geschwindigkeitsmessungen in vielen verschiedenen Punkten eines grösseren Flussquerschnittes ist es besonders mühsam und zeitraubend, das Instrument zu jeder Ablesung aus dem Wasser heben zu müssen, und ist es ausserdem nachtheilig, dass sich in der zwischen der ersten und letzten Messung liegenden längeren Zeit der Zustand des Flusses in dem betreffenden Querschnitte wesentlich geändert haben kann. Auch dieser Uebelstand ist von Amsler beseitigt worden, nämlich durch einen elektrischen Signalapparat, welcher dem Beobachter durch Glockensignale die Augenblicke markirt, in denen das Flügelrad je 100 Umdrehungen vollendet hat. Von den beiden Poldrähten eines am Beobachtungsorte über Wasser befindlichen galvanischen Elementes ist nämlich der eine mit dem das Instrument tragenden eisernen Rohre leitend verbunden, der andere mit Guttapercha umhüllt durch das Wasser hindurch geführt und so mit dem Instrumente verbunden, dass die Schliessung des Stromes und entsprechende Erregung eines die Signalglocke zum Tönen bringenden Elektromagneten jeweils nach 100 Umdrehungen des Flügelrades, nämlich nach einer Umdrehung des in seine Schnecke eingreifenden 100zähnigen Schneckenrades dadurch herbeigeführt wird, dass ein von diesem Rade hervorstehender Stift einen betreffenden Contact herstellt. In den Zwischenzeiten ist zwar der Strom in Folge der Nebenschliessung durch das Wasser nicht ganz unterbrochen, jedoch nicht kräftig genug, um den Elektromagnet bis zur Anziehung seines Ankers zu erregen. Eines Zählwerkes mit Zeigern zur Ablesung und einer Schnur zur Aus- und Einrückung desselben bedarf es in diesem Falle nicht; sind aber diese Theile vorhanden, um das Instrument bei kleinen Gewässern auch ohne den elektrischen Signalapparat gebrauchen zu können, so wird bei Benutzung des letzteren vor der Einsenkung ins Wasser das Zählwerk eingerückt, und sind dann nur die Zeiten zu notiren, die den erfolgenden Glockensignalen entsprechen.

Auf diese Weise würde indessen nicht viel gewonnen werden, wenn das Instrument noch behufs seiner Einstellung auf eine andere Tiefe aus dem Wasser heraufgeholt werden müsste, wie es dann nöthig wäre, wenn es von einem bei der Messung unten aufstehenden Stabe (eisernen Rohre) getragen würde. Vermieden wird dies aber dadurch, dass der Stab, an welchem nahe seinem unteren Ende das Instrument befestigt ist, nach

und nach weiter in das Wasser hinabgesenkt wird bis zur Berührung eines an verschiedenen Stellen auf ihm festzuklemmenden Ringes mit der Wasseroberfläche, so dass er nur bei einer Messung in grösstmöglicher Tiefe auf dem Boden aufsitzt. Freilich wird dadurch die sichere Haltung des Stabes und die Vermeidung störender Durchbiegung und Vibration desselben erschwert, überhaupt die Anwendbarkeit des Verfahrens auf Wassertiefen bis zu etwa 2 Metern beschränkt.

Zur Messung in grossen Tiefen benutzt Amsler einen verzinnten Eisendraht, der durch einen Haspel mehr oder weniger tief in das Wasser hinabgelassen werden kann und vermittels eines Karabinerhakens unten das Instrument trägt, während an diesem mit einem gleichen Haken ein linsenförmiges Belastungsgewicht von etwa 40 Kgr. hängt, um den Draht nahe lothrecht gespannt zu erhalten; dieser dient zugleich ebenso zur Leitung des galvanischen Stroms, wie im früheren Falle der röhrenförmige Eisenstab. Natürlich ist es im vorliegenden Falle nicht möglich, die Flügelaxe normal zur Querschnittsebene festzuhalten, und wird sie deshalb in die Strömungsrichtung eingestellt durch einen Steuerflügel, dem hier mit Rücksicht auf die allseitige Beweglichkeit des Instruments die Gestalt eines mit dem Flügelrade coaxialen Hohlkegels gegeben wurde. Der auf einem Kahne aufgestellte Haspel, mit welchem der Aufhängungsdraht in das Wasser hinabgelassen wird, gestattet zugleich die Ablesung der jeweiligen Tiefe der Flügelaxe mit Hülfe eines Zifferblattes und eines Zeigers, welcher, mit Reibung drehbar, auf Null gestellt wird, wenn die Flügelaxe in der Wasseroberfläche liegt. Insbesondere ist dann die ganze Wassertiefe an der betreffenden Stelle = der unveränderlichen Höhe der Flügelaxe über dem tiefsten Punkte des linsenförmigen Belastungsgewichtes *plus* der am Zifferblatte des Haspels in dem Augenblicke abgelesenen Tiefe, in welchem das Gewicht den Boden erreicht; dieser Augenblick kann durch ein besonderes Glockensignal sehr sicher markirt werden in Folge eines Stromschlusses, der dadurch automatisch ermöglicht ist, dass das Gewicht am unteren Karabinerhaken vermittels einer Spiralfeder hängt, die sich durch Entlastung verkürzt, wenn das Gewicht vom Boden getragen wird.

Um die Geschwindigkeiten w in verschiedenen Punkten einer Verticalen zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit v in dieser zu messen, kann nun so verfahren werden, dass, nachdem die ganze Wassertiefe $= H$ auf die so eben erwähnte Weise gemessen ist, zuerst für eine grösste Tiefe $= h_1$ der Flügelaxe die Zeitdauer von 100 Flügelumdrehungen $= t_1$, dann für die Tiefe $h_2 = h_1 - e$, $h_3 = h_2 - e \ldots$ die ent-



sprechende Zeit $= t_2, t_3 \ldots$ beobachtet wird, bis $h_n < e$ geworden ist. Die stets gleiche Erhebung des Instrumentes um die Strecke e ist leicht durch eine stets gleiche Zahl von Kurbelumdrehungen des Haspels zu erzielen, und kann diese Erhebung immer im Augenblicke des Glockensignals bewirkt werden, so dass die ganze Dauer der Messungen für dieselbe Verticale nur $= t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ sein würde, wenn es nicht rathsam wäre, die Zeiten t_1 und t_n als Mittelwerthe von mehreren solchen Zeitbeobachtungen in den Tiefen h_1 und h_n abzuleiten, während kleine Fehler der übrigen Zeiten durch Uebertragung im umgekehrten Sinne auf die folgenden sich grösstentheils ausgleichen. Aus diesen Zeiten ergeben sich dann die Geschwindigkeiten $w_1, w_2 \ldots w_n$ auf sogleich anzugebende Weise, und daraus mit meistens genügender Annäherung die mittlere Geschwindigkeit der Verticalen:

$$v = \frac{1}{H}\left[e(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) + \left(H - h_1 - \frac{e}{2}\right)w_1 + \left(h_n - \frac{e}{2}\right)w_n\right] \ldots (1).$$

Ohne das Instrument aus dem Wasser zu heben, wird dann das Boot bis zur nächsten Verticalen verfahren und hier dieselbe Operation wiederholt. So geht das Messungsgeschäft sehr schnell von Statten, und giebt z. B. Amsler an, die Strömungsgeschwindigkeit für 278 Punkte in 26 Verticalen eines Wasserquerschnittes des Rheins bei Schaffhausen in 4 Stunden gemessen zu haben. —

Schliesslich ist zu erwähnen, dass Prof. v. Wagner neuerdings die einzelnen Umdrehungen der Flügelwelle für das Ohr wahrnehmbar gemacht hat dadurch, dass an ihrer Rotation ein kleiner Hammer Theil nimmt, der bei jeder Umdrehung einmal gegen eine Feder von ungeglühtem Eisendrahte schlägt und dass der dadurch erzeugte Ton, vermittels eines mit der Feder verbundenen anderen Drahtes zum Standorte des Beobachters fortgepflanzt, hier durch einen Resonanzkasten verstärkt wird. Die Zählung dieser Töne während einer gewissen Zeit ersetzt die Ablesung der betreffenden Umdrehungszahl an einem Zählwerke. —

Mag nun bei dem Strommesser mit elektrischem Signalapparat die Zeit beobachtet werden, in welcher das Flügelrad eine bestimmte Zahl von Umdrehungen macht, oder die Zahl von Umdrehungen während einer bestimmten Zeit (nach dem gewöhnlichen Verfahren) am Zählwerke abgelesen, bezw. nach dem Verfahren v. Wagner's akustisch ermittelt werden, so ergiebt sich dadurch im einen wie im andern Falle die Umdrehungszahl $= n$ des Flügelrades pro Secunde, und kommt es also nur noch darauf an, die Beziehung zu kennen, welche zwischen n

und der Strömungsgeschwindigkeit $= w$ stattfindet, die das Wasser längs der Axe des Flügelrades besitzt. Sind die Flügelflächen Theile einer Schraubenfläche mit der Ganghöhe h, so wäre ohne Widerstände:

$$w = nh.$$

In der That aber wirkt der Drehung ein Widerstandsmoment entgegen, welches, unter α und β Constante verstanden, proportional

$$\alpha + \beta n^2$$

gesetzt werden kann, da es aus dem Zapfenreibungsmoment der Welle und aus dem Moment des hydraulischen Widerstandes gegen die drehende Bewegung der Flügel im Wasser besteht, ersteres aber constant, letzteres proportional n^2 zu setzen ist. Unter diesen Umständen ist nun auch $w - nh$ nicht $=$ Null, sondern die positive relative Geschwindigkeit des Wassers gegen das Flügelrad nach der Richtung seiner Axe. Derselben Grösse ist die relative Normalgeschwindigkeit des Wassers gegen die Flügelfläche in irgend einem Punkte derselben proportional (in verschiedenen Punkten nach verschiedenen Verhältnissen), so dass der Normaldruck des Wassers auf ein Element der Flügelfläche und die auf die Axe bezogene Momentensumme dieser Normaldrucke für alle Flächenelemente zusammen proportional $(w - nh)^2$ gesetzt werden kann. Im Beharrungszustande ist dieses auf Umdrehung des Flügelrades wirkende Kraftmoment mit obigem Widerstandsmoment im Gleichgewicht, also

$$(w - nh)^2 = \alpha + \beta n^2$$

$$w = hn + \sqrt{\alpha + \beta n^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Diese von Baumgarten aufgestellte Formel kann bei passender Bestimmung der Constanten h, α, β zwar auch im Falle ebener Flügel zu Grunde gelegt werden, doch ist eine ebenso grosse Annäherung dann nur zu erwarten, wenn die Werthe jener Constanten für verschiedene Intervalle von n besonders bestimmt werden. Schraubenflächige Flügel werden deshalb in neuerer Zeit vorgezogen. Uebrigens beruht auch für diesen Fall die Formel (2) auf zweifelhaften Annahmen, so dass es gerechtfertigt ist, statt ihrer sich der fast allgemein üblich gewordenen, durch die Erfahrung hinlänglich bewährten einfacheren Gleichung:

$$w = a + bn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zu bedienen, indem die wahrscheinlichsten Werthe ihrer Coefficienten a, b nach der Methode der kleinsten Quadrate aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen zusammengehöriger Werthe von w und n abgeleitet werden, die innerhalb des verlangten Gültigkeitsbereiches der Formel möglichst weit auseinander liegend zu ermitteln sind. Die Werthe von w können dabei entweder durch andere Messungsmethoden der Stromge-

schwindigkeit oder noch besser dadurch erhalten werden, dass das Instrument mit bekannter Geschwindigkeit nach der Richtung der Flügelaxe gleichförmig durch stehendes Wasser bewegt wird in der hinlänglich begründeten Annahme, dass es hier nur auf die relative Geschwindigkeit ankommt, einerlei wie dieselbe aus den Einzelgeschwindigkeiten beider Theile, des Instrumentes und des Wassers, hervorgeht.

Zweifelhaft kann es aber erscheinen, ob den Coefficienten a, b der Gleichung (3) hinlänglich gleiche Werthe zukommen, jenachdem das Instrument bei einem kleineren Canal (Gerinne) oder bei einem grossen Flusse, ob es nahe der Oberfläche, an einer mittleren Stelle des Querschnitts oder nahe der Canalwand zur Messung benutzt wird, weil diese Fälle sich bezüglich der Leichtigkeit seitlicher Ausweichung des Wassers unterscheiden, die natürlich stattfindet, sofern $w > nh$ ist. Dieser Zweifel wird ausgeschlossen, wenn man das Flügelrad gemäss einem Vorschlage von Treviranus coaxial in einem beiderseits offenen kurzen Hohlcylinder rotiren lässt, um es so in stets gleiche Umstände zu versetzen. Nur ist es dann nöthig, die Axe dieses Hohlcylinders und des Flügelrades möglichst genau in die Strömungsrichtung (nicht in die davon vielleicht abweichende Richtung der Normalen zum Canalquerschnitte) einzustellen, weil sonst durch jenen Hohlcylinder ein Theil des Wasserstromes, der ohne ihn die Flügel getroffen hätte, von der Wirkung auf dieselben abgehalten werden könnte.

§. 162. Momentan wirkende Strommesser.

Instrumente, welche die an einer gewissen Stelle augenblicklich stattfindende Stromgeschwindigkeit des Wassers anzeigen, sind von sehr mannigfach verschiedener Einrichtung ersonnen und von älteren Hydraulikern vorzugsweise benutzt worden. Sie beruhen darauf (Bd. I, §§. 153, 154), dass der Druck P des Wasserstroms auf einen ihm ausgesetzten Körper dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit beider, also bei ruhendem Körper dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit w des Wassers proportional gesetzt und somit gefolgert werden kann:

$$w = C\sqrt{P} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

unter C einen empirisch zu bestimmenden Coefficienten verstanden, der von der Form und den Dimensionen des Körpers abhängt. Die betreffenden Instrumente unterscheiden sich im Wesentlichen nur theils durch die Art des dem Drucke P unterworfenen Körpers, der insbeson-

dere fest oder flüssig sein kann, theils durch die Art der Messung des Druckes P. Diejenigen dieser Messungsmethoden, welche auf dem Princip der Hebelwaage mit veränderlichem Gegengewichte an unveränderlichem Angriffspunkte, wie bei der sogenannten Wasserfahne von Ximenes, oder auf dem Princip der Schnellwaage, d. i. einer Hebelwaage mit unveränderlichem Gegengewichte an veränderlichem Angriffspunkte beruhen, wie Michelotti's hydraulische Schnellwaage, Lorgna's Wasserhebel und Brüning's Tachometer,* sind heutzutage nicht mehr gebräuchlich. Abgesehen von übermässigen Reibungswiderständen, womit die meisten dieser Instrumente behaftet sind, leiden sie an dem Uebelstande, dass es schwierig ist, mit der Aenderung des Gegengewichtes oder seines Angriffspunktes den Variationen der Stromgeschwindigkeit w hinlänglich schnell zu folgen, um eine jederzeit zutreffende Ablesung zu verbürgen. Die heutzutage noch üblichen Messungsmethoden des Druckes P beruhen auf dem Princip der Zeigerwaage, wobei ohne vorbereitende Aenderung eines Gegengewichtes oder seines Angriffspunktes lediglich aus der von selbst eintretenden Gleichgewichtslage eines dem Drucke P und ausserdem seiner Schwere unterworfenen Körpers auf die Grösse von P geschlossen wird. Instrumente solcher Art sind das hydrometrische Pendel und die Pitot'sche Röhre; bei jenem ist der betreffende Körper eine starre Kugel, bei dieser eine Flüssigkeit, nämlich ein Theil des strömenden Wassers selbst.

1. Das hydrometrische Pendel oder der Stromquadrant beruht darauf, dass, wenn eine an einem Faden befestigte Kugel, die specifisch schwerer als das Wasser ist, in einen Fluss gehalten wird, der Faden in einer mit der Stromrichtung parallelen Verticalebene von der Lothrechten abgelenkt wird um einen Winkel α, der nach einem gewissen Gesetze mit der Stromgeschwindigkeit wächst. Bei einer zweckmässigen Ausführung dieses Instrumentes nach Bauernfeind** wird es von einem Arme getragen, der auf passend angeordnetem Brette festzuschrauben ist, und kann es gegen jenen Arm durch Drehung (mit etwas Reibung) um zwei sich rechtwinklig schneidende horizontale Axen sowie um eine verticale Axe so eingestellt werden, dass die Ebene des zur Ablesung des Winkels dienenden eingetheilten Gradbogens vertical und mit der Stromrichtung parallel wird, und dass sein Mittelpunkt, in

* In Betreff der Einrichtung dieser Instrumente sei auf Rühlmann's Hydromechanik, 2. Aufl., §. 125 verwiesen.

** Elemente der Vermessungskunde, 2. Aufl., §. 230.



welchem der die Kugel tragende Seidenfaden befestigt ist, vertical über dem Nullpunkte der Theilung zu liegen kommt. Diese letztere Einstellung kann genauer, als die übrigen, auf die es nur näherungsweise ankommt, durch eine feine Regulirungsschraube mit Hülfe einer Libelle bewirkt werden. Auch ist dadurch, dass der Faden durch einen Stöpsel im Mittelpunkte der Kreistheilung festgeklemmt wird, seine Länge leicht so zu reguliren, dass die Kugel in verlangter Tiefe unter der Wasseroberfläche sich befindet. Ist nun

G das Gewicht der Kugel im Wasser, d. i. der Ueberschuss ihres Eigengewichtes über das Gewicht des (bei voller Eintauchung) verdrängten Wassers,

P der horizontale Druck des Wasserstroms auf die Kugel,

d ihr Durchmesser,

$F=\frac{\pi d^2}{4}$ der Inhalt eines grössten Kreises, also das Volumen der Kugel $=\frac{1}{6}\pi d^3=\frac{2}{3}Fd$,

γ das specifische Gewicht des Wassers,

δ das Massenverhältniss der Kugel und des verdrängten Wassers,

so ist für die Stromgeschwindigkeit w nach Bd. I, §. 153, Gl. (1):

$$P=\vartheta\gamma F\frac{w^2}{2g}$$

und deshalb für den Gleichgewichtszustand:

$$tg\,\alpha=\frac{P}{G}=\frac{\vartheta\gamma F\frac{w^2}{2g}}{(\delta-1)\gamma\cdot\frac{2}{3}Fd}=\frac{3\vartheta}{4g(\delta-1)d}w^2 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$w=k\sqrt{tg\,\alpha} \quad \text{mit} \quad k=\sqrt{\frac{4g(\delta-1)}{3\vartheta}d} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Unsicherheit des Werthes von ϑ macht es übrigens nöthig, die Constante k der Gleichung $w=k\sqrt{tg\,\alpha}$ aus Beobachtungen von α abzuleiten an solchen Stellen, wo w anderweitig, durch Schwimmer oder durch Messung mit anderen schon controlirten Geschwindigkeitsmessinstrumenten bekannt ist. So fand z. B. Bauernfeind für einen Stromquadrant, bei welchem

$$d=0{,}087 \text{ Mtr. und } \delta=2{,}55$$

war und w zwischen den Grenzen 0,43 und 1,14 Mtr. pro Secunde mit einem Woltmann'schen Flügel (§. 161) gemessen wurde,

$$k = 1{,}62$$

entsprechend nach Gl. (3): $\vartheta = \frac{4.9{,}81.1{,}55}{3(1{,}62)^2} \cdot 0{,}087 = 0{,}67.$

Auch in anderen Fällen ergiebt sich hier ϑ ungefähr $= {}^2/_3$ und kann dann dieser Werth, wenn schon nicht zu hinlänglich zutreffender Bestimmung des Coefficienten k, so doch zur Bestimmung passender Grösse und Schwere der Kugel dienen, wenn die ungefähren Geschwindigkeitsgrenzen gegeben sind, für welche das Instrument bestimmt ist. Zunächst kann man bemerken, dass im Princip, d. h. ohne Rücksicht auf störende Umstände, die Empfindlichkeit der Messung von w mit dem Stromquadranten um so grösser wäre, je grösser und also je zuverlässiger messbar die durch eine kleine Aenderung von w bedingte Aenderung von α, d. h. je grösser der Differentialquotient $\frac{d\alpha}{dw}$ ist, für welchen aus der Gleichung

$$w^2 \cot g\, \alpha = k^2 = \text{Const.}$$

durch Differentiation sich ergiebt:

$$w^2 \frac{-d\alpha}{\sin^2 \alpha} + 2\, w\, dw \,.\, \cot g\, \alpha = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dw} = \frac{2 \cot g\, \alpha \sin^2 \alpha}{w} = \frac{\sin 2\alpha}{w} = max \quad \text{für} \quad \alpha = 45^0$$

bei gegebenem Werthe von w. In der That aber findet man, dass die das Ablesen störenden Schwankungen der Fadenrichtung mit dem Winkel α so wachsen, dass es besser ist, diesen nicht über 30^0 hinaus wachsen zu lassen. Ist allgemein α' der angenommene Maximalwerth von α für das Maximum w' von w, so folgt aus Gl. (2):

$$\delta = 1 + \frac{3\vartheta}{2\, tg\, \alpha'} \frac{w'^2}{2g} \frac{1}{d},$$

etwa

$$\delta = 1 + 0{,}1 \frac{w'^2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

entsprechend $\alpha' = 27^0$ für $\vartheta = {}^2/_3$. Danach würden z. B. mit der oben erwähnten Kugel des Bauernfeind'schen Instrumentes ($d = 0{,}087$ und $\delta = 2{,}55$) nur etwa bis

$$w' = \sqrt{\frac{1{,}55.0{,}087}{0{,}1}} = 1{,}16 \text{ Mtr.}$$

Stromgeschwindigkeit genügend sichere Ablösungen zu erwarten sein, ganz in Uebereinstimmung mit Bauernfeind's Wahrnehmungen.

Aus dem nach Gl. (4) für einen gegebenen Werth von w' und angenommenen Werth von d berechneten Werthe von δ ergiebt sich leicht die Wanddicke x, mit welcher die Kugel als Hohlkugel aus einem Metall von der Dichte Δ herzustellen wäre, nämlich gemäss der Gleichung:

$$\Delta\left[\frac{2}{3}Fd-\frac{2}{3}F\left(\frac{d-2x}{d}\right)^2(d-2x)\right]=\delta\cdot\frac{2}{3}Fd$$

$$1-\left(1-\frac{2x}{d}\right)^3=\frac{\delta}{\Delta}$$

$$x=\frac{d}{2}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{\delta}{\Delta}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Das hydrometrische Pendel ist nur zur Messung von w dicht unter der Wasseroberfläche geeignet, weil sonst auch der Faden dem Einflusse der Strömung wesentlich mit unterliegen und dann durch seine Biegung der am Gradbogen abzulesende Winkel α nach einem nur schwierig in Rechnung zu bringenden Gesetze modificirt werden würde. Es könnte zwar der Faden durch einen Draht ersetzt werden von hinlänglicher Dicke, um eine merkliche Biegung auszuschliessen, doch würde damit bei grösserer Tiefe der Kugel im Wasser eine wesentliche Störung des einfachen Abhängigkeitsgesetzes (3) zwischen w und α verbunden sein.

Auch bei der beschränkten Anwendung zur Messung der Oberflächengeschwindigkeit des Wassers ist der Stromquadrant zu den vollkommneren Instrumenten nicht zu zählen wegen der leicht bis zu 2^0 betragenden Schwankungen des Fadens. Nimmt man an, dass bei $\alpha=27^0$ der dem augenblicklichen Gleichgewichtszustande entsprechende Werth dieses Winkels mit einer Genauigkeit von 1^0 abgelesen werden könne (mit entsprechend grösserer Genauigkeit bei $\alpha<27^0$), so wäre allein aus diesem Grunde auf einen verhältnissmässigen Fehler von w

$$=\frac{\sqrt{tg\,28^0}-\sqrt{tg\,27^0}}{\sqrt{tg\,27^0}}=\sqrt{\frac{tg\,28^0}{tg\,27^0}}-1=0{,}022$$

zu rechnen. Unter diesen Umständen und bei der Unbequemlichkeit der Ablesung an dem dicht über der Wasseroberfläche befindlichen Gradbogen ist das hydrometrische Pendel z. Z. fast vollständig ausser Gebrauch gekommen.

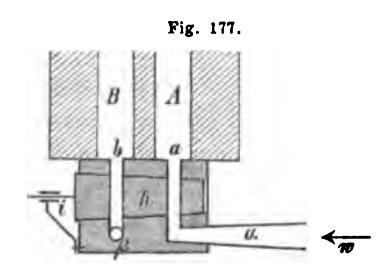
2. Die Pitot'sche Röhre besteht in ihrer einfachsten Form in einer rechtwinklig umgebogenen beiderseits offenen Röhre von solcher Lage, dass der kürzere untere Schenkel sich horizontal unter Wasser befindet und der Strömung entgegen gerichtet ist, während der andere



vertical aufwärts gerichtet aus dem Wasser herausragt. Im letzteren erhebt sich dann das Wasser bis zu einer gewissen Höhe h über das äussere Niveau nach Massgabe der Geschwindigkeit w des gegen die Oeffnung des horizontalen Schenkels gerichteten Wasserstroms. Durch verschiedene Verbesserungen dieses einfachen Instruments sind die ihm anhaftenden Mängel zu beseitigen gesucht worden, die in dem störenden Einflusse der Capillarität und in den die Ablesung erschwerenden Schwingungen der Wassersäule im verticalen Röhrenschenkel sowie in der Unbequemlichkeit und Unsicherheit solcher Ablesung nahe über der Wasseroberfläche begründet sind.

Der Einfluss der Capillarität kann dadurch eliminirt werden, dass statt einer Röhre deren zwei nahe neben einander liegend benutzt werden, die sich bis zu gleicher Tiefe abwärts in das Wasser erstrecken, so jedoch, dass nur die eine Röhre A, Fig. 177, eine dem Wasserstrom entgegen gerichtete Umbiegung α besitzt, während die andere unten mit zwei seitlich gegenüber liegenden Oeffnungen oder kurzen Rohransätzen β versehen ist, deren gemeinsame Axe die Axe des Rohrstückes α rechtwinklig schneidet. Indem dann jetzt unter h die Höhendifferenz der Wasseroberflächen in A und B verstanden wird, ist allerdings dieses h auch abgesehen vom Einflusse der Capillarität nicht mit dem obigen, d. i. mit der Höhe der Wassersäule in A über dem äusseren Niveau identisch, vielmehr im Allgemeinen grösser infolge einer Art von saugender Wirkung, welche der Wasserstrom an den Oeffnungen β der Röhre B theils wegen vergrösserter Geschwindigkeit, theils wegen auswärts convex gekrümmter Bahnen der Wassertheilchen ausüben kann; doch ist dieser Umstand, sofern er in allen Fällen auf gleiche Weise sich geltend macht, deshalb ohne Nachtheil, weil die Beziehung zwischen w und h bei der einen und anderen Bedeutung von h doch nur empirisch bestimmbar ist. Die Schwankungen der Wasserstände in den Röhren können durch Einschnürungen derselben, bezw. durch verengte Einmündungen a, b, Fig. 177, beliebig ermässigt werden; und wenn dann noch eine Einrichtung der Art getroffen wird, dass beide Röhren gleichzeitig durch einen Hahn h abgesperrt werden können, gewinnt man den Vortheil, dass die Ablesung von h bequem und sicher geschehen kann, nachdem das Instrument aus dem Wasser heraufgeholt wurde.

Fig. 177.

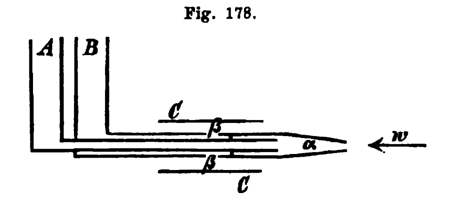




Auf diesen Erwägungen beruht die verbesserte Pitot'sche Röhre, welche als Reichenbach'scher Strommesser Anwendung gefunden hat. Die Glasröhren A, B, Fig. 177, von etwa 8 Millim. Weite sind dabei seitlich in einen hölzernen Schaft von linsenförmigem Querschnitte eingebettet; zwischen ihnen ist ein Massstab angebracht, dessen Nullpunkt in der Horizontalebene $\alpha\beta$ liegt, so dass die Ablesung nicht nur die Höhendifferenz h, sondern zugleich die Tiefe ergiebt, für welche die zu ermittelnde Geschwindigkeit w gilt. Der Hahn h kann an einem bei i befindlichen Arme durch einen aufwärts reichenden Draht gedreht werden; das Instrument wird mit offenem Hahn eingesenkt und dieser dann nach kurze Zeit lang ruhiger Haltung durch Anziehen des Drahtes geschlossen. Die verticale Haltung in solcher Lage, dass die Axe des Röhrenstücks α in die Stromrichtung fällt, kann ausser durch die flache Form des Schaftes noch weiter durch einen jenem Röhrenschenkel α entgegen gerichteten Steuerflügel unterstützt werden. Auch wird wohl die Metallfassung mit den Canälen $a\alpha$, $b\beta$ und dem Hahne h unten mit einem stabförmigen Fortsatze von regulirbarer Länge versehen, um damit das Instrument beim Gebrauche auf den Boden aufsetzen zu können.

Eine sehr wesentliche Verbesserung, wodurch das zeitraubende Herausheben des Instrumentes aus dem Wasser behufs jeder Ablesung vermieden wird, ist von Darcy angegeben worden und besteht darin, dass die Röhren A, B oben durch eine gemeinsame Fassung verbunden sind, vermittels welcher durch Saugen mit dem Munde an einem angesetzten Kautschukschlauch die Luft in beiden Röhren gleichzeitig in gleichem Maasse verdünnt und dadurch das Wasser ohne Aenderung der Niveaudifferenz h bis zu bequemer Beobachtungshöhe gehoben werden kann. Durch Drehung eines unterhalb dieser Stelle befindlichen Hahnes werden die gehobenen Wassersäulen abgesperrt, um nach Einstellung des Saugens die Ablesung vornehmen zu können; die Röhren A, B brauchen dann auch nur oberhalb der den Absperrhahn enthaltenden Fassung von Glas zu sein.

Fig. 178.



In Verbindung mit diesem Saugwerke ist von Prof. Amsler auch die Einrichtung der unteren Röhrenenden zweckmässig abgeändert worden.* Der verengte horizontale Schenkel des Rohres A ist nämlich, wie

* Rühlmann, Hydromechanik, 2. Aufl., §. 129.

Fig. 178 im Princip erkennen lässt, durch einen gleichfalls horizontalen Schenkel des Rohres *B* coaxial hindurchgeführt und der so entstandene enge hohlcylindrische Raum an einer gewissen Stelle (rechts von $\beta\beta$ in Fig. 178) abgeschlossen, dicht davor aber mit dem äusseren Wasser durch Oeffnungen β, β in Communication gesetzt, die in Fig. 178 als oben und unten liegend angegeben sind, in der That aber seitlich sich befinden. Endlich sind an dieser Stelle die genannten horizontalen Rohrschenkel durch einen mit ihnen coaxialen beiderseits offenen Hohlcylinder *C* umgeben worden, der das Wasser zwingt, in geradlinigen Bahnen an den Oeffnungen β vorbeizufliessen. Dadurch wird nicht nur die saugende Wirkung des Wasserstroms auf die in *B* befindliche Wassersäule vermindert, sondern auch namentlich unabhängig gemacht von der Stelle, wo die Geschwindigkeit w, ob nahe der Canalwand oder an einer mittleren Stelle, gemessen werden soll.

Was nun die Beziehung zwischen h und w betrifft, so sei

F_1 die Grösse der dem Wasserstrome entgegen gerichteten Mündung des Rohrs *A*,

F_2 die Gesammtgrösse der seitlichen Mündungen β, β des Rohrs *B*,

h_1 die Erhebung des Wassers in *A* über das äussere Niveau,

h_2 die Senkung des Wassers in *B* unter das äussere Niveau,

γ das specifische Gewicht des Wassers,

g die Beschleunigung der Schwere,

so entsprechen dem Gleichgewichtszustande die Gleichungen:

$$\vartheta_1 \gamma F_1 \frac{w^2}{2g} = \gamma F_1 h_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_2 \gamma F_2 \frac{w^2}{2g} = \gamma F_2 h_2,$$

unter ϑ_1 und ϑ_2 Coefficienten verstanden, die von der Beschaffenheit des Instrumentes, von w aber nur in untergeordnetem Grade abhängen, so dass sie innerhalb mässig weiter Grenzen von w als constant für das betreffende Instrument zu betrachten sind. Aus jenen Gleichungen folgt:

$$h_1 = \vartheta_1 \frac{w^2}{2g}, \qquad h_2 = \vartheta_2 \frac{w^2}{2g}$$

$$h = h_1 + h_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2)\frac{w^2}{2g} = \frac{w^2}{k^2}; \quad w = k\sqrt{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6,$$

unter k einen Coefficienten verstanden, der für jedes Instrument besonders aus bekannten zusammengehörigen Werthen von w und h abgeleitet werden muss. In der Regel liegt er zwischen 3,5 und 4, wenn w und h in Metern ausgedrückt sind, entsprechend

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2g}{k^2} = 1{,}6 \text{ bis } 1{,}2.$$

Der verbesserten Pitot'schen Röhre wird der Rang als brauchbarer Strommesser nur durch den hydrometrischen Flügel streitig gemacht. Letzterem kann sie dann vorgezogen werden, wenn es sich um Messungen handelt, die sehr nahe an der Canalwand ausgeführt werden sollen, besonders wenn zugleich durch mehrmalige Wiederholung der Messung an derselben Stelle behufs Gewinnung eines Mittelwerthes von h jener Mangel thunlichst ausgeglichen wird, der einem momentan wirkenden Strommesser im Gegensatze zu einem totalisirenden eigenthümlich ist.

§. 163. Anemometer.

Instrumente zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Luft oder überhaupt von Gasen* können zwar im Allgemeinen nach denselben Principien eingerichtet und benutzt werden wie die in den vorigen Paragraphen besprochenen im engeren Sinne sogenannten Strommesser, doch kommen dabei auch manche Unterschiede in Betracht, bedingt theils durch die viel grössere Leichtigkeit der Luft im Vergleich mit Wasser, theils durch die abweichende Art der Begrenzung, die bei als Wind bewegter freier atmosphärischer Luft gar nicht angebbar, in anderen Fällen aber so beschaffen ist, dass sie im Gegensatze zu dem in offenen Canälen strömenden Wasser eine von aussen her seitliche Einführung des Messinstrumentes in den Luftstrom ausschliesst. Die Benutzung eines Schwimmers, der hier ein im Luftstrome frei schwebender Körper sein müsste, ist deshalb kaum thunlich, weil, wenn es auch möglich wäre, den Körper so herzustellen, dass er beständig genau so schwer wie die verdrängte Luft ist, derselbe allen Störungen der regelrechten Strömung nachgeben und dann meistens nicht gestatten würde, aus seiner beobachteten Bewegung auf die Strömungsgeschwindigkeit der Luft nach bestimmter Richtung mit der nöthigen Sicherheit zu schliessen.

Uebrigens können die Anemometer von totalisirender oder von momentaner Wirkung und können sie ferner mit Registrirwerken versehen sein, letzteres namentlich bei dauernder Functionirung zu meteorologischen Zwecken, nämlich zur Aufzeichnung der wechselnden atmosphärischen Windgeschwindigkeit. Dabei sind die Instrumente entweder so beschaffen, dass ihre Wirksamkeit von der horizontalen, überhaupt von der in einer

* Geschichtliche Daten und Quellenangaben enthält u. A. Rühlmann's Hydromechanik, 2. Aufl., §. 208.



Ebene variablen Windrichtung unabhängig ist, oder sie stellen sich automatisch, etwa mit Hülfe eines Steuerflügels in die jeweils herrschende Windrichtung ein; letzteren Falles ist bei den Anemometern meteorologischer Observatorien die Richtung des Instrumentes als betreffende Windrichtung gleichfalls zu registriren, während im ersteren Falle besondere Instrumente dazu vorhanden sind. Bei den zu technischen Zwecken dienenden Anemometern, um welche es sich hier hauptsächlich handelt, können dergleichen Complicationen meistens wegfallen, indem dabei die Strömungsrichtung gegeben zu sein pflegt (z. B. mit der Richtung eines Ventilationscanals, des Zu- oder Ableitungscanals der Verbrennungsluft einer Feuerung u. s. f.) und auch meistens die Messung für eine kürzere Zeit in Gegenwart eines Beobachters genügt.

Für solchen Fall der Strömung in einem röhrenförmigen Canal hat die Kenntniss der Luftgeschwindigkeit in der Regel nur mittelbares Interesse zur Bestimmung der Luftmenge, die in der Zeiteinheit einen Canalquerschnitt durchströmt. Dazu sind totalisirende Instrumente am geeignetsten und auch vorzugsweise in Benutzung, nämlich als rotirende Anemometer, deren Rotationsaxe entweder die Richtung der Luftströmung hat (anemometrischer Flügel) oder senkrecht zu derselben ist (Robinson's Anemometer). Für meteorologische Observatorien würden zwar momentan wirkende Anemometer insofern vorzuziehen sein, als das mit einem solchen verbundene Registrirwerk unmittelbar den stetigen Verlauf der Windgeschwindigkeit aufzeichnen könnte; indessen sind solche bis jetzt weniger ausgebildet und deshalb auch zu diesem Zwecke fast ausschliesslich jene Windräder, besonders das Robinson'sche Anemometer in Gebrauch, obschon dann die Registrirung (neben derjenigen der wechselnden Windrichtung) unmittelbar nur die mittleren Windgeschwindigkeiten in aufeinander folgenden endlichen Zeitintervallen betrifft.

1. Der anemometrische Flügel ist sowohl an sich wie bezüglich seines Zählwerkes von gleicher Form und Einrichtung wie der hydrometrische Flügel (§. 161), nur leichter in allen Theilen construirt entsprechend der geringeren Masse und somit auch dem bei gleicher Geschwindigkeit kleineren Drucke bewegter Luft im Vergleich mit Wasser. Uebrigens ist nicht der anemometrische Flügel dem hydrometrischen, sondern umgekehrt dieser, von welchem als Woltmann'schem Flügel erst seit 1790 die Rede ist, jenem nachgebildet, der insbesondere als ein von dem damaligen Professor Wolff in Halle benutztes Instrument schon in Leupold's im Jahre 1724 erschienenem Werke „theatrum machinarum generale“ neben anderen Anemometern besprochen wird. Ebenso wie

beim hydrometrischen Flügel sind auch hier schraubenförmige Flügelflächen den ebenen vorzuziehen, indem dadurch theils der Luftwiderstand gegen die Rotation des Flügelrades vermindert, also die Empfindlichkeit erhöht, theils die Brauchbarkeit der Formel

$$w = a + bn \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gesteigert wird, durch welche hier wie dort die Beziehung zwischen der Strömungsgeschwindigkeit w und der Umdrehungszahl n pro Secunde dargestellt werden kann, unter a und b Constante verstanden, die für jedes Instrument besonders bestimmt werden müssen.

Diese Bestimmung erfordert eine nähere Besprechung, weil sich die dazu dienenden zusammengehörigen Werthe von w und n hier nicht so einfach und sicher wie beim hydrometrischen Flügel gewinnen lassen. Eine andere Messungsmethode zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit w ist hier nicht anwendbar, weil es eine zuverlässigere, als mit dem anemometrischen Flügel selbst, nicht giebt und bei Benutzung eines solchen Instrumentes, für welches die Constanten a, b der Gleichung (1) früher ermittelt waren, die ihnen anhaftenden Fehler mit weiteren Bestimmungsfehlern verbunden auf die Constanten des neuen Instrumentes übertragen werden würden. Analog dem Verfahren, den hydrometrischen Flügel im Sinne seiner Axe mit bekannter Geschwindigkeit w durch stehendes Wasser zu bewegen, um so zusammengehörige Werthe von w und n zu erhalten, könnte man das Anemometer vermittels eines mit bekannter Geschwindigkeit auf einer Eisenbahn laufenden Wagens durch möglichst ruhige Luft bewegen; allein abgesehen davon, dass dieses Hülfsmittel selten zur Verfügung wäre, würden auch wahrscheinlich durch das Fahrzeug mehr störende Bewegungen in der davor befindlichen Luft, als durch einen Kahn in dem voraus befindlichen Wasser verursacht werden. Eine Commission, die vom sächsischen Ingenieur- und Architekten-Verein seit längerer Zeit zum Studium der Prüfungsmethoden von Anemometern eingesetzt worden ist, hat zu dem Ende durch ein Versuchsrohr, in welchem das zu untersuchende Anemometer angebracht wurde, bekannte Luftmengen theils durch eine niedersinkende Gasometerglocke hindurchgepresst, theils später durch Ablassen von Wasser aus einem geschlossenen Gefässe hindurchgesaugt; allein wenn auch dadurch ein Luftstrom von hinlänglich bekannter mittlerer Geschwindigkeit zu erhalten war, so blieb doch das Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten im Querschnitte und somit das Verhältniss jener bekannten mittleren zu der durchschnittlichen Geschwindigkeit der die Flügel treffenden Lufttheilchen so unsicher, dass diese Prüfungsmethode von der Commission später als unzuverlässig auf-

gegeben und mit dem zu diesem Zwecke fast allgemein üblichen Verfahren vertauscht wurde.

Dasselbe besteht darin, dass eine verticale Welle *W* in möglichst gleichförmige Rotation versetzt wird, nachdem zuvor auf einem mit ihr rotirenden horizontalen Arme das Instrument so angebracht wurde, dass die Flügelaxe tangential an den vom Flügelmittelpunkte durchlaufenen Kreis gerichtet ist. Wenn nicht eine durch Elementarkraft in gleichförmiger Drehung befindliche Welle zur Verfügung ist, von welcher aus mit regulirbarem Umsetzungsverhältnisse die Welle *W* umgetrieben werden kann, diese vielmehr wie gewöhnlich durch Handbetrieb mit Kurbel und geeigneter Transmission bewegt werden muss, so ist bei einiger Uebung eine genügend gleichförmige Drehung dadurch zu erzielen, dass die hörbaren Stösse von einigen gleichförmig ringsum vertheilten (etwa 4, je einer Viertelumdrehung entsprechenden) Anschlagstiften der Welle *W* gegen eine am Gestell feste Feder *F* mit den Pendelschlägen eines Metronoms im Einklang erhalten werden. Aus dem beobachteten Winkelwege der Welle *W* während einer gewissen Zeit t und dem bekannten Radius der kreisförmigen Bahn des Flügelmittelpunktes ergiebt sich dann die Geschwindigkeit dieses Punktes $= w_0$, während die entsprechende Umdrehungszahl des Flügelrades (daraus n durch Division mit t) an einem Zählwerke abzulesen ist. Die Ein- und Ausrückung des letzteren zu Anfange bezw. zu Ende der Zeit t kann entweder, wie bei dem Apparate der oben erwähnten sächsischen Commission, durch mechanische Transmission von der Welle *W* aus längs dem das Instrument tragenden Arme bewirkt werden, oder besser durch elektrische Ströme, wie z. B. bei einem seit 1862 von Rühlmann und v. Quintus-Icilius eingerichteten Apparat der technischen Hochschule zu Hannover.* Am genauesten dürfte das von Recknagel benutzte Verfahren elektrischer Bestimmung zugleich von w_0 und von n sein, darin bestehend,** dass in einen mit bekannter gleichförmiger Geschwindigkeit durch ein Uhrwerk fortbewegten Papierstreifen durch Stromschluss je ein Nadelstich gemacht wird, so oft das Flügelrad eine gewisse Zahl von Umdrehungen (in jenem Falle 25) gemacht hat, während gleichzeitig die Stösse vorgenannter Anschlagstifte der Welle *W* gegen die Feder *F* andere Stromschlüsse und dadurch eine zweite Reihe von Nadelstichen im Papierstreifen, die zur Bestimmung von w_0 dienen, zur Folge haben.

---

* Mittheilungen des Hannov. Gewerbevereins, 1862, S. 264.

** Annalen der Physik und Chemie. 1880. Neue Folge. Bd. X, S. 677.

Mögen nun aber auch die zusammengehörigen Werthe von w_0 und n noch so zuverlässig gefunden sein, so entsteht doch die Frage, ob es zulässig ist, jenem w_0 die relative Geschwindigkeit w der Luft gegen den Flügel im Sinne der Axe desselben gleich zu setzen, und ob ferner die Beziehung zwischen diesem w und n dieselbe ist, wie sie im Falle einer geradlinigen statt kreisförmigen Bewegung des Instrumentes in der Luft sich ergeben hätte. Letzteres wird besonders deshalb nicht ganz der Fall sein, weil durch die Centrifugalkraft des Flügels in Folge seiner Drehung um W, sowie durch den ungleichen Luftdruck auf die in ungleichen Abständen von W befindlichen Flügeltheile die Reibung der Flügelwelle in ihren Lagern nothwendig vergrössert, folglich auch die Constante a in Gl. (1) etwas zu gross gefunden wird. Indem übrigens diese Constante bei grösseren Geschwindigkeiten w überhaupt nur von untergeordneter Bedeutung ist, kann man passend so verfahren, dass man mit einem erfahrungsmässig angenommenen Mittelwerthe von a, etwa $a = 0,2$ Mtr., zuerst nur den Werth von b aus den Versuchen ableitet und mit diesem dann einen corrigirten Werth von a aus den Versuchen mit kleinen Geschwindigkeiten w, für welche die genannten Störungen von geringerer Bedeutung sind.

Wichtiger ist die Frage nach der Zulässigkeit der Gleichung $w = w_0$. In der That wird nämlich die Luft durch die Arme der Welle W und durch die von ihnen getragenen Instrumente selbst in Bewegung versetzt, so dass die letzteren nach einer vollen Umdrehung um W nicht mehr ruhende Luft vor sich haben, sondern in einem von Recknagel so genannten Mitwinde sich bewegen, dessen Geschwindigkeit w_1 von w_0 abgezogen werden muss, um $w = w_0 - w_1$ zu liefern, falls dieses w_1 nicht etwa im Vergleich mit Bestimmungsfehlern von w_0 und n von unerheblicher Grösse ist, wie meistens angenommen wird. Recknagel hat diese Annahme genauer, als seither geschehen war, geprüft auf Grund der Erwägung, dass fraglicher Mitwind erst mit der zweiten Umdrehung der Welle W beginnt und dass schon eine Viertelumdrehung derselben bei einiger Uebung die hinlänglich gleichförmige Winkelbewegung erzielen liess, bei welcher die übrigen $^3/_4$ der ersten Umdrehung von W ausreichend waren, um aus den entsprechenden ungefähr 50 Umdrehungen des von Recknagel benutzten Anemometers einen Werth von n ohne Mitwind zu erhalten, der dann nur mit dem bei unveränderter Winkelgeschwindigkeit der Welle W, also unveränderter Grösse von w_0 gefundenen Werthe von n für die folgenden, also unter Einfluss des Mitwindes stattfindenden Umdrehungen verglichen zu werden braucht,

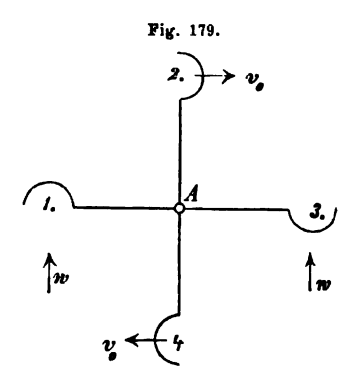
um daraus auf w_1 schliessen zu können. So ergab sich für 0,3 Mtr. Höhe der Flügelwelle über dem das Instrument tragenden Arme und für 2 Mtr. Abstand von der Welle W die Geschwindigkeit w_1 des Mitwindes nahe proportional der 1 bis 6 Mtr. betragenden Geschwindigkeit w_0, und zwar im Mittel

$$w_1 = 0,05\, w_0, \quad \text{entsprechend} \quad w = 0,95\, w_0 \quad \ldots\ldots (2).$$

Als aber das Anemometer in nur 1 Mtr. Entfernung von der Wellenaxe wieder 0,3 Mtr. über dem Arme befestigt wurde, war bis zu $w_0 =$ 4,7 Mtr. ein Mitwind nicht wahrzunehmen, indem die gefundenen kleinen Werthe von w_1 theils positiv, theils negativ waren und innerhalb der wahrscheinlichen Fehlergrenzen lagen. Die der Luft mitgetheilte Bewegung scheint danach von eigenthümlicher Art, innen vorwiegend radial gerichtet zu sein und nur nach aussen hin mehr und mehr zugleich tangential zu werden, so dass auch die Beziehung (2) nicht als allgemein gültig zu betrachten, vielmehr besser für jeden Fall einer besonderen Controle zu unterwerfen sein wird.

2. Bei dem Robinson'schen Anemometer besteht das Windrad aus 4 hohlen Halbkugeln, welche, von einem rechtwinkligen Armkreuze getragen, um eine verticale Axe A in dem Sinne durch den Winddruck in Rotation versetzt werden, dass ihre convexen Seiten vorausgerichtet sind: siehe Fig. 179, in welcher mit v_0 die dieser Drehung entsprechende Geschwindigkeit der Halbkugelmittelpunkte bezeichnet und ferner eine solche augenblickliche Lage des Windrades vorausgesetzt ist, dass die Windgeschwindigkeit w die Richtung von der Halbkugel 4 gegen die Halbkugel 2 hat. Indem sich diese Lage des Windrades stetig ändert, ist sein Gesammtverhalten für jede Viertelumdrehung von der horizontalen Windrichtung ganz unabhängig und dadurch der Vortheil dieses Instrumentes zur Geschwindigkeitsmessung horizontaler Strömungen der freien Luft von beliebig variabler Richtung begründet, während es zu Messungen in Canälen sich weniger eignet, als der anemometrische Flügel.

Fig. 179.



Was die Beziehung zwischen w und v_0 betrifft, so sei v_1 die Geschwindigkeit, in welche, abgesehen von der Windgeschwindigkeit w, die Luft durch die Drehung des Rades und zwar in dem von den Halb-

kugelmittelpunkten durchlaufenen Kreise versetzt wird. Dann ist mit Rücksicht auf w die Geschwindigkeit der Luft am Orte der Halbkugel $1 = w + v_1$ und ihre relative Geschwindigkeit gegen diese Halbkugel

$$= w + v_1 - v_0 = w - (v_0 - v_1) = w - v,$$

wenn $v_0 - v_1 = v$ gesetzt wird. Dagegen ist die Geschwindigkeit der Luft am Orte der Halbkugel $3 = w - v_1$ und ihre relative Geschwindigkeit gegen dieselbe

$$= w - v_1 + v_0 = w + v.$$

Der Ueberschuss des Momentes, mit welchem der Luftdruck auf die Halbkugel 1 die Drehung des Rades zu beschleunigen strebt, über das Moment des wiederstehenden Luftdrucks gegen die Halbkugel 3 kann somit

$$= a_1 (w - v)^2 - a_2 (w + v)^2$$

gesetzt werden, wo a_1 wesentlich $> a_2$ ist, indem die relativen Luftgeschwindigkeiten $w - v$ und $w + v$ beziehungsweise gegen die concave und gegen die convexe Seite gerichtet sind. Die Halbkugeln 2 und 3 erfahren zusammen einen Widerstand, dessen Moment $= 2 a_2 v^2$ gesetzt werden kann, jedoch unter Einrechnung des durch das Armkreuz verursachten Widerstandes $= a v^2$ gesetzt werden mag, so dass sich das resultirende Moment des Luftdrucks auf das ganze Windrad

$$= a_1 (w - v)^2 - a_2 (w + v)^2 - a v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ergiebt, freilich zunächst nur für die aus Fig. 179 ersichtliche Lage. In anderen Lagen ist der relative Luftstrom für zwei Halbkugeln schräg gegen die concaven Hinterflächen, für die zwei anderen schräg gegen die convexen Vorderflächen gerichtet, so dass während jeder Vierteldrehung sich das resultirende Moment etwas ändern und das Windrad thatsächlich einen periodisch etwas veränderlichen Gang annehmen kann. Wenn indessen hiervon abgesehen und mit vermuthlich kleinem Fehler der mittlere Zustand als dauernd vorhanden betrachtet wird, so ist der Ausdruck (3) mit entsprechenden Werthen der Coefficienten a, a_1 und a_2 auch für den Mittelwerth des betreffenden Momentes als näherungsweise gültig zu betrachten, und weil dann derselbe für den Beharrungszustand dem Reibungsmomente der Welle A gleich sein muss, das unter Einrechnung des Widerstandes eines Zählwerkes mit a_0 bezeichnet sei, ergiebt sich die Gleichung:

$$a_1 (w - v)^2 - a_2 (w + v)^2 - a v^2 = a_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

aus welcher folgt:

$$(a_1 - a_2)\,w^2 - 2\,(a_1 + a_2)\,wv + (a_1 - a_2 - a)\,v^2 = a_0$$

$$w = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\,v \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)^2 - 1 + \frac{a}{a_1 - a_2}\right]v^2 + \frac{a_0}{a_1 - a_2}}$$

$$= \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\,v + \sqrt{\left(\frac{4\,a_1 a_2}{(a_1 - a_2)^2} + \frac{a}{a_1 - a_2}\right)v^2 + \frac{a_0}{a_1 - a_2}} \quad \ldots (5).$$

Das Wurzelglied kann hier nur das positive Vorzeichen haben, weil aus Gl. (4) folgt:

$$a_1\,(w - v)^2 > a_2\,(w + v)^2; \qquad \frac{w - v}{w + v} > \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}$$

$$\frac{w}{v} > \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}, \text{ d. i. } > \frac{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2}{a_1 - a_2} > \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}.$$

Bei Vernachlässigung des verhältnissmässig kleinen Gliedes mit a_0 würde aus Gl. (5) sich w proportional v ergeben, insbesondere z. B. mit den der Wahrheit vermuthlich nahe kommenden Verhältnissen

$$a = 2\,a_2 \quad \text{und} \quad a_1 = 4\,a_2$$

$$w = \left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{2}{3}}\right)v = \frac{5 + \sqrt{22}}{3}\,v = 3{,}23\,v.$$

Robinson giebt an: $w = 3v_0$, so dass dann

$$v = \frac{3}{3{,}23}\,v_0 = 0{,}93\,v_0, \quad \text{also} \quad v_1 = 0{,}07\,v_0$$

wäre. Bei der Zweifelhaftigkeit dieser Annahme ist übrigens aus Gl. (5) selbst bei Voraussetzung der Proportionalität zwischen v und v_0 und somit zwischen v und der Umdrehungszahl n pro Secunde nur zu folgern, dass, unter γ, β, α Constante verstanden, die von den Dimensionen des betreffenden Instrumentes abhängen, die Beziehung zwischen w und n näherungsweise die Form hat:

$$w = \gamma n + \sqrt{\beta n^2 + \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (2) in §. 161. Wegen Kleinheit von α kann dafür in erster Annäherung $w = bn$ gesetzt werden oder besser:

$$w = a + bn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

wie für den anemometrischen Flügel, unter a und b auch hier wieder Constante verstanden, deren wahrscheinlichste Werthe für jedes Instrument besonders aus Versuchen abgeleitet werden müssen.

Ebenso wohl begründet, wie dort, ist indessen die Gleichung (1) hier namentlich deshalb nicht, weil ihr die zweifelhafte Annahme der

Proportionalität von v und v_0, also von v und n zu Grunde liegt. Auch ist die versuchsmässige Bestimmung der Constanten a, b hier mit grösseren Schwierigkeiten verbunden. Der zu Versuchen mit anemometrischen Flügeln dienliche Rotationsapparat ist hier nicht wohl brauchbar, weil das von ihm mit verticaler Axe in einer Cylinderfläche herumgeführte Robinson'sche Anemometer sich hierbei unter Verhältnissen befinden würde, die von denen, in welchen es sich später beim Gebrauche befindet, allzu sehr verschieden sind. Die geradlinige Fortbewegung mit Hülfe eines Wagens, der eine bekannte Weglänge in einer gewissen zu beobachtenden Zeit durchfährt, erscheint hier als das geeignetste Mittel, um brauchbare, zusammengehörige Werthe zur Bestimmung der Constanten zu gewinnen.

3. Momentan wirkende Anemometer können nach denselben Principien hergestellt werden, welche im §. 162 für momentan wirkende Strommesser besprochen wurden. Auch hier gilt die Gleichung:

$$w = C\sqrt{P},$$

unter C eine empirisch zu bestimmende Constante und unter P den Druck des Luftstroms von der Geschwindigkeit w auf einen ihm ausgesetzten festen oder flüssigen Körper verstanden. Wenn C bekannt ist. erfordert dann die Bestimmung von w nur die jeweilige Messung von P, am besten nach dem Princip der Zeiger- oder Federwaage in der Weise, dass P von selbst mit einer bekannten Schwerkraft oder Federkraft in Gleichgewicht kommt und nur eine Skalenablesung erforderlich ist, um daraus auf die betreffende Gleichgewichtslage, somit auf P und auf w schliessen zu können.

Schon Leupold hat in seinem im Jahre 1724 erschienenen „theatrum machinarum generale“ ein solches Anemometer angegeben. Eine von einem kleinen Rollwagen getragene ebene Tafel wird dabei rechtwinklig dem Luftstrome ausgesetzt und das Gleichgewicht des jeweiligen Druckes P auf dieselbe mit einem constanten Gegengewichte G dadurch vermittelt, dass beide Kräfte in entgegengesetztem Sinne drehend auf eine horizontale Welle W wirken, P an einem constanten, G an einem variablen Hebelarme. Die Welle W trägt nämlich neben einander eine Kreisscheibe und eine Spiralscheibe je mit einer am Umfange befestigten, sich auf- oder abwickelnden Schnur; die Schnur der Kreisscheibe ist andrerseits so am Rollwagen befestigt, dass sie durch P gespannt wird, während die Schnur der Spiralscheibe das Gewicht G trägt. Die ganze Vorrichtung ist in einem Rahmen angebracht, welcher, um eine verticale Axe drehbar, vermittels eines Steuerflügels in die Windrichtung sich einstellt,

Einfacher und praktischer ist es, nach dem Vorgange von **Bouguer** (1746 und 1775), den Winddruck P sich mit dem Drucke einer auf denselben Körper in entgegengesetztem Sinne wirkenden Feder in Gleichgewicht setzen zu lassen, das dann bei einer von P abhängigen und umgekehrt diesen Druck P bestimmenden Lage des Körpers eintritt.

Alle diese Instrumente leiden indessen an dem Uebelstande, dass ihre Angaben von Reibungswiderständen beinflusst werden, die von schwankender Grösse, insbesondere abhängig von der Genauigkeit sind, mit welcher das Instrument in die Windrichtung eingestellt und somit ein seitlicher Druck auf den ihm ausgesetzten in Führungen beweglichen festen Körper ausgeschlossen ist. Besser in dieser Hinsicht ist die Benutzung eines flüssigen Körpers ähnlich wie bei der als Strommesser dienenden Pitot'schen Röhre (§. 162), also die manometrische Messung des der Luftgeschwindigkeit w entsprechenden Druckes. Denkt man sich nämlich ein Manometer gebildet aus zwei Glasröhren a, b, welche in verticaler Stellung unten durch eine gemeinschaftliche Metallfassung (oder auch als die beiden Schenkel einer U-förmig gebogenen Röhre) communiciren und bis zu gewisser Höhe mit einer tropfbaren Flüssigkeit, insbesondere z. B. mit Wasser gefüllt sind, und von diesen Manometerröhren die eine, etwa a, am oberen Ende durch einen Schlauch mit dem einen Ende einer Röhre A verbunden, die am andern Ende mit ihrer Mündung dem betreffenden Luftstrome entgegengerichtet ist, so wird durch letzteren in der Röhre A eine Druckzunahme der Luft bewirkt, die sich durch den Schlauch mit gleicher Stärke auf die Wasseroberfläche in der Manometerröhre a überträgt und hier eine Senkung, in der Röhre b eine entsprechende Hebung der Wasseroberfläche zur Folge hat; die Höhendifferenz beider $= h$ gestattet dann einen Schluss auf die Luftgeschwindigkeit w, mit welcher sie nach einem gewissen Gesetze zunimmt. Freilich wird es hierbei oft der Fall sein, dass der atmosphärische Druck an der Wasseroberfläche im Manometerrohre b von dem Drucke der das Rohr A an seiner Mündung umgebenden Luft wesentlich verschieden ist, und dass diese Differenz folglich wesentlichen Antheil an der manometrischen Höhendifferenz h hat; um aber diesen Einfluss zu eliminiren, bedarf es nur einer ähnlichen Einrichtung, wie bei der verbesserten Pitot'schen Röhre, nämlich der Anordnung eines zweiten Rohres B neben dem Rohre A, welches durch eine seitliche Oeffnung oder mehrere dergleichen mit dem betreffenden Luftstrome communicirt, etwa nach Art der Figur 178, und der Verbindung des anderen Endes dieser Röhre B durch einen Schlauch mit dem oberen



Ende des Manometerrohrs b. Ist dann analog den Bezeichnungen im §. 162 für die Pitot'sche Röhre

h_1 die Höhe einer Wassersäule (überhaupt einer Säule der manometrischen Flüssigkeit, durch welche die Druckvermehrung in den Röhren A, a gemessen wird),

h_2 die ebenso verstandene Höhe, welche der etwaigen Druckverminderung in den Röhren B, b entspricht,

γ das specifische Gewicht des Wassers (überhaupt der manometrischen Flüssigkeit),

λ das specifische Gewicht der Luft,

so kann, unter ϑ_1 und ϑ_2 erfahrungsmässige Constante verstanden, die von der Beschaffenheit des Instruments, insbesondere von der Beschaffenheit der Röhren A, B an ihren mit dem Luftstrome communicirenden Mündungen abhängen, gesetzt werden:

$$\vartheta_1 \lambda \frac{w^2}{2g} = \gamma h_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_2 \lambda \frac{w^2}{2g} = \gamma h_2,$$

woraus sich die resultirende manometrische Höhendifferenz

$$h = h_1 + h_2 = (\vartheta_1 + \vartheta_2) \frac{\lambda}{\gamma} \frac{w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

ergiebt, also

$$w = k \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2g\gamma}{\vartheta_1 + \vartheta_2}} \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

Ein Uebelstand ist es, dass die Höhe h nach Gl. (7) im Verhältnisse $\lambda : \gamma$, d. i. etwa im Verhältnisse $1 : 800$ kleiner ist, als sie bei der einem Wasserstrome ausgesetzten Pitot'schen Röhre unter sonst gleichen Umständen sein würde. Jedenfalls sind deshalb besondere mikrometrische Hülfsmittel erforderlich, um die Grösse h mit der nöthigen Genauigkeit messen zu können, z. B. zugespitzte Mikrometerschrauben, die von oben her zur Berührung mit den Wasseroberflächen in den Manometerröhren a, b gebracht werden, oder wenigstens eine solche Mikrometerschraube, falls das Querschnittsverhältniss der Röhren a, b hinlänglich constant und bekannt ist. Ist die Ganghöhe der Schraube etwa $= 0{,}5$ Millim. und ihre Mutter mit einer Kreistheilung versehen, welche 0,01 Umdrehung abzulesen gestattet, so würde die Höhenlage der betreffenden Wasseroberfläche bis auf 0,005 Millim. genau bestimmt werden können, falls andere störende Umstände, z. B. die Capillarität durch grosse Rohrweiten, fern gehalten sind.

Die oben erwähnte Anemometer-Prüfungscommission des sächsischen Ingenieur- und Architektenvereins ermittelte z. B. für die von ihr benutzten Röhren A, B die Formel:

$$w = 4{,}785 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \text{ Mtr.,}$$

falls die manometrische Druckhöhendifferenz h in Millimetern Wassersäule und das specifische Gewicht λ der Luft in Kilogrammen pro Cubikmeter ausgedrückt sind. Danach wäre, wenn h in Metern ausgedrückt ist,

$$k = 4{,}785 \sqrt{1000}$$

und würde sich damit aus Gl. (8) mit $\gamma = 1000$ ergeben:

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2g \,.\, 1000}{k^2} = \frac{2 \,.\, 9{,}81}{(4{,}785)^2} = 0{,}86.$$

Bei den Versuchen, aus welchen der Coefficient 4,785 abgeleitet wurde, lagen die Werthe von w zwischen 1 und 10 Metr. pro Secunde, erhalten mit Hülfe desselben Rotationsapparates, der auch zur Prüfung der anemometrischen Flügel diente. Auf demselben wurde die Röhre A mit horizontal voraus gerichteter, die Röhre B mit vertical gerichteter und durch einen horizontalen dünnwandigen Flansch eingefasster Mündung befestigt, während die von diesen Röhren andrerseits ausgehenden Schläuche unter Glocken mündeten, welche mit geeigneten Wasserverschlüssen über der Mitte des Rotationsapparates angebracht waren und von welchen aus andere Schläuche die Verbindung mit den Manometerröhren a, b herstellten. Uebrigens war es die Rotationsgeschwindigkeit der Röhrenmündungen A, B, welche mit Vernachlässigung eines etwaigen Mitwindes als relative Windgeschwindigkeit w bei diesen Versuchen angenommen wurde. Bei Voraussetzung eines Mitwindes von 5% dieser Rotationsgeschwindigkeit wäre

$$w = 0{,}95 \,.\, 4{,}785 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} = 4{,}55 \sqrt{\frac{h}{\lambda}},$$

entsprechend

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2 \,.\, 9{,}81}{(4{,}55)^2} = 0{,}95.$$

Während bei dem anemometrischen Flügel die als Maass von w dienende Umdrehungszahl n pro Secunde nur der ersten Potenz von w angenähert proportional ist, ist hier h proportional w^2 und deshalb bei Bestimmung der Proportionalitätsconstanten ein Messungsfehler von w hier von grösserem Einflusse, insbesondere auch bei Benutzung des Rotationsapparates die unsichere Kenntniss des Mitwindes hier nachtheiliger, als dort. In der Regel wird es deshalb vorzuziehen sein, die Bestimmung

der Constanten k in Gl. (8) durch Vergleichung des betreffenden Instruments mit einem sorgfältig geprüften anemometrischen Flügel auszuführen.

Schliesslich ist zu bemerken, dass alle hier besprochenen momentan wirkenden Anemometer den Uebelstand gemein haben, bezüglich ihrer Angaben vom specifischen Gewichte λ der in Strömung begriffenen Luft abhängig zu sein. Bei den totalisirenden Instrumenten unter 1. und 2. ist das nicht der Fall; z. B. ist beim Robinson'schen Anemometer nach Gl. (5) die Beziehung zwischen w und v nur von den verhältnissmässigen Grössen der Coefficienten a, a_1 und a_2 abhängig, welche zwar einzeln mit λ veränderlich sind, aber alle in gleichem Verhältnisse. Ebenso kann auch beim anemometrischen Flügel die Beziehung (1) zwischen w und n nur in ganz untergeordnetem Maasse durch die jeweilige Dichtigkeit der Luft beeinflusst werden, sofern die letztere nicht zwischen sehr weiten Grenzen veränderlich ist.

§. 164. Instrumente zur Messung der Schiffsgeschwindigkeit auf See.

Zu beständiger Controle des Ortes, wo sich ein Schiff jeweils auf dem Meere befindet, wird regelmässig etwa stündlich oder alle 2 Stunden seine Geschwindigkeit gegen das Wasser gemessen nach Methoden und mit Hülfsmitteln, die analog sind dem Gebrauche des Schwimmers, des hydrometrischen Flügels oder der Pitot'schen Röhre zur Messung der Geschwindigkeit des in offenen Canälen strömenden Wassers. Wenn dann gleichzeitig auch die Richtung aufgezeichnet wird, in welcher das Schiff nach dem Compass anliegt, d. h. der Winkel, den die Kielrichtung mit dem Meridiane bildet, und dieser Winkel, um die Richtung der Wasserbahn des Schiffes gegen die Erde zu erhalten, nöthigenfalls (bei starkem seitlichem Winde) mit Rücksicht auf die gepeilte Abtrift, d. h. mit Rücksicht auf den Winkel corrigirt wird, unter welchem die Kielrichtung gegen das sogenannte Kielwasser (einen mehr oder weniger weit vom Hintertheile des Schiffes aus sichtbaren, seine Wasserbahn anzeigenden Streifen gekräuselten Wassers) geneigt ist, so leuchtet ein, wie daraus durch Construction oder Rechnung der ganze Schiffsweg im Wasser während eines (von Mittag zu Mittag gerechneten) seemännischen Tages gefunden werden kann, der schliesslich noch im Falle von Meeresströmungen von bekannter Richtung und Stärke mit Rücksicht auf diese und auf die Zeit, während welcher sich das Schiff in ihrem Bereiche befunden hat, zu corrigiren ist, um als Weg des Schiffes gegen die Erde gelten zu

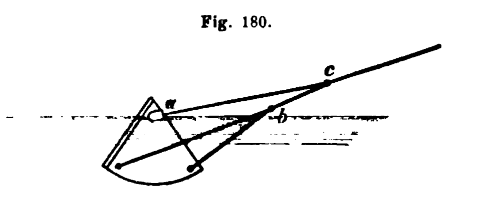


können. Mit diesem corrigirten Tageswege und dem bekannten Schiffsorte vom vorigen Mittag macht man das sogenannte Besteck, d. h. bezeichnet auf der Karte den Schiffsort des betreffenden Tages.

Ein Instrument zur Messung der Schiffsgeschwindigkeit auf See wird als Log, das Messen mit demselben als „loggen" bezeichnet. Die mancherlei Mängel des Besteckmachens mit Compass und Log machen es zwar nöthig, bei längeren Reisen das so erhaltene Besteck thunlichst oft durch astronomische Beobachtungen zu controliren, die geographische Breite täglich durch Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne, die Länge in mehrtägigen Fristen mit Hülfe des Chronometers (§. 141); indessen darf andrerseits wegen der Ungewissheit, ob die Witterung am nächsten Tage und vielleicht in mehreren Tagen eine astronomische Beobachtung möglich machen wird, das Besteckmachen mit Compass und Log als Nothbehelf auf offener See niemals unterlassen werden.

1. Das gewöhnliche Log, wie es seit Jahrhunderten gebräuchlich ist, besteht aus dem Logbrettchen, der Logleine und der Logrolle.

Fig. 180.



Das Logbrett (Fig. 180) ist ein hölzerner Sextant von 12 bis 15 Centimeter Radius und etwa 12 Millimeter Dicke, am Bogenrande durch einen Bleistreifen so beschwert, dass es in verticaler Lage mit nur etwas hervorragender Spitze *a* schwimmt.

Die Logleine ist mit den Ecken des Logbrettes durch 3 Zweigschnüre verbunden, an der Spitze *a* lösbar durch eine in ein entsprechendes Loch daselbst gesteckte hölzerne etwas conische Pinne, die sich am Ende der oberen Zweigschnur *ac* befindet; durch einen Ruck an der Logleine entgegen dem Widerstande des Wassers kann diese Verbindung gelöst werden, um das Logbrett flach liegend mit kleinem Widerstande einzuholen. Auch ist wohl bei fester Verbindung an der Stelle *a* die lösbare Pflockverbindung zwischen *b* und *c* angeordnet, wodurch theils der dieselbe lösende Zug an der Leine eine weniger schräge und zu Klemmung Veranlassung gebende Richtung erhält, theils die Einholung des Logbrettes mit vorausgerichteter Spitze noch etwas leichter geschehen kann. Die Leine ist durch Knoten (eingedrehte Zeugstreifen von verschiedener Farbe) in Strecken von je $\frac{1}{240}$ oder $\frac{1}{120}$ Seemeile getheilt, also, da eine Seemeile $= \frac{1}{4}$ geographische Meile $= 1855$ Meter ist,

in Strecken von

$$\frac{1855}{240} = 7{,}73 \text{ bezw. } 15{,}46 \text{ Meter}$$

Länge. Indessen befindet sich zwischen dem Logbrette und dem ersten Knoten eine Strecke von 20 bis 40 Metr. je nach der Grösse des Schiffes, damit durch diesen sogenannten Vorlauf das Log dem Einflusse des unruhigen Kielwassers hinlänglich entzogen und die Neigung der Leine gegen den Horizont hinlänglich klein geworden sei, wenn mit dem Ablaufe des ersten Knotens von Bord des Schiffes die eigentliche Messung beginnt. Letztere dauert 15 oder 30 Secunden, d. i. $^1/_{240}$ oder $^1/_{120}$ Stunde, jenachdem die Strecke zwischen zwei aufeinander folgenden Knoten der Leine $= \frac{1}{240}$ oder $= \frac{1}{120}$ Seemeile gewählt ist, und zwar ist es üblich, dieses Zeitintervall hier vermittels einer Sanduhr, des sogenannten Logglases, abzumessen.

Die Logrolle ist eine leicht construirte länglich cylindrische Rolle, die um einen an den Enden mit Handgriffen versehenen cylindrischen Stab als Axe leicht drehbar und auf welche die Logleine in losen Windungen aufgewickelt ist, um beim Loggen von der sich entsprechend drehenden Rolle mit nur kleinem Widerstande ablaufen zu können.

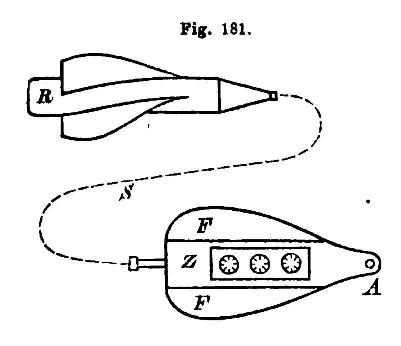
Zur Ausführung des Loggens dienen 3 Personen *A*, *B*, *C*; *A* hält den Stab, um welchen die Rolle drehbar ist, horizontal zwischen den Händen, *B* nimmt das Logglas, die mit Sand gefüllte Abtheilung nach unten gekehrt, *C* wirft das Logbrett mit eingesteckter Pinne vom Hintertheil des Schiffes aus über Bord und lässt sich die Leine leicht durch die hohle Hand laufen. Wenn *C* sieht oder fühlt, dass der erste Knoten die Hand passirt, giebt er ein Zeichen (turn!), worauf *B* das Logglas dreht und seinerseits ein Zeichen giebt (stop!), sobald es abgelaufen ist. Auf dieses Zeichen hält *C* sofort die Leine fest, löst mit einem Ruck die Pinne und misst durch Greifen mit ausgebreiteten Armen die Entfernung bis zu dem Knoten ab, der zuletzt die Hand passirt hat; die Farbe und sonstige Beschaffenheit desselben lässt erkennen, wie viel ganze Knotenlängen ausser dem durch Abgreifen geschätzten Bruchtheile einer solchen während der Beobachtungszeit von 15 oder 30 Secunden sich von der Rolle abgewickelt haben. Ebenso gross ist die augenblickliche Schiffsgeschwindigkeit in Knoten, d. i. in Seemeilen pro Stunde. Wegen des Zeitverlustes durch die Commando's (turn, stop) und durch die darauf folgenden Handlungen, der im Ganzen zu einer Secunde geschätzt wird, ist übrigens das Logglas so justirt, dass thatsächlich der Sand nicht

in 15 bezw. 30 Secunden, sondern in 14 bezw. 29 Secunden aus der einen in die andere Abtheilung abläuft.

Im Princip ist offenbar dieses Loggen nichts anderes, als die Umkehrung einer Stromgeschwindigkeitsmessung mit Schwimmer. Auch könnte zu letzterem Zwecke ein Schiffslog in der That benutzt werden, indem es etwa von einer festen Brücke aus ebenso in den Wasserstrom eines Flusses, wie sonst vom fahrenden Schiffe aus in das ruhende Meer geworfen wird, wenn nicht die Abmessung einer Flussstrecke am Ufer und die Zeitmessung mittelst einer guten Uhr viel genauer wäre. Grösser noch ist die Ungenauigkeit des Loggens auf dem Meere. Wenn insbesondere bei hoher See ein Schiff vor dem Winde und den Wellen segelt, findet man durch das Loggen die Geschwindigkeit zu klein, wenn es beim Winde und gegen den Wellenschlag segelt, zu gross, weil das kleine Logbrett der in den obersten Schichten der Wellenberge bis zu gewissem Grade stattfindenden fortschreitenden Bewegung des Wassers folgt. Die dadurch bedingte Correction kann bis 10% des Werthes betragen und wird nach Schätzung angebracht. Weitere Fehler werden durch die Reibung der Rolle, durch die Reibung der Leine in der Hand, sowie durch ihre Trägheit verursacht in verhältnissmässig um so grösserem Betrage, je kleiner die Schiffsgeschwindigkeit ist.

2. Zum Ersatze des gewöhnlichen Logs sind vielfach vollkommnere Geschwindigkeits-Messinstrumente vorgeschlagen worden, die meistens auf dem Princip des hydrometrischen Flügels beruhen. Das erste solche Log, das besonders in Amerika mehrfach Anwendung gefunden hat, ist Massey's Patent-Log vom Jahre 1834, seitdem jedoch wiederholt in seiner Form modificirt und verbessert. Es besteht (Fig. 181) aus zwei Theilen: dem rotirenden Körper R und dem Zählwerke Z. Ersterer ist eine mit schraubenförmigen Flügeln besetzte, vorn conisch zulaufende, geschlossene Messingröhre von solcher Wanddicke, dass ihr Gewicht dem Auftriebe des Wassers nahe gleich ist. Das Zählwerk, in eine längliche Büchse mit zwei ebenen Flügeln F, F (zur Verhütung ihrer Rotation) eingeschlossen, wird durch ein an der Spitze des Rotators R befestigtes, hinlänglich steifes Stück Manilaseil S (in Fig. 181 ausgestreckt zu denken) in Bewegung gesetzt, indem dasselbe andrerseits

Fig. 181.



mit der Welle einer zum Zählwerke gehörigen Schraube ohne Ende verbunden ist. Der ganze Apparat, bei *A* an einer Leine von 20 bis 30 Meter Länge befestigt, wird über Bord geworfen und die Zeit beobachtet, während welcher er sich, vom Schiffe hinter sich her gezogen, im Wasser befindet. Die Ablesung des wieder an Bord geholten Instruments geschieht infolge entsprechender Einrichtung des Zählwerkes unmittelbar in Theilen einer Seemeile gemäss der Annahme, dass die Umdrehungszahl dem Wege im Wasser (nach einem durch Versuche festzustellenden Verhältnisse) proportional gesetzt werden kann. Die Fehler, welche dadurch verursacht werden, dass der Rotator sich anfangs zu langsam, später beim Einholen des Instrumentes zu schnell dreht, heben sich theilweise auf und haben übrigens um so geringeren Einfluss auf das Ergebniss der Division des abgelesenen Weges durch die beobachtete Zeit, je länger das Instrument im Wasser belassen wird.

Compendiöser, als das erwähnte, ist Walker's harpoon-log,* wobei unter Beseitigung des Manilaseilstücks der Rotator mit dem Zählwerke unmittelbar verbunden ist, indem die nach vorn verlängerte Röhre des ersteren in die Büchse des letzteren hineinreicht, ähnlich wie übrigens auch schon Massey sein Instrument später modificirt hatte. Eine Abänderung desselben in entgegengesetztem Sinne stellt Reynold's sogenanntes pendant-log** dar, indem dabei das Zählwerk an Bord des Schiffes sich befindet unter entsprechender Verlängerung des als Transmissionswelle dienenden Seils von etwa 12 Millim. Dicke, während der Rotator aus 3 einen Holzcylinder von 50 Millim. Dicke und 400 Millim. Länge umgebenden Schraubenflügeln von 70 Millim. grösstem Radius gebildet ist. Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, dass sich die Augenblicke der In- und Aussergangsetzung des Zählwerkes dem Anfang und Ende der Beobachtungszeit präciser anpassen lassen, und dass eine anderenfalls bis zu gewissem Grade immerhin mögliche Rotation der das Zählwerk enthaltenden Büchse ganz ausgeschlossen ist. — In Friend's Log ist der rotirende Körper eine hohle, mit radialen Schaufeln nach Art eines unterschlächtigen Stossrades besetzte Trommel, die am hinteren Ende in der das Zählwerk enthaltenden, nach vorn zugeschärften Büchse quer mit horizontaler Axe so gelagert ist, dass stets nur einige Schaufeln aus einem Einschnitte an der Unterfläche der Büchse hervorragen.

Wenn übrigens alle diese Instrumente doch nur zu ausnahmsweisem

---

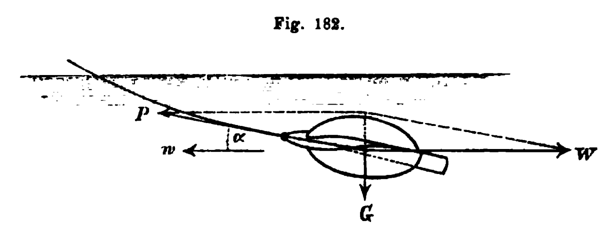
* Rühlmann's „Allgemeine Maschinenlehre", 2. Aufl., Bd. I, S. 139.
** Rühlmann's Hydromechanik, 2. Aufl., S. 365.



Gebrauche gekommen sind und das gewöhnliche Log nicht zu verdrängen vermocht haben, so liegt der Grund theils darin, dass sie eine sorgfältigere und subtilere Behandlung erfordern, als auf welche an Bord eines Schiffes gewöhnlich zu rechnen ist, theils darin, dass die Annahme beständiger Proportionalität des durchlaufenen Weges und der Umdrehungszahl des rotirenden Körpers nur bei mittleren Geschwindigkeiten und ziemlich ruhigem Wasser so angenähert zutrifft, dass diese Instrumente wesentlich genauere Resultate, als das gewöhnliche Log gewähren. Bei kleinen Geschwindigkeiten wird die schwankende Grösse der Reibungswiderstände von allzu bedeutendem Einflusse, während bei grossen Geschwindigkeiten und hohen Wellen das Instrument sich nicht selten vorübergehend aus dem Wasser erhebt, indem es von Welle zu Welle springend durch die Luft hindurch fortgezogen wird.

Der letztgenannte Uebelstand kann freilich dadurch vermieden werden, dass das Instrument schwerer, als das verdrängte Wasser gemacht wird, so dass es nicht an der Oberfläche, nur beinahe ganz eingetaucht, schwimmt, sondern infolge des Ueberschusses G seiner Schwere über den Auftrieb so tief untersinkt (Fig. 182), dass diese Verticalkraft G mit der Resultanten des horizontalen Widerstandes W und der unter einem gewissen Winkel α gegen den Horizont geneigten Zugkraft P des Seiles im Gleichgewicht ist.

Fig. 182.



Indessen wird dann die Rotation des Rotators, sofern der Schnittpunkt der Kraftrichtungslinien G, W als in seiner Axe liegend, diese folglich als Richtungslinie von P anzunehmen ist, nur durch die Geschwindigkeitscomponente $w \cos \alpha$ vermittelt, welche, da

$$\alpha = arc\, tg \frac{G}{W}$$

vom Widerstande W und folglich von der Schiffsgeschwindigkeit w abhängt, ein veränderliches Verhältniss zu w hat, so dass die vorausgesetzte Proportionalität zwischen w und der auf eine gewisse Zeit bezogenen Umdrehungszahl des Rotators schon aus diesem Grunde nicht erwartet werden kann.

3. Bei der Führung eines Schiffes ist es oft erwünscht, die Wirkung sofort erkennen zu können, welche eine angeordnete Maassregel,

z. B. das Beisetzen oder Bergen eines Segels, eine Veränderung der Segelstellung durch Brassen, des Expansionsgrades der Maschine u. s. w. auf die Geschwindigkeit des Schiffes ausgeübt hat. Die bisher besprochenen totalisirenden Instrumente, die zur Messung einer wesentlichen Zeit bedürfen und auch nur die während derselben stattfindende mittlere Geschwindigkeit angenähert ergeben, sind weniger dazu geeignet, als momentan wirkende Instrumente, die eine beständige Beobachtung der augenblicklichen Geschwindigkeit gestatten.

Jener Anforderung entspricht und zwar, wie versichert wird,* in sehr befriedigender Weise das Log von Berthon (Patente von 1849 und 1850). Es beruht auf dem Princip der Pitot'schen Röhre und besteht in einem cylindrischen, unten geschlossenen und nur mit einer kleinen Seitenöffnung o am untern Ende versehenen Rohre R, welches durch eine verticale Durchbohrung des Kiels ungefähr in der Mitte des Schiffes so hindurchgesteckt ist, dass es um 15 bis 20 Centimeter unten hervorragt und die an dieser Hervorragung befindliche Oeffnung o nach vorn gekehrt ist. Berthon fand durch eine grosse Zahl von Beobachtungen bei verschiedenen Schiffsgeschwindigkeiten, dass unter solchen Umständen in der für die Pitot'sche Röhre geltenden Gleichung:

$$h = \vartheta \frac{w^2}{2g}$$

fast genau $\vartheta = 1$ gesetzt werden kann. Weil nun aber die Geschwindigkeit w eines Seedampfers bis zu etwa 18 Knoten

$$= \frac{18 \,.\, 1855}{60 \,.\, 60} = 9{,}275 \text{ Mtr. pro Sec.}$$

betragen kann, somit die Erhebung des Wassers in der Röhre über das Meeresniveau bis $h = \frac{w^2}{2g} = 4{,}38$ Mtr., so ist eine Reduction der Skala unerlässlich, welche dadurch erreicht wird, dass die Röhre von unten in einen Windkessel W mündet, in welchem das Wasser nur bis zu einem gewissen Niveau reicht, da ein weiteres Emporsteigen durch entsprechende Compression der darin befindlichen Luft ersetzt wird, deren Druck durch ein oben vom Windkessel ausgehendes Rohr L weiter fortgepflanzt wird bis zum oberen Ende des einen Schenkels S einer U-förmig gebogenen, in ihrem unteren Theile Quecksilber enthaltenden Glasröhre M. Im

* Vortrag von Herrn Vaughan Pendred in der Sitzung vom 6. December 1869 der Society of Engineers, publicirt im betreffenden Jahresberichte dieser Gesellschaft.

anderen Schenkel S' der letzteren wird dann das Quecksilber empor-gedrückt, so dass die Niveaudifferenz in beiden im Verhältnisse 13,25 (Dichtigkeitsverhältniss von Quecksilber und Seewasser) kleiner als $h - x$ ist, unter x die Höhe der Wasseroberfläche in W über dem Meeres-niveau verstanden, somit höchstens etwa

$$= \frac{4,38}{13,25} = 0,33 \text{ Mtr.}$$

Durch Compassaufhängung kann das passend beschwerte Manometerrohr M mit seiner Skala in verticaler Lage erhalten werden, indem durch einen biegsamen Schlauch die Verbindung mit dem Luftrohre L vermittelt wird; letzteres kann beliebig im Schiffe fortgeführt werden, so dass die Ablesung an einem bequemen Orte, z. B. in der Capitänscajüte, im Maschinenraume u. s. w., jederzeit geschehen kann.

Um die Aenderungen von x, welche durch Spannungs- und Volumenänderungen der Luft in L, also besonders durch Aenderungen des Tiefganges des Schiffes, sowie durch Temperatur-Einflüsse bedingt sind, möglichst unschädlich und event. die Messung von x entbehrlich zu machen, muss vor Allem die Leitungsröhre L so eng und der Windkessel W so weit sein, dass eine beträchtliche Spannungs- und Volumenänderung jener Luft eine nur kleine Wasserstandsänderung in W zur Folge hat. Ausserdem ist dicht neben der Röhre R noch eine zweite R' mit jener verbunden durch die Kieldurchbohrung hindurchgesteckt, in deren unter dem Kiel hervorragendem unteren Ende sich jedoch die seitliche Oeffnung o' an einer solchen Stelle befindet, dass die Bewegung des Schiffes auf das Wasser in R' weder eine empordrückende noch umgekehrt eine saugende, niederziehende Wirkung ausübt; auch dieses Rohr mündet in einen Windkessel W', welcher, dicht neben W ungefähr in der Höhe des Meeresniveaus im Schiffsraume befindlich, durch ein Luftrohr L' mit dem Schenkel S' der Manometerröhre M vermittels eines biegsamen Schlauches communicirt. Auf diese Weise sind die Wirkungen der erwähnten Umstände in den Luftröhren L, L' und somit in beiden Schenkeln S, S' der Manometerröhre M stets gleichzeitig, aber in entgegengesetztem Sinne vorhanden, so dass sie sich theilweise aufheben. Ist dann y die (positive oder negative) Höhe der Wasseroberfläche in W' über dem Meeresniveau, so ergiebt sich die beobachtete Niveaudifferenz der Quecksilbersäulen in M bei Vernachlässigung des specifischen Gewichtes der Luft gegen das des Wassers:

$$m = \frac{(h - x) - (0 - y)}{13,25} = \frac{h - (x - y)}{13,25}$$

und daraus mit $x - y = h'$

$$h = \frac{w^2}{2g} = 13{,}25\, m + h'.$$

Die Höhe h' der Wasseroberfläche in W über derselben in W' ist weniger veränderlich, als x, und ausserdem leichter zu messen durch Vergleichung von neben einander befindlichen Wasserstandszeigern beider Windkessel. Eine Aenderung kann h' allerdings namentlich durch Verluste an comprimirter Luft in L erfahren; wenn aber nur von Zeit zu Zeit diese Luft mit Hülfe einer kleinen Luftpumpe so ergänzt und regulirt wird, dass h' stets nahe = Null bleibt, wird die Berücksichtigung von h' zur Ableitung von w aus m in den meisten Fällen entbehrlich sein.

Wenn die unter dem Kiel hervorragenden Rohrstücke durch einen Zufall beschädigt werden sollten, müssen sie leicht und unter solchen Umständen durch andere ersetzt werden können, dass unterdessen kein Wasser in das Schiff eindringt. Zu dem Ende ist die Kieldurchbohrung mit einem Messingrohre dicht ausgefüttert, welches, über den inneren Schiffsboden etwas hinaufgeführt, mit einem Absperrhahn und oben mit einer Stopfbüchse versehen ist; das Doppelrohr RR' geht nun von oben wasserdicht durch diese Stopfbüchse in das feste Messingrohr hinein und durch die Bohrung des entsprechend gestellten Hahnkörpers quer hindurch, so dass es unten um die erwähnten 15 bis 20 Centimeter vor der Unterfläche des Kiels hervorragt. Wird es bis unter die Stopfbüchse, aber über den Hahnkörper hinaufgezogen, so kann dieser um 90° gedreht, somit das äussere Wasser abgesperrt und das untere Stück des Doppelrohrs durch ein neues ersetzt werden.

Bezeichnet α den Winkel, um welchen das Rohr R oder R' aus der Lage heraus gedreht wird, bei welcher die kleine Oeffnung o bezw. o' gerade voraus gerichtet ist, so besteht bei gegebener Geschwindigkeit w zwischen α und der positiven oder negativen Erhebungshöhe h des Wassers in der betreffenden Röhre gemäss den Beobachtungen von Berthon eine merkwürdige Beziehung, die schon in Bd. I, §. 153 besprochen wurde. Insbesondere ist $h = 0$ für $\alpha = 41\frac{1}{2}$ Grad, und wird deshalb diese Lage dem Rohre R' bezüglich seiner Oeffnung o' gegeben.

Die grosse Empfindlichkeit der in einer solchen Röhre gehobenen Wassersäule in Betreff der Lage der kleinen Seitenöffnung kann auch zur Messung der Abtrift eines Schiffes dienen, indem die Röhre drehbar eingerichtet wird. Die Abtrift ist dann = dem Winkel, um welchen die Röhre von derjenigen Stellung aus, bei welcher die Oeffnung kiel-

wärts vorausgerichtet ist, gedreht werden muss, um das **Maximum** der Erhebungshöhe der Quecksilbersäule zu ergeben.

Das Berthon'sche Log hat sich in der Praxis den hier benutzten Angaben zufolge bewährt, und es wird von Seeoffizieren besonders die Sicherheit gerühmt, womit es beim Brassen der Raaen jederzeit die den Umständen entsprechende beste Segelstellung sofort erkennen lässt. Dieselbe ist abhängig von dem Neigungswinkel der Windrichtung gegen die Schiffsrichtung und vom Verhältnisse der Wind- zur Schiffsgeschwindigkeit. Sie wird meistens einfach geschätzt, und wenn auch der Seemann hierin grosse Uebung erlangen kann, besonders dann, wenn das Schiff nur unter Segeln fährt und somit die Schiffsgeschwindigkeit bei einer bestimmten Segelstellung nur von der Richtung und Stärke des Windes abhängt, so wird doch diese Schätzung wesentlich schwieriger und unsicherer, wenn das Schiff zugleich unter Dampf ist und somit die Schiffsgeschwindigkeit zugleich vom Effect der Schaufelräder oder der Schraube mit abhängt; denn jenachdem ein Dampfschiff nur unter Segeln oder zugleich mit Dampf fährt, ist trotz derselben Richtung und Stärke des Windes die günstigste Segelstellung verschieden.

Würde das Berthon'sche Log mit einer passenden Selbstregistrirung der Quecksilberniveaudifferenz in den Manometerröhren S, S' ausgestattet, so würde es dadurch zugleich ein sehr vollkommenes totalisirendes Instrument zur Bestimmung der mittleren Schiffsgeschwindigkeit und somit des Schiffsweges während einer beliebig langen Zeit.

IV. Waagen.

§. 165. Uebersicht.

Waagen sind Instrumente, die unmittelbar zur Vergleichung der Gewichte (Grössen der Schwerkräfte) von Körpern und dadurch mittelbar zur Vergleichung ihrer Massen dienen, welchen die betreffenden Gewichte an demselben Orte proportional sind. Indem man behufs dieser Vergleichung sogenannte Gewichtstücke benutzt, deren Massen bekannte Vielfache oder aliquote Theile der Masseneinheit sind, ergiebt ihre Vergleichung mit der Masse eines anderen Körpers K durch Wägung, nämlich durch Vergleichung der Gewichte vermittels der **Waage**, auch das Verhältniss der Masse m des Körpers K zur Masseneinheit, d. h. die Maasszahl dieser Masse m.

Die Grösse der Schwerkraft des Körpers K von unbekannter Masse wird übrigens vermittels der Waage mit derjenigen eines andern Körpers K' von bekannter Masse (bezw. eines Körperaggregates K' von bekannter Gesammtmasse) entweder unmittelbar verglichen, in welchem Falle die Waage mit E. Brauer* als Schwerkraftwaage bezeichnet werden kann, oder mittelbar, nämlich mit Hülfe einer anderweitigen Kraft F, die zum Gewichte von K' an einem gewissen Orte ein bekanntes Verhältniss hat. Als eine solche Kraft F wird namentlich die Federkraft benutzt und die Waage dann als Federwaage bezeichnet. Das Gewicht von K wird dabei vermittels der durch diesen Körper bei bestimmter Angriffsweise bewirkten Formänderung einer Feder beurtheilt, sofern die Beziehung derselben zum Gewichte eines Körpers K' von bekannter Masse bei derselben Angriffsweise bekannt ist. Indem aber diese Beziehung selbst bei unveränderlicher Elasticität der Feder nicht constant, sondern vom Orte gegen die Erde abhängig ist, mit welchem das Gewicht von K' sich ändert, so kann die Skala, an welcher die Deformation der Feder abgelesen wird, streng genommen nur für einen bestimmten Werth der Beschleunigung g passend sein, eine Federwaage mit unveränderlicher Skala folglich nur in solchen Fällen zur Massenbestimmung eines Körpers Anwendung finden, in welchen die Verschiedenheit von g an verschiedenen Orten der Erde zu vernachlässigen ist. Würde sie mit willkürlicher Skala in der Weise benutzt, dass jeweils die Gewichtstücke durch Probiren ermittelt werden, welche an der Angriffsstelle des Körpers K dieselbe Formänderung wie dieser bewirken, so würde zwar dadurch dessen Masse unabhängig vom Orte correct gefunden werden, aber es ginge zugleich die Schnelligkeit des Verfahrens verloren, wodurch die Federwaage sonst sich auszeichnet.

Allgemeiner gebräuchlich sind die Schwerkraftwaagen. Eine besondere Art derselben, die Senkwaage, durch welche das Gewicht eines festen Körpers mit dem als Auftrieb wirkenden Gewichte einer Flüssigkeit verglichen wird, bleibt hier ausser Betracht, indem sie weniger von technischem, als von physikalischem Interesse ist. Auch die sogenannte Seilwaage, bei welcher die zu vergleichenden Schwerkräfte an einem Seile, überhaupt an einem leicht biegsamen Zugkraftorgane angreifend sich Gleichgewicht halten, ist nur der Vollständigkeit wegen zu erwähnen. Die vollkommensten und zugleich die technisch gebräuchlichsten Schwer-

* „Die Construction der Waage“, Weimar 1880, Verlag von Bernh. Friedr. Voigt, ein Specialwerk, auf welches hier mehrfach Bezug genommen wird.

kraftwaagen (und Waagen überhaupt) sind solche, deren Mechanismus bezüglich seiner beweglichen Glieder aus starren (oder wenigstens bei Abstraction von sehr geringen elastischen Deformationen als starr zu betrachtenden) Körpern besteht, die unter sich sowie mit dem Gestelle (dem festgestellten Gliede des Mechanismus) durch Drehkörperpaare verbunden sind. Dabei werden diese beweglichen Glieder theils auf Biegung, theils auf Zug oder Druck in Anspruch genommen; während aber Glieder der letzteren Art ganz fehlen können, ist von auf Biegung in Anspruch genommenen sogenannten Hebeln stets wenigstens einer vorhanden, weshalb die fraglichen Waagen allgemein als Hebelwaagen bezeichnet werden mögen. Sie zerfallen in 3 Arten, jenachdem zur Herbeiführung des Gleichgewichtes mit dem zu messenden Gewichte

1) ein veränderliches Gegengewicht an einem unveränderlichen Angriffspunkte, oder
2) ein unveränderliches Gegengewicht an einem veränderlichen Angriffspunkte, oder
3) ein unveränderliches Gegengewicht an einem unveränderlichen Angriffspunkte

benutzt wird. Eine Hebelwaage der letzten Art pflegt als Neigungswaage oder als Zeigerwaage bezeichnet zu werden, indem die durch einen Zeiger auf einer Skala markirte veränderliche Gleichgewichtslage des Hebels oder Hebelsystems als Maassstab des zu messenden Gewichtes dient. In den zwei ersten Fällen wird durch Aenderung des Gegengewichtes an seinem unveränderlichen Angriffspunkte, bezw. durch Aenderung des Angriffspunktes des constanten Gegengewichtes behufs der Wägung stets dieselbe Gleichgewichtslage des Hebels oder Hebelsystems herbeigeführt. Durch Verschiebung des constanten Gegengewichtes längs einer zur Ablesung dienenden Skala ist das schneller zu erreichen als durch Aenderung der Grösse des (durch wiederholtes Probiren als Aggregat von Gewichtstücken) herzustellenden Gegengewichtes, weshalb jene unter 2) genannten Hebelwaagen als sogenannte Schnellwaagen von den unter 1) genannten als Hebelwaagen im engeren Sinne unterschieden zu werden pflegen. Indem aber der Name „Schnellwaage“ nur eine relative Bedeutung hat, weil noch schneller, als diese (freilich auch mit meistens noch geringerer Genauigkeit), Neigungs- oder Federwaagen zum Ziel führen, die nach Anhängung oder Auflegung des zu wägenden Körpers gar keiner weiteren Manipulation, sondern nur einer Ablesung nach von selbst erfolgtem Gleichgewichte bedürfen, mögen im

Folgenden die sogenannten Schnellwaagen zutreffender als **Laufgewichtswaagen** bezeichnet werden.*

In allen diesen Fällen sind ferner **einfache und zusammengesetzte Waagen** zu unterscheiden, jenachdem die Waage aus einem blossen Hebel besteht, der mit dem Gestell ein Drehkörperpaar bildet, oder dieselbe ein Mechanismus mit selbständig geschlossener kinematischer Kette ist. Wenn auch bei der einfachen Waage ein Gehänge mit oder ohne Schale zur Aufnahme des zu wiegenden Körpers oder des Gegengewichtes, bei der Laufgewichtswaage das Laufgewicht als besonderes Glied betrachtet wird, das mit dem Waagenhebel und dem Gestell eine kinematische Kette bildet, so ist doch diese eine nur kraftschlüssige, an und für sich offene Kette.

§. 166. Allgemeine Erfordernisse einer Waage.

Die theoretische und experimentelle Prüfung einer Waage hat sich auf ihre Richtigkeit, Stabilität, Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit zu erstrecken.

Die **Richtigkeit der Waage** verlangt eine bestimmte Gleichgewichtslage bei einem bestimmten Grössenverhältnisse der Last Q, worunter hier und im Folgenden das zu messende Gewicht verstanden wird, und ihres Gegengewichtes P, und zwar unabhängig von den Lagen, welche beide auf den zu ihrer Aufnahme bestimmten Schalen einnehmen. Die Erfüllung jener Forderung ist bei einer **Hebelwaage im weiteren Sinne**, wovon hier zunächst die Rede ist, bedingt durch eine gewisse relative Lage der Axen A der Drehkörperpaare, durch welche die Glieder des Waagenmechanismus gepaart sind, oder wenigstens durch eine gewisse relative Lage dieser Axen für jeden einzelnen Hebel. Wenn aber bei gegebenem Verhältnisse $P:Q$ innerhalb der Grenzen, für welche die Waage bestimmt ist, die Last und entsprechend ihr Gegengewicht verändert werden, so ändern sich damit die elastischen Deformationen der Glieder, die deshalb entweder auf die der Richtigkeit entsprechende relative Lage der Axen A ohne Einfluss sein oder in Folge entsprechender Herstellung dieser Glieder so gering sein müssen, dass jener Einfluss mit Rücksicht auf

* **Brauer** gebraucht für die Waagensysteme unter 1), 2), 3) die Benennungen: Gewichtswaage, Armwaage, Neigungswaage, deren erstere jedoch auch nicht ganz zutreffend das Wesen der Sache ausdrücken.



den Zweck der Waage zu vernachlässigen ist. Dasselbe gilt vom Einflusse der Temperatur auf die Dimensionen der Glieder.

Die Stabilität des Gleichgewichtes einer Waage wird dadurch erkannt, dass sie, durch eine vorübergehend wirkende Kraft etwas aus der Gleichgewichtslage entfernt und dann dem Einflusse der dauernd an ihr angreifenden Kräfte überlassen, nach einigen Schwingungen in die vorige (bezw. eine sehr wenig davon abweichende) Gleichgewichtslage zurückkehrt. Sofern die dauernd angreifenden äusseren Kräfte Schwerkräfte sind, ist es zur Stabilität einer Gleichgewichtslage nöthig, dass in derselben der Mittelpunkt fraglicher paralleler Kräfte eine tiefste Lage hat und dass somit die Störung des Gleichgewichtes einen Aufwand von mechanischer Arbeit erfordert.

Die Empfindlichkeit einer Waage bei einer gewissen Grösse der Last Q pflegt durch den reciproken Werth ε des Bruches $\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon}$ gemessen zu werden, wenn ΔQ die kleinste Aenderung von Q bedeutet, die bei unverändertem Gegengewichte P eine noch deutlich erkennbare Aenderung der Gleichgewichtslage zur Folge hat. Diese deutliche Erkennbarkeit erfordert eine gewisse von den vorhandenen und angewendeten Beobachtungsmitteln abhängige Minimalgrösse des Winkels $\Delta\varphi$, um welchen ein Hebel der Waage in Folge der Laständerung ΔQ gedreht wird. Indem aber dieser Winkel $\Delta\varphi$ nicht ein constantes Verhältniss zu dem Bruche $\frac{\Delta Q}{Q}$ zu haben braucht, sondern auf andere Weise von Q und ΔQ abhängen kann, ist auch die Empfindlichkeit einer Waage bei verschiedenen Belastungen Q im Allgemeinen verschieden, und wird deshalb unter ihrer Empfindlichkeit schlechtweg diejenige verstanden, welche der Maximalbelastung entspricht. Bei der Unbestimmtheit des Begriffes einer „deutlichen" Erkennbarkeit ist übrigens diese Empfindlichkeit ε eine nicht mathematisch bestimmt definirte Grösse, die ausserdem von den Hülfsmitteln zur Beobachtung eines sogenannten Ausschlagwinkels $\Delta\varphi$, also von Umständen abhängt, die der Waage an sich zum Theil fremd sein können. Das mathematisch bestimmte und nur die Waage selbst charakterisirende Maass ihrer Empfindlichkeit ist vielmehr der Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$, der einem bestimmten aliquoten Theile der Last Q als zusätzlicher Last $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ entspricht und welcher deshalb mit Brauer als Empfindlichkeitswinkel bezeichnet werde. Die Empfindlichkeit ist dem Empfindlichkeitswinkel proportional.



Die **Zuverlässigkeit** einer Wägung kann auch, abgesehen von der beschränkten Empfindlichkeit, schon deshalb keine vollkommene sein, weil die Gleichgewichtslage der Waage bei einer gewissen Belastung zwischen zwei Grenzlagen, die den im einen oder anderen Sinne entwickelten Reibungen entsprechen, zufällig und schwankend ist. Wenn bei der Belastung Q von der mittleren oder reibungslosen Gleichgewichtslage aus jene zwei Grenzlagen durch Drehung eines Hebels H der Waage um den Winkel $\varDelta\varphi_1$ im einen oder anderen Sinne erreicht werden, und wenn $\varDelta\varphi$ der Winkel ist, um welchen derselbe Hebel durch die zusätzliche Last $\varDelta Q$ gedreht würde, falls bei beiden Belastungen Q und $Q+\varDelta Q$ die gleiche Art des Gleichgewichtszustandes, z. B. in beiden Fällen der mittlere, reibungslose Gleichgewichtszustand stattfände, so können sich thatsächlich wegen der Reibungen, wenn sie bei der Belastung Q im einen, bei der Belastung $Q+\varDelta Q$ im anderen Sinne entwickelt sind, die betreffenden am Hebel H gemessenen Lagen um $\varDelta\varphi+2\varDelta\varphi_1$ unterscheiden, und entspricht somit die kleinste Belastungsänderung, welche eine noch **deutlich** und **zuverlässig** erkennbare Aenderung der Gleichgewichtslage bewirkt, einem Empfindlichkeitswinkel $>2\varDelta\varphi_1$. Die Reibungen der Drehkörperpaare, durch welche die Glieder des Waagenmechanismus zusammenhängen, beschränken also mit der Zuverlässigkeit zugleich auch die Empfindlichkeit der Waage.

Der Einfluss jenes von der Reibung herrührenden **Unzuverlässigkeitswinkels** $\varDelta\varphi_1$ kann freilich dadurch eliminirt werden, dass man den Ruhezustand der Waage bei einer gewissen Belastung gar nicht abwartet, vielmehr sie schwingen lässt und dabei die Winkel $=\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ beobachtet, um welche der betreffende Hebel H bei drei aufeinander folgenden Grenzlagen L_1, L_2, L_3 (Lagen augenblicklicher Ruhe zwischen zwei entgegengesetzt gerichteten einfachen Schwingungen) von einer beliebig bestimmten Lage L abweicht, um daraus den Winkel $=x$ abzuleiten, um welchen von derselben Lage L der Hebel H bei der betreffenden Belastung in seiner mittleren (reibungslosen) Gleichgewichtslage abweichen würde, falls dieselbe genau herbeigeführt und beobachtet werden könnte. Sind nämlich α, β, γ die kleinen, absolut verstandenen Neigungswinkel des Hebels H in den Lagen L_1, L_2, L_3 gegen seine mittlere Gleichgewichtslage, so ist $\alpha>\beta>\gamma$ und

$$\varphi_1=x\pm\alpha,\quad \varphi_2=x\mp\beta,\quad \varphi_3=x\pm\gamma \;\ldots\ldots\ldots (1),$$

wo entweder alle oberen oder alle unteren Vorzeichen gleichzeitig gelten. Nun durchläuft der Mittelpunkt S der an der Waage angreifenden



Schwerkräfte, der bei der mittleren Gleichgewichtslage der Waage eine tiefste Lage S_0 hat, bei den fraglichen kleinen Schwingungen sehr flache Bögen, die durch Bögen des verticalen Krümmungskreises der Bahn für den Punkt S_0 ersetzt werden können, so dass, unter ϱ den Krümmungsradius verstanden, die den Lagen L_1, L_2, L_3 entsprechenden Höhen des Punktes S über S_0 bezw.

$$=\varrho(1-\cos\alpha),\quad \varrho(1-\cos\beta),\quad \varrho(1-\cos\gamma)$$

oder nahe proportional $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ sind. Ist also C eine Constante und R die gleichfalls constant zu setzende Gesammtreibung, reducirt auf den Abstand $=1$ von der Drehungsaxe des Hebels H, so sind die resultirenden Arbeiten der Schwerkräfte und Reibungen für den Uebergang der Waage aus der Lage L_1 in L_2, sowie aus L_2 in L_3 bezw.

$$=C(\alpha^2-\beta^2)-R(\alpha+\beta)$$

und

$$=C(\beta^2-\gamma^2)-R(\beta+\gamma)$$

zu setzen, und da die eine wie die andere Arbeit = Null sein muss, ergiebt sich

$$\frac{R}{C}=\alpha-\beta=\beta-\gamma,\ \text{folglich}\ \frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta=0$$

und damit aus den Gleichungen (1):

$$\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}+\varphi_2=2x\pm\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}-\beta\right)=2x$$

$$x=\frac{\varphi_1+2\varphi_2+\varphi_3}{4}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Uebrigens ist dieses Verfahren zur Bestimmung der mittleren Gleichgewichtslage für eine gewisse Belastung in der Regel nur bei Wägungen mit feineren Waagen zu wissenschaftlichen Zwecken geeignet, und bleibt es in allen Fällen wünschenswerth, die Reibungen so viel wie möglich zu verkleinern. Das geschieht dadurch, dass die bei Waagenmechanismen als Elementenpaare fast ausschliesslich vorkommenden Drehkörperpaare nicht als Umschlusspaare, sondern kraftschlüssig als Keilschneiden mit zugehörigen Pfannen (Fig 27, *b* in §. 27) ausgeführt werden, was besonders dann immer zulässig ist, wenn die Waage eine nur kleine Beweglichkeit zu haben braucht, indem sie als Hebelwaage im engeren Sinne oder als Laufgewichtswaage behufs einer Wägung immer in dieselbe Gleichgewichtslage gebracht wird. Diese Keilschneiden und Pfannen werden aus hartem Material verfertigt, gewöhnlich aus gehärtetem Stahl, bei feinen Präcisionswaagen zu wissenschaftlichen Zwecken auch wohl

aus hartem Stein (Achat oder Bergkrystall); der Keilwinkel pflegt zwischen 60° und 90° zu liegen. Eine mathematisch scharfkantige Schneide ist natürlich nicht herstellbar, auch bewirkt die Belastung eine Abplattung derselben, sowie einen entsprechenden Eindruck der Pfanne. Es ist deshalb thatsächlich der Keil als durch eine Cylinderfläche von sehr kleinem Radius begrenzt und deren Krümmungsaxe als die Axe A des betreffenden Drehkörperpaares zu betrachten. Wenn dann ein solcher Keil nach Art von Fig. 27, *b* in einer hohlkeilförmigen Pfanne ruht, deren Keilwinkel natürlich dem verlangten Beweglichkeitsgrade entsprechend grösser, als der Winkel des convexen Keils sein muss, so ist die relative Bewegung immerhin noch eine gleitende, mit einer Art von kleiner Zapfenreibung verbundene. Wenn aber die Pfanne ebenflächig begrenzt wird, so ist die Reibung eine noch kleinere Walzenreibung und diese Construction somit bei Präcisionswaagen vorzuziehen, falls die Verticalebene V, welche durch die Axe A und durch die jeweilige Berührungslinie (Berührungsfläche von verschwindend kleiner Breite) beider Elemente hindurchgeht, behufs Richtigkeit der Waage nicht auch durch eine bestimmte Gerade der Pfanne beständig hindurchgehen muss, wie es besonders dann nicht der Fall zu sein pflegt, wenn, wie gewöhnlich, der Keil fest mit dem Hebel verbunden ist, während die Pfanne entweder dem Gestelle oder einer Zugstange, dem Gehänge einer Waagschale etc. angehört, wodurch die betreffende Kraft auf den Hebel übertragen wird.

Zur Schonung der Schneiden darf ihre Belastung pro Längeneinheit gewisse Grenzen nicht überschreiten. Bei passender Länge dieser Schneiden sind also die beweglichen Glieder der Waage so leicht zu construiren, wie es mit Rücksicht auf ihre Anstrengung und namentlich auf ihre Deformation durch die Maximalbelastung thunlich ist. Zu weiterer Schonung beim Nichtgebrauche sowie beim Auf- und Absetzen der Last dienen Arretirungs- und event. Entlastungsvorrichtungen, d. h. Einrichtungen, durch welche die Beweglichkeit der Waage aufgehoben werden kann und event. zugleich Schneiden und Pfannen ausser Berührung gebracht werden können.

Der durch die besprochenen Hülfsmittel möglichst verkleinerte Reibungswiderstand einer Waage kann nur empirisch, durch experimentelle Bestimmung des Unzuverlässigkeitswinkels $\Delta\varphi_1$ ermittelt werden. Die theoretische Untersuchung der Eigenschaften einer Waage hat deshalb von den Reibungswiderständen zu abstrahiren, und ist dann die Empfindlichkeit ebenso wie die Richtigkeit bei gegebenen Grössen und Angriffsweisen der wirksamen Kräfte nur von der relativen Lage der Keil-



schneiden, überhaupt der Axen aller vorhandenen Drehkörperpaare abhängig.

Der von einer Pfanne auf den Keil oder umgekehrt übertragene Druck ist im Allgemeinen nicht gleichförmig längs der Schneide vertheilt, die Lage des betreffenden Druckmittelpunktes vielmehr von zufälligen Umständen abhängig. Nun ist es aber eigentlich die relative Lage dieser Druckmittelpunkte, wodurch die Richtigkeit und die Empfindlichkeit der Waage bedingt werden, so dass, damit diese Eigenschaften durch solche Zufälligkeiten nicht beeinträchtigt werden, alle Punkte jeder Schneide eines Waagenhebels dieselbe Lage gegen alle anderen Schneiden desselben haben und somit alle Schneiden desselben Hebels parallel sein müssen. Wären sie dabei gegen den Horizont geneigt, so wären zwar relative Gleitungen der Keile gegen die Pfannen im Sinne der Schneiden infolge der wirksamen Schwerkräfte durch Stossplatten zu verhindern, jedoch nur in Begleitung entbehrlicher und schädlicher zusätzlicher Reibungen. Somit ergiebt sich die Regel, dass alle Keilschneiden eines Hebels parallel und horizontal sein sollen. Um dieser Bedingung so vollkommen wie möglich zu genügen und ausserdem die Lagen der parallel gemachten horizontalen Schneiden so zu reguliren, dass sie den Anforderungen der Richtigkeit und der Empfindlichkeit entsprechen, sind bei feinen Waagen besondere Justirungseinrichtungen vorhanden.

a. Hebelwaagen im engeren Sinne.

1. Einfache Hebelwaage.

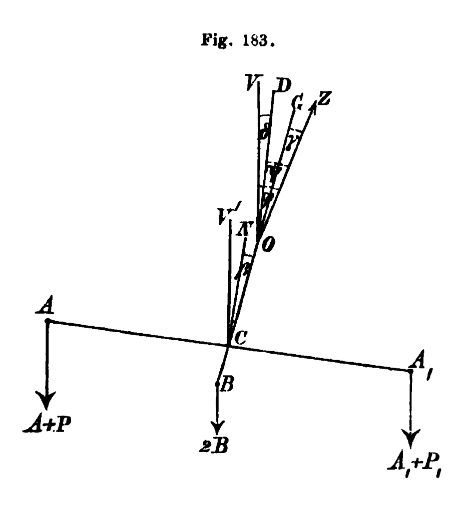
Diese Waage besteht aus einem einzelnen Hebel, dem sogenannten Waagebalken mit 3 Keilschneiden; durch die Mittelschneide wird er, etwas drehbar um dieselbe, von einer am Gestell festen Pfanne unterstützt, während die Endschneiden die zur Aufnahme der Last und des Gegengewichtes dienenden Waageschalen tragen. Alle 3 Schneiden sollen parallel und horizontal sein (§. 166); fast immer werden sie ausserdem so angeordnet, dass in der zur Wägung herbeizuführenden Gleichgewichtslage die durch die Endschneiden gehenden Verticalebenen von der durch die Mittelschneide gehenden auf entgegengesetzten Seiten gleich weit entfernt sind, gleichen Grössen der Last und des Gegengewichtes entsprechend. Eine solche sogenannte gleicharmige Waage

ist sowohl ihrer Einfachheit wegen die gewöhnlichste Handelswaage, als auch, weil sie bei sorgfältiger Ausführung die grösste Genauigkeit zulässt, die zu wissenschaftlichen Zwecken fast ausschliesslich benutzte Waage. Nur sie wird im Folgenden als einfache Hebelwaage berücksichtigt.

§. 167. Herstellungsgesetze der gleicharmigen Waage.

Während die Keilschneiden des Waagebalkens als genau parallel und horizontal angenommen werden, sei im Uebrigen zunächst eine mit gewissen Fehlern behaftete Waage vorausgesetzt, um den Einfluss derselben zu erkennen. Die Ebene der Figur 183 sei die durch den Schwerpunkt B des Waagebalkens gehende Verticalebene, welche die Mittelschneide O und die Endschneiden A, A_1 in den ebenso bezeichneten Punkten der Figur rechtwinklig trifft. C ist der Durchschnittspunkt der Geraden AA_1 und BO, OG die Verlängerung von BO, CN normal zu AA_1, OV und CV' vertical, OZ ein auf einer kreisbogenförmigen Theilung zum Mittelpunkte O spielender Zeiger, OD die Richtung von O nach dem Nullpunkte dieser Theilung. Es sei dann:

Fig. 183.



A das Gewicht, P die Belastung der an der Schneide A hängenden Waageschale,

A_1 das Gewicht, P_1 die Belastung der an der Schneide A_1 hängenden Schale,

$2B$ das Gewicht des Waagebalkens; ferner seien die Längen:

$$CA = a, \quad CA_1 = a_1, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

die letzteren zwei algebraisch verstanden und zwar positiv, wenn, wie in der Figur, der Punkt B bezw. C unter O liegt, und die Winkel:

$$NCO = \beta, \quad GOZ = \gamma, \quad DOV = \delta,$$

sowie die dem Gleichgewichtszustande bei der vorausgesetzten Belastung

entsprechenden Winkel:

$$VOZ = \varphi, \quad DOZ = \psi.$$

Die Grössen: $a_1 - a$, $A_1 - A$, β, γ, δ sollten eigentlich = Null sein, sind also Fehler, die als sehr klein vorausgesetzt werden können, so dass bei ausserdem sehr kleinem Unterschiede der Belastungen P, P_1 auch die Winkel φ und ψ sehr klein sind. Mit Rücksicht darauf, dass

$$\text{Winkel } V'CO = VOG = \varphi - \gamma,$$
$$\text{also Winkel } V'CN = \varphi - \gamma - \beta$$

und letzterer = dem Neigungswinkel von AA_1 gegen den Horizont ist, ergiebt sich nun als Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$(A + P)[a \cos(\varphi - \gamma - \beta) + c \sin(\varphi - \gamma)] + 2Bb \sin(\varphi - \gamma)$$
$$= (A_1 + P_1)[a_1 \cos(\varphi - \gamma - \beta) - c \sin(\varphi - \gamma)]$$

oder wegen $\cos(\varphi - \gamma - \beta) = \cos\beta \cos(\varphi - \gamma) + \sin\beta \sin(\varphi - \gamma)$ nach Division mit $\cos(\varphi - \gamma)$:

$$(A + P)[a \cos\beta + a \sin\beta\, tg(\varphi - \gamma) + c\, tg(\varphi - \gamma)] + 2Bb\, tg(\varphi - \gamma)$$
$$= (A_1 + P_1)[a_1 \cos\beta + a_1 \sin\beta\, tg(\varphi - \gamma) - c\, tg(\varphi - \gamma)].$$

Daraus folgt:

$$tg(\varphi - \gamma) = \frac{[(A_1 + P_1)a_1 - (A + P)a] \cos\beta}{(A + P)(a \sin\beta + c) - (A_1 + P_1)(a_1 \sin\beta - c) + 2Bb} \quad (1).$$

Die Gewichtsdifferenz der Waageschalen ist so leicht zu erkennen (an der durch Vertauschung der unbelasteten Schalen geänderten Zeigerstellung) und danach so leicht zu beseitigen, dass von vorn herein $A_1 = A$ angenommen werde. Wird dann ferner

$$P_1 = P + p \quad \text{und} \quad a_1 = (1 + \alpha)a$$

gesetzt, unter α einen positiven oder negativen kleinen Bruch und unter p ein kleines Zulagegewicht auf der an der Schneide A_1 hängenden Schale zu ihrer der anderen Schalenbelastung vorher gleichen Belastung P verstanden, so ist

$$(A_1 + P_1)a_1 - (A + P)a = pa + (A + P + p)\alpha a,$$

also nach Gl. (1), wenn ausserdem wegen Kleinheit der Winkel $\varphi - \gamma$ und β mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung

$$tg(\varphi - \gamma) = \varphi - \gamma = \psi + \delta - \gamma, \quad \cos\beta = 1, \quad \sin\beta = \beta$$

gesetzt wird:

$$\psi + \delta - \gamma = \frac{[p + (A + P + p)\alpha]a}{-[p + (A + P + p)\alpha]a\beta + (2A + 2P + p)c + 2Bb}.$$

In dieser Gleichung sind $p, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ kleine Grössen; durch Weglassung der Glieder, welche zwei derselben als Factoren enthalten und somit kleine Grössen höherer Ordnung sind, erhält sie die Form:

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{p + (A + P)\alpha}{(A + P)c + Bb} a + \gamma - \delta \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

als Ausdruck für den Winkel, unter welchem die Zeigerrichtung OZ gegen die nach dem Nullpunkte der Theilung gehende Richtung OD geneigt ist. Der fehlerhafte Winkel β, weil aus der Gleichung verschwunden, ergiebt sich dadurch als von untergeordnetem Einflusse; es ist das ein schätzbarer Umstand, weil wegen der Schwierigkeit, der kleinen Strecke $OB = b$ eine bestimmt vorgezeichnete Richtung zu geben, dieser Fehler kaum ganz vermieden werden kann.

Die Winkel γ, δ sind nicht als Fehler der Waage an sich, sondern nur als Aufstellungsfehler derselben zu betrachten. Sie können durch eine solche Aufstellung (mit Hülfe betreffender Fussschrauben am Gestelle einer feineren Waage) beseitigt werden, dass bei unbelasteten Schalen der Zeiger auf den Nullpunkt der Skala einspielt, dass also nach Gl. (2):

$$0 = \frac{1}{2} \frac{A\alpha}{Ac + Bb} a + \gamma - \delta$$

ist, woraus durch Subtraction von Gl. (2) folgt:

$$\psi = \frac{1}{2} \frac{(p + P\alpha)(Ac + Bb) - PcA\alpha}{[(A + P)c + Bb](Ac + Bb)} a$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(Ac + Bb)p + BbP\alpha}{[(A + P)c + Bb](Ac + Bb)} a \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Wäre $\alpha = 0$, so wäre für $p = 0$ auch $\psi = 0$ für jeden Werth von P, d. h. es würde der Zeiger bei beliebiger gleicher Belastung der Schalen auf den Nullpunkt der Skala einspielen ebenso wie bei unbelasteten Schalen; auch würde ψ in $-\psi$ übergehen, d. h. der Ausschlagwinkel im entgegengesetzten Sinne gleich gross sein, wenn entsprechend dem Ersatze von p durch $-p$ das kleine Zulagegewicht von der einen auf die andere Schale übertragen wird. Daran, dass das eine oder andere thatsächlich nicht der Fall ist, wird die Ungleichheit der Armlängen, nämlich der Fehler α erkannt, der bei feinen Waagen durch Justirung der Endschneiden mit Hülfe von Stellschrauben beseitigt werden kann.

Im Falle $\alpha = 0$ ist ψ der im vorigen Paragraph mit $\Delta\varphi$ bezeichnete, durch das Zulagegewicht p allein bewirkte Ausschlagwinkel, und wenn dann ausserdem p als aliquoter Theil der jeweiligen Belastung P ausgedrückt $= \frac{1}{\varepsilon} P$ gesetzt wird, folgt aus Gl. (3):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Pa}{(A+P)c+Bb} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Bei dieser Entwicklung sind die drei Schneiden als genau parallel vorausgesetzt worden. Dass aber eine Endschneide der Mittelschneide parallel ist, erkennt man durch eine solche Versetzung der Last auf der daran hängenden Schale, dass der Druckmittelpunkt in der Schneide einmal möglichst nahe an ihr eines, das andre mal an ihr anderes Ende gerückt wird. Bei einer Abweichung vom Parallelismus in horizontalem Sinne würden in beiden Fällen die betreffenden Armlängen a etwas verschieden sein, und würde somit dieser Fehler ebenso erkannt werden, wie es soeben bezüglich des Fehlers α bemerkt wurde. Bei einer Abweichung vom Parallelismus im verticalen Sinne wäre c in beiden Fällen etwas verschieden, somit auch $\Delta\varphi$ nach Gl. (4) unter sonst gleichen Umständen. Uebrigens kann ein Parallelismusfehler dadurch weniger schädlich gemacht werden, dass die Endschneide zunächst ein Gehänge und dieses die Waagschale trägt vermittels einer Keilschneide A', die gegen jene Endschneide A rechtwinklig gekreuzt ist; eine Lagenänderung des Druckmittelpunktes in A' ist dann ohne Einfluss auf seine Lage in A.

In dem Ausdrucke (4) des dem Uebergewichte $\Delta P = p = \frac{1}{\varepsilon} P$ entsprechenden Ausschlagwinkels $\Delta\varphi$ soll zwar behufs grösstmöglicher Empfindlichkeit der Waage der Nenner möglichst klein sein, doch muss er stets einen endlichen positiven Werth behalten, damit $\Delta\varphi$ (eigentlich $tg\,\Delta\varphi$) nicht beliebig gross werden könne, entsprechend einem Umschlagen des Waagebalkens, d. i. einem indifferenten oder labilen Gleichgewichte. In der That wird durch die Bedingung:

$$(A+P)c+Bb > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

worin b und c algebraisch und zwar im Sinne von O abwärts positiv verstanden sind, die Stabilität des Gleichgewichtes charakterisirt, nämlich ausgedrückt, dass der Mittelpunkt der in A, A_1 und B angreifenden Schwerkräfte $A+P$, $A+P$, $2B$ unter der Mittelschneide liegt und somit bei horizontalem Waagebalken eine tiefste Lage hat.

Um nun aber jener für eine berichtigte gleicharmige Waage gültigen Gleichung (4) mit Rücksicht auf die Bedingung (5) die Construc-



tionsregeln zu entnehmen, durch welche unbeschadet der Stabilität grösstmögliche Empfindlichkeit der Waage gewährleistet wird, muss berücksichtigt werden, dass die Strecken b und c nicht constant, sondern wegen der Deformation des Waagebalkens durch seine Belastung von dieser abhängig sind. Sind auch die fraglichen Aenderungen von b und c an und für sich nur sehr klein, so können sie doch im Verhältnisse zu diesen selbst sehr kleinen Strecken erheblich und somit auf die Eigenschaften der Waage von wesentlichem Einflusse sein. Jedenfalls sind die Aenderungen von b und c der Belastung P proportional, so dass

$$b = b_0 + mP \quad \text{und} \quad c = c_0 + nP \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

gesetzt werden kann, unter b_0 und c_0 die Werthe von b und c verstanden, die der Belastung des Waagebalkens nur durch sein Eigengewicht und durch die Schalen entsprechen, während m und n vom Material und von den Dimensionen des Waagebalkens abhängen und $m < n$ ist. Die Einsetzung in (4) und (5) ergiebt den Empfindlichkeitswinkel:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Pa}{Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2} \quad \ldots\ldots (7)$$

und die Stabilitätsbedingung:

$$f(P) = Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2 > 0 \quad \ldots\ldots (8).$$

Damit letztere für jeden Werth von P erfüllt sei, muss das Minimum von $f(P) > 0$ sein. Dieses Minimum entspricht $P = 0$, wenn

$$c_0 + nA + mB \geqq 0$$

ist. Anderenfalls entspricht es der Belastung:

$$P = P_1 = -\frac{c_0 + nA + mB}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und ergiebt sich damit

$$= Ac_0 + Bb_0 - nP_1^2 = Ac_0 + Bb_0 - \frac{(c_0 + nA + mB)^2}{4n}.$$

Die Stabilität erfordert also solche Werthe von b_0, c_0, für welche

$$\left.\begin{array}{ll} c_0 + nA + mB \geqq 0 \quad \text{und} & Ac_0 + Bb_0 > 0 \\ \text{oder} \quad c_0 + nA + mB < 0 \quad \text{und} & Ac_0 + Bb_0 > \dfrac{(c_0 + nA + mB)^2}{4n} \end{array}\right\} \quad (10)$$

ist. Im zweiten Falle ist vorausgesetzt, dass P_1 nach Gl. (9) sich kleiner ergiebt, als die Maximalbelastung P', für welche die Waage bestimmt ist, widrigenfalls die Erfüllung der Ungleichung (8) bei Substitution von P' für P genügend sein würde.



Behufs grösstmöglicher Empfindlichkeit sind nun nach Gl. (7) die Grössen b_0, c_0 so klein zu machen, wie es die Stabilitätsbedingungen gestatten. Der Schwerpunkt B des Waagebalkens soll noch etwas unter der Mittelschneide O liegen, damit der Balken bei horizontaler Lage auch ohne Schalen in stabilem Gleichgewichte sei. Durch die Anhängung der Schalen rückt B noch etwas weiter herunter, so dass dann b_0 jedenfalls eine positive kleine Grösse ist, während c_0 unbeschadet der Stabilität $= 0$ oder selbst bei sehr kleiner absoluter Grösse negativ sein, d. h. die Mittelschneide etwas unter der Ebene durch die Endschneiden liegen kann.

In welchem Maasse eine gegebene Waage diesen Anforderungen genügt, kann nicht durch Messung der kleinen Grössen b_0, c_0 geprüft werden. Wenn aber die Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$ beobachtet sind, welche gewissen kleinen Zulagegewichten $\Delta P = \frac{1}{\varepsilon} P$ auf der einen Schale bei drei verschiedenen, vorher gleichen Belastungen P auf beiden Schalen entsprechen, erhält man durch Einsetzung in Gl. (7), nämlich in:

$$Ac_0 + Bb_0 + (c_0 + nA + mB)P + nP^2 = \frac{a}{2}\frac{\Delta P}{\Delta\varphi}$$

drei Gleichungen zur Berechnung der drei Unbekannten:

$$Ac_0 + Bb_0, \quad c_0 + nA + mB, \quad n.$$

Dadurch würden die Grössen b_0, c_0 bestimmt sein, wenn noch das Verhältniss $\frac{m}{n}$ bekannt wäre. Letzteres kann mit Rücksicht auf die jeweilige Form des Waagebalkens näherungsweise berechnet und im Durchschnitt etwa $= 0{,}2$ gesetzt werden, genau entsprechend der Voraussetzung eines Balkens von rechteckigem Querschnitte constanter Breite und so veränderlicher Höhe, dass die Biegungsspannung, welche durch die am Ende angreifenden Kräfte $A + P$ verursacht wird, in allen Querschnitten gleich ist.*

Wie die Empfindlichkeit von der Belastung P abhängt, lässt Gl. (7) unmittelbar erkennen. Insbesondere zeigt sie, dass der

* Brauer in seiner Schrift „die Construction der Waage", S. 30, vermeidet die hier in Rede stehende Schwierigkeit dadurch, dass er bei Vernachlässigung von A zugleich stillschweigend $m = 0$ annimmt. In der That aber kann (wegen $B > A$) mB eine mit nA vergleichbare Grösse oder gar $> nA$, sowie auch (wegen c_0 nahe $= 0$) $nA + mB$ eine mit c_0 vergleichbare Grösse oder gar $> c_0$ sein.

durch einen bestimmten aliquoten Theil dieser Last als einseitiges Uebergewicht verursachte Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$ am grössten ist, wenn

$$\frac{Ac_0 + Bb_0}{P} + nP$$

ein Minimum, wenn also

$$-\frac{Ac_0 + Bb_0}{P^2} + n = 0 \quad \text{oder} \quad P = \sqrt{\frac{Ac_0 + Bb_0}{n}} \cdots\cdots (11)$$

ist. Ist dieses P grösser, als die Maximallast P' der Waage, so nimmt ihre Empfindlichkeit beständig mit der Belastung zu.

Was den Einfluss von B auf die Empfindlichkeit betrifft, so ergiebt sich aus Gl. (7), dass $\Delta\varphi$ um so grösser, je kleiner B, dass also der Waagebalken möglichst leicht zu machen ist. Uebrigens hängt das Gewicht desselben mit seiner Länge zusammen, und da auch m und n von dieser abhängen, so ist die Beziehung zwischen dem Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi$ und der Länge a nicht ohne Weiteres aus Gl. (7) erkennbar. In der That wird diese Beziehung bedingt durch die Art, wie bei Balken von verschiedenen Längen zugleich die Querschnittsdimensionen verschieden sind. Wenn alle solche Balken von einerlei Material und insofern von einerlei Form vorausgesetzt werden, als ihre homologen Querschnitte ähnlich sind und nach einerlei Gesetz von der Mitte gegen die Enden hin abnehmen, so ist, wenn e eine Querschnittsdimension an bestimmter Stelle, z. B. im mittleren Querschnitte bedeutet, die Anstrengung (Maximalspannung) des Materials durch dieselbe Belastung bekanntlich proportional $\frac{a}{e^3}$, und wenn diese Anstrengung bei allen Balken gleich sein soll, muss e proportional $a^{\frac{1}{3}}$ sein. Somit ergiebt sich B proportional ae^2 proportional $a^{\frac{5}{3}}$, während nach bekannten Gesetzen der Elasticitätslehre

$$m \text{ und } n \text{ proportional } \frac{a^3}{e^4} \text{ auch proportional } a^{\frac{5}{3}}$$

werden, so dass gesetzt werden kann:

$$B = xa^{\frac{5}{3}}, \quad m = ya^{\frac{5}{3}}, \quad n = za^{\frac{5}{3}},$$

unter x, y, z Factoren verstanden, die vom Material und von der Form abhängen, von der Länge a aber unabhängig sind. Mit Rücksicht auf diese Ausdrücke von B, m, n ergiebt sich dann der Empfindlichkeits-

winkel $\Delta\varphi$ nach Gl. (7) umgekehrt proportional dem Werthe des Ausdrucks:

$$\frac{Ac_0}{a} + xb_0 a^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{c_0}{a} + zAa^{\frac{2}{3}} + xya^{\frac{7}{3}}\right)P + za^{\frac{2}{3}}P^2,$$

welcher mit a wächst, da $c_0 = 0$ oder negativ, jedenfalls absolut genommen sehr klein ist. Die Empfindlichkeit wird also durch Verkürzung des Waagebalkens erhöht.

Für solche Verkürzung spricht auch der Umstand, dass dadurch die Schwingungsdauer der Waage verkleinert wird, deren beträchtliche Grösse besonders bei grosser Empfindlichkeit das Wägungsverfahren sehr zeitraubend macht. Die Dauer einer einfachen Schwingung ist bekanntlich:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

unter l den Quotienten aus dem Trägheitsmomente für die Schwingungsaxe O durch das Produkt aus Masse und Schwerpunktsabstand von dieser Axe verstanden. Indem dabei hier die Massen der Belastungen $A+P$ der Endschneiden wie in diesen concentrirte Massen zu rechnen sind, ist, unter $\frac{2B}{g}k^2$ das Trägheitsmoment des Waagebalkens selbst verstanden,

$$l = \frac{2(A+P)a^2 + 2Bk^2}{2(A+P)c + 2Bb} = \frac{(A+P)a^2 + Bk^2}{(A+P)c + Bb} \quad \ldots\ldots (13)$$

oder nach Gl. (4) mit $\Delta P = \frac{1}{\varepsilon}P$:

$$l = \frac{2}{a}\left[(A+P)a^2 + Bk^2\right]\frac{\Delta\varphi}{\Delta P}$$

$$= 2a\left(A + P + B\frac{k^2}{a^2}\right)\frac{\Delta\varphi}{\Delta P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Hiernach ist l und somit t um so grösser, je grösser $\frac{\Delta\varphi}{\Delta P}$, d. h. je empfindlicher die Waage ist. Bei gegebener Empfindlichkeit ist aber t um so kleiner, je kleiner A, B, $\frac{k}{a}$ und a, je leichter also die Schalen sind, je leichter der Waagebalken und je mehr seine Masse gegen die Mittelschneide hin zusammengedrängt, insbesondere aber je kürzer der Waagebalken ist.

Anders verhält es sich freilich bezüglich auf die Richtigkeit und die Zuverlässigkeit einer Waage, so dass doch nicht unbedingt der

kleinstmögliche Balken als bester bezeichnet werden kann. Denn Fehler im Parallelismus und in den gegenseitigen Entfernungen der Schneiden, wodurch die Richtigkeit vorzugsweise beeinträchtigt werden kann, sind verhältnissmässig um so kleiner, also um so weniger schädlich, je grösser die Balkenlänge ist. Was aber die Reibungswiderstände der Schneiden betrifft, so erfordern sie zu ihrer Bewältigung bei jeder Lagenänderung des Waagebalkens ein Moment, das dem Gesammtdrucke auf dieselben

$$= 2(A+P) + 2(A+P+B) = 2(2A+2P+B)$$

proportional und somit, unter w eine sehr kleine von den Beschaffenheiten der Keilschneiden und Pfannen abhängige Länge verstanden,

$$= 2w(2A+2P+B)$$

gesetzt werden kann. Dasselbe ist im Vergleich mit dem auf die Lagenänderung des Waagebalkens abzielenden Momente $= a\Delta P$ des Uebergewichtes ΔP um so kleiner, also auch der Unzuverlässigkeitswinkel $\Delta\varphi_1$ (§. 166) um so kleiner in Vergleich mit dem ohne Rücksicht auf diese Widerstände berechneten Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$, je grösser a. Eine praktische Grenze wird der Verkleinerung des Waagebalkens natürlich auch durch das Raumbedürfniss der Schalen gesetzt. —

Indem sich gezeigt hat, dass die Empfindlichkeit einer Waage mit ihrer beiderseitigen Belastung P wächst, wenigstens bis zu einem gewissen durch Gl. (11) bestimmten Werthe von P, pflegt die schlechtweg sogenannte Empfindlichkeit ε in dem Sinne verstanden zu werden, dass $\frac{1}{\varepsilon}P'$ das kleinste einseitige Zulagegewicht ist, durch welches bei beiderseitiger Maximalbelastung P' ein noch deutlich erkennbarer Ausschlag bewirkt wird. Wenn hier auch das Erforderniss deutlicher Erkennbarkeit ziemlich weit gesteckt wird, z. B. so, dass es einer Bewegung der Zeigerspitze auf der Skala von 1 Millimeter entsprechen soll, so kann doch jene Empfindlichkeit ε bei feinen, zu chemischer Analyse oder zu anderen wissenschaftlichen Zwecken bestimmten Waagen fast unbegrenzt gesteigert werden, falls der Waagebalken mit einer Regulirungsschraube ausgestattet ist, deren Axe in der die Gerade AA_1, Fig. 183, in ihrem Mittelpunkte C rechtwinklig schneidenden Geraden OB liegt, so dass durch ihre Drehung und entsprechende Axialverschiebung im einen oder anderen Sinne der Schwerpunktsabstand $OB = b$ sehr allmählig geändert werden kann. Indem aber die Vergrösserung von ε durch eine Vergrösserung der Schwingungsdauer t erkauft werden

muss, welche nach Gl. (12) und (14) proportional $\sqrt{\varepsilon}$ sich ändert, auch die Fehler, die durch den Einfluss von Temperaturdifferenzen auf die Armlängen des Waagebalkens, durch Luftströmungen, sowie durch die Unsicherheit der Berücksichtigung des Auftriebes der Luft u. s. w. verursacht werden können, die Steigerung von ε über eine gewisse Grenze hinaus illusorisch machen würden, ist es rathsam, jeder Waage nur diejenige Empfindlichkeit zu geben, die ihr Zweck erfordert, und kann insbesondere bei zu wissenschaftlichen Zwecken bestimmten Waagen in der Regel $\varepsilon = 1000\,000$ als ausreichend betrachtet werden für Belastungen P bis zu 1000 Gramm, entsprechend weniger für kleinere Maximalbelastungen.

Bei Handelswaagen, die der gesetzlichen Aichung unterliegen, genügt eine viel geringere Empfindlichkeit. Die Aichungsordnung für das deutsche Reich unterscheidet hierbei, was die gleicharmigen Balkenwaagen betrifft,

1) Hökerwaagen, für den Wochenmarktverkehr bis zu $P' = 2$ Kgr. zugelassen,
2) Waagen für den gewöhnlichen Handelsverkehr,
3) Präcisionswaagen, wozu insbesondere die Medicinalwaagen gerechnet werden.

Die für diese drei Waagengattungen bei verschiedenen Maximalbelastungen $= P'$ Gramm auf jeder Schale wenigstens verlangten, in obigem Sinne verstandenen Empfindlichkeiten ε enthält die folgende Zusammenstellung.

$P' \overline{\overline{<}}\, 20$		$\overline{\overline{<}}\, 200$	$\overline{\overline{<}}\, 2000$	$\overline{\overline{<}}\, 5000$	> 5000 Gr.
1) $\varepsilon =$		125	250		
2) $\varepsilon =$		500	1000	1000	2000
3) $\varepsilon =$	500	1000	2000	5000	10000

In jedem Falle soll ausserdem ε noch wenigstens halb so gross sein für $P = 0{,}1\,P'$.

Ueber die Schwingungsdauer t sind von Prof. Dr. Hartig vergleichende Versuche angestellt worden mit zwei Sortimenten von je fünf Justirwaagen A für Aichämter und B für Aufsichtsbehörden.*

Folgende Tabelle enthält:

die Maximalbelastungen P', die Schalengewichte A und Balkengewichte $2B$ in Grammen,

die Armlängen a und Zeigerlängen z in Millimetern, ferner

* E. Brauer: „Die Construction der Waage", S. 114 ff.



die beobachteten Empfindlichkeiten ε, verstanden in dem Sinne, dass bei beiderseitiger Maximalbelastung P' ein einseitiges Zulagegewicht $= \frac{1}{\varepsilon} P'$ die Zeigerspitze um 1 Millimeter bewegt, entsprechend einem in Bogenmaass ausgedrückten Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi = \frac{1}{z}$,

die beobachteten Schwingungszeiten t in Secunden, endlich in den letzten Columnen

die vorgeschriebenen, durchweg kleineren Empfindlichkeiten ε' und die Schwingungszeiten

$$t' = t \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}},$$

welche unter sonst gleichen Umständen mit den Empfindlichkeiten ε' verbunden gewesen wären.

		P'	A	$2B$	a	z	ε	t	ε'	t'
A	1	5	2,8	16,2	79	143	7143	3,7	2083	2,0
	2	50	27,0	86,5	138	160	25000	8,4	5000	3,8
	3	500	97,7	436,5	212	210	35000	10	10000	5,3
	4	5000	345,5	2220	328	347	200000	20	20000	6,3
	5	50000	2450	6560	515	480	333333	30	50000	11,6
B	1	5	2,7	15,1	80	143	40000	7,5	10415	3,8
	2	50	43,8	115,1	150	209	324675	30	25000	8,3
	3	500	80,9	283,4	209	211	500000	37,2	50000	11,8
	4	5000	459	2008	330	370	1101322	51	100000	15,4
	5	50000	2450	6650	515	480	833333	36	250000	19,7

§. 168. Wägungsmethoden und besondere Einrichtungen der Waage zur Sicherung oder Erleichterung ihres Gebrauches.

Während die Schwingungsdauer t einer Waage dem vorigen Paragraph zufolge mit ihrer Empfindlichkeit wächst, ist die Zahl von Schwingungen, welche eine um einen gewissen Winkel aus der Gleichgewichtslage entfernte Waage macht, bevor sie zur Ruhe kommt, natürlich um so grösser, je kleiner die Reibungswiderstände der Schneiden sind. Eine schwingende Waage von gleichzeitig grosser Empfindlichkeit und Zuverlässigkeit kann daher bis zum Eintritte des Ruhezustandes sehr langer Zeit bedürfen, so dass aus diesem Grunde, nämlich zur Beschränkung

der zur Bestimmung eines Ausschlagwinkels nöthigen Zeit auf den Betrag $2t$ sich das Verfahren der Ableitung jenes der mittleren (reibungslosen) Gleichgewichtslage entsprechenden Ausschlagwinkels aus den Beobachtungen dreier aufeinander folgender Grenzwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ empfiehlt, welches im §. 166 gemäss Gl. (2) daselbst als Mittel zur Elimination des Einflusses der Reibung besprochen wurde.

Wenn sich nun aber auf diese Weise ergiebt, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird, dass bei der betreffenden Grösse des Gegengewichtes auf der einen Schale für die auf der anderen befindliche Last im mittleren Gleichgewichts-Ruhezustande die Zeigerspitze noch um x Skalentheile vom Nullpunkte entfernt bleiben würde, so ist es nicht nöthig, das Gegengewicht so lange mit wiederholtem Zeitaufwande zu jedesmaliger neuer Bestimmung von x zu ändern, bis sich $x = 0$ ergiebt, sondern es kann die hierzu nöthige Aenderung ΔP des Gegengewichtes berechnet werden, falls die Werthe von $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ für die betreffende Waage und für verschiedene Belastungen P derselben vorher bestimmt worden waren. Dieses Verfahren kommt darauf hinaus, die Waage behufs der letzten Correctur des Gegengewichtes als Neigungswaage zu benutzen.

Uebrigens ist die Skala, auf welcher die Zeigerspitze spielt, immer nur von kleiner Länge, entsprechend einem so kleinen Ausschlagwinkel, dass derselbe, in Bogenmaass ausgedrückt, ohne in Betracht kommenden Fehler seiner trigonometrischen Tangente gleich gesetzt werden kann, wie es bei der Ableitung der Gleichungen im vorigen Paragraph aus Gl. (1) daselbst geschehen ist. Bis auf eine kleine Abweichung des Zeigers vom Nullpunkte der Skala muss deshalb die Waage schon vor der Anwendung jenes Proportionalitätsfactors $\frac{\Delta P}{\Delta x}$ zum Einspielen gebracht worden sein. Bei feinen Waagen sind aber selbst dazu schon so kleine Gewichtstücke erforderlich, dass deren Herstellung und Handhabung mit Schwierigkeiten verbunden ist, und pflegt man sich dann dadurch zu helfen, dass man behufs dieser vorletzten Correctur der Gleichgewichtslage die Waage als Laufgewichtswaage benutzt, nämlich durch Verschiebung eines sogenannten Reiters, eines Häkchens von Gold- oder Platindraht, längs dem eingetheilten einen Arme des Waagebalkens. Ist z. B. die Armlänge CA oder CA_1, Fig. 183, in 100 gleiche Theile getheilt, so würde mit einem Reitergewicht von 1 Centigramm die Belastung der betreffenden Schneide A, A_1 bis auf 0,1 Milligramm variirt werden können = der Aenderung des auf A oder A_1 reducirten Ge-

wichtes des Reiters bei seiner Verschiebung von einem zum folgenden Theilstriche. Ist der Balken selbst von ungeeigneter Form zur Aufnahme der Theilung und des Reiters, so kann dazu ein fest mit ihm verbundener besonderer Stab dienen, dessen obere Kante in der Geraden AA_1, Fig. 183, liegt.

Derselbe Zweck kann auch mit Hülfe des Princips der Federwaage, nämlich nach einem von Sartorius in Göttingen ausgeführten Vorschlage von Frerichs dadurch erreicht werden, dass die Mittelschneide mit einem ihre Verlängerung bildenden feinen Drahte fest verbunden wird, der am anderen Ende einen auf einer Kreistheilung spielenden Zeiger trägt. Durch Bewegung des letzteren wird der Draht um seine Axe verdreht und dadurch auf den Waagebalken ein Drehungsmoment ausgeübt ebenso wie durch ein Zulagegewicht auf der einen Waagschaale. Ist dann der Torsionswinkel des Drahtes, welcher dieselbe Wirkung wie ein gewisses Zulagegewicht, z. B. 1 Centigramm auf den Waagebalken ausübt, einmal ermittelt worden, so kann umgekehrt aus dem in einem gegebenen Falle durch Drehung des Zeigers bewirkten und abgelesenen Torsionswinkel auf das ihm proportionale äquivalente Zulagegewicht geschlossen werden.

Während diese Methoden und Einrichtungen mehr die Erleichterung einer Wägung durch Abkürzung der dazu nöthigen Zeit, als die Genauigkeit der Wägung betreffen (obschon auch diese im weiteren Sinne dadurch gefördert werden kann, besonders bei der Wägung von hygroskopischen oder anderweitig in der Luft veränderlichen Körpern) bleiben störende Einflüsse von Luftströmungen und von Temperaturdifferenzen, wodurch die Gleichheit der Armlängen beeinträchtigt wird, als Fehlerquellen zu bekämpfen. Hülfsmittel dagegen sind die Einschliessung der Waage in einen Glaskasten und, sofern jene Einflüsse u. A. vom Beobachter herrühren können, die Ablesung aus der Ferne mit Hülfe eines Fernrohres.

Vollkommen unabhängig von einer Verschiedenheit der Arme macht das Verfahren der doppelten Wägung, darin bestehend, dass der auf die eine Schale A gesetzte Körper K vorläufig durch beliebige Massen auf der anderen Schale A_1 austarirt, dann K weggenommen und durch Gewichtstücke bis zum Wiedereinspielen der Waage ersetzt wird. Der Gleichsetzung ihrer Gesammtmasse und der des Körpers K liegt dann nur die Voraussetzung zu Grunde, dass in der kurzen Zwischenzeit keine Aenderung der Waage stattfand. Für eine Reihe aufeinander folgender Wägungen kann das Verfahren dadurch abgekürzt werden, dass ein voll-

ständiger Satz von grösseren und kleineren Gewichtstücken, die zusammen etwas schwerer, als der schwerste zu wiegende Körper sind, auf der Schale A ein für allemal mit einer unverändert bleibenden Masse auf A_1 ins Gleichgewicht gebracht und dann die jeweilige Wägung eines Körpers dadurch bewirkt wird, dass er auf die Schale A gesetzt und durch Wegnahme entsprechender Stücke des Gewichtsatzes das Gleichgewicht wieder hergestellt wird. Diese Schale A kann dabei zweckmässig als ein System von zwei Tellern hergestellt werden, die übereinander von demselben an der betreffenden Endschneide hängenden Bügel getragen werden und von welchen der untere zur Aufnahme des Gewichtsatzes, der obere zur Aufnahme des zu wiegenden Körpers bestimmt ist.

Bei solchem Verfahren der doppelten Wägung kann auch die Schale A_1 sammt ihrem unveränderlichen Tarirgewichte mit Beseitigung der betreffenden Endschneide durch ein mit dem Arme CA_1 fest verbundenes Gegengewicht ersetzt und so eine als einschenklig zu bezeichnende Waage mit nur zwei Schneiden O, A hergestellt werden, wie sie schon vor nahe 50 Jahren von Bockholtz angegeben und unabhängig davon neuerdings auf der Berliner Gewerbeausstellung im Jahre 1879 vom Mechaniker Reimann als sogenannte Substitutionswaage in mehreren Exemplaren vorgeführt worden ist. Sie gewährt zugleich die Vortheile grösserer Einfachheit und Zuverlässigkeit durch Ersparung einer Keilschneide, leichterer Regulirung der Empfindlichkeit durch eine Stellschraube, welche, während der im vorigen Paragraph mit c bezeichnete Abstand hier bedeutungslos geworden ist, die Entfernung b des Balkenschwerpunktes B von der Ebene OA der beiden einzigen Schneiden beliebig zu ändern gestattet, und endlich den Vortheil, dass mit der constanten Gesammtbelastung auch dieser Schwerpunktsabstand b und somit die Empfindlichkeit für jede Masse des zu wiegenden Körpers K gleich gross ist.

Arretirungs- und Entlastungsvorrichtungen zur Schonung der Keilschneiden beim Nichtgebrauche und bei den Belastungsänderungen der Schalen sind, was die einfache Hebelwaage betrifft, nur im Falle sehr feiner Waagen zu wissenschaftlichen Zwecken üblich. Sie müssen so beschaffen sein, dass bei ihrem Gebrauche schädliche Stösse und Lagenänderungen der Schneiden auf den zugehörigen Pfannen möglichst vermieden werden. Wichtig in dieser Hinsicht ist die Reihenfolge, in welcher die Entlastung und Wiederbelastung der Mittelschneide und der Endschneiden stattfindet, und zwar ist es am besten, bei der Arretirung und Entlastung zuerst die Schalen von den Endschneiden und darauf den



Balken von der Mittelpfanne abzuheben, bei der Ingangsetzung zuerst die Schalen auf die Endschneiden und dann den Balken auf die Mittelpfanne niederzulassen, obschon gewöhnlich die Reihenfolge entweder bei der Arretirung oder bei der Ingangsetzung die umgekehrte, im einen Falle folglich entgegengesetzt derjenigen im anderen Falle ist. In Betreff solcher und anderer constructiver Einzelheiten, insbesondere auch in Betreff der Art und Weise, wie der Balken so hergestellt werden kann, dass er genügende Tragfähigkeit und Steifigkeit mit möglichster Leichtigkeit verbindet (verjüngter, durchbrochener und Dreiecksbalken von geeignetem Material, u. A. von Aluminium oder Phosphorbronze etc.), ferner bezüglich auf die Anordnung und Justirung der Schneiden u. s. f. muss hier auf Specialwerke, namentlich auf das Werk von Brauer über die Construction der Waage verwiesen werden. —

In Betreff der Handelswaagen sei nur noch darauf hingewiesen, dass oft ihr Balken nicht auf einem festen Gestelle (Stativ), sondern mit aufwärts gerichtetem kürzerem Zeiger (Zunge) in einem Gehänge gelagert ist. Diese Einrichtung erschwert zwar die Beruhigung der schwingenden Waage, macht sie aber von Aufstellungsfehlern unabhängig und schont die Mittelschneide, indem Stösse weniger ein Rutschen derselben auf der Pfanne, als eine Schwingung des Gehänges zur Folge haben, ebenso wie aus gleichem Grunde die mittelbare gelenkartige Verbindung der Schalen mit den betreffenden Pfannen zur Schonung der Endschneiden beiträgt.

Die Bequemlichkeit des Gebrauches einer Handelswaage im Kleinverkehr hat vielfach zu breiter Gabelung des Waagebalkens an den Enden veranlasst mit Verdoppelung der Endschneiden so, dass dieselbe am Ende A aus zwei in gerader Linie liegenden Einzelschneiden a, b, am Ende A_1 aus zwei in gerader Linie liegenden Schneiden a_1, b_1 besteht und somit kinematisch das eine wie das andere Schneidenpaar je einer einzigen Schneide gleich zu achten ist. Die genügende Erfüllung dieser Forderung sowie der Parallelismus der Geraden ab und $a_1 b_1$ mit der Mittelschneide ist freilich mit Schwierigkeiten verbunden und muss durch Prüfung vermittels verschiedener Belastungscombinationen, nämlich durch Belastung bei a und a_1, bei a und b_1, bei b und a_1, sowie bei b und b_1 geprüft werden. Auch muss dann behufs stabiler Stützung des Waagebalkens die Mittelschneide, eventuell durch Verdoppelung, entsprechend lang gemacht werden, nach den Vorschriften der Aichordnung für das deutsche Reich wenigstens $= 0{,}6$ der Gabelbreite $ab = a_1 b_1$, von Aussenkante zu Aussenkante der Schneiden gemessen.

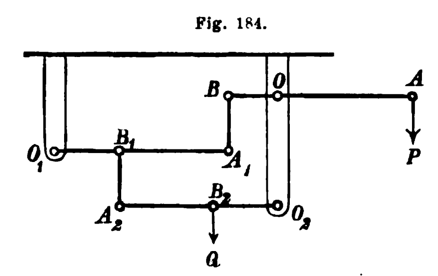


2. Zusammengesetzte Hebelwaagen.

§. 169. Uebersicht der Constructions-Arten und Regeln.

Der Ersatz einer einfachen durch eine zusammengesetzte Hebelwaage hat vorzugsweise den Zweck, bei der Wägung grösserer Lasten Q an Gegengewicht P und dadurch auch an Zeit zu sparen. Gewöhnlich ist die Einrichtung so, dass das Verhältniss $P:Q$, das sogenannte Verjüngungsverhältniss, $=1:10$ oder $=1:100$ ist; im deutschen Reiche sind überhaupt nur solche Decimal- und Centesimalwaagen aichungsfähig, also im öffentlichen Handelsverkehr zugelassen. Zwar könnte das Verjüngungsverhältniss auch schon durch eine ungleicharmige einfache Hebelwaage erzielt werden; doch ist es mit Rücksicht auf die der Verkürzung des kleineren Armes gesetzte praktische Grenze zur Vermeidung übermässig grosser Länge des anderen Armes meistens vorzuziehen, das verlangte Verjüngungsverhältniss auf zwei oder mehr Hebel zu vertheilen, die dann durch Zugstangen zu einer zusammengesetzten Drehkörperkette verbunden zu werden pflegen, z. B. nach Art von Fig. 184, in welcher AB den Gegengewichtshebel, $A_1 O_1$ einen Zwischenhebel, $A_2 O_2$ den Lasthebel bedeutet, beziehungsweise drehbar um die festen Axen O, O_1, O_2 und verbunden durch die Zugstangen BA_1, $B_1 A_2$. Dabei ist:

Fig. 184.



$$Q = P \frac{OA}{OB} \frac{O_1 A_1}{O_1 B_1} \frac{O_2 A_2}{O_2 B_2}.$$

Während hier die Last Q und das Gegengewicht P als auf Pendelschalen liegend vorausgesetzt sind, d. h. auf Schalen, die je an einer Schneide oder, was wesentlich einerlei ist, an zwei in gerader Linie liegenden Schneiden aufgehängt sind, wird nun aber meistens ausserdem verlangt, dass wenigstens die Lastschale von oben ganz frei zugänglich, ihre Belastung und Entlastung durch Aufhängungs-Schnüre, Ketten oder Bügel unbeschränkt sei. Dazu dient ihre Unterstützung von unten durch zwei oder mehr Schneiden, die nicht in gerader Linie liegen. Solche Waagen werden als oberschalige oder im Falle ebener plattenförmiger Schalen als Tafelwaagen, bei grösseren Dimensionen

insbesondere als **Brückenwaagen** bezeichnet. Letztere sind meistens Decimal- oder Centesimalwaagen, während oberschalige und Tafelwaagen für den gewöhnlichen Handelsverkehr auch ohne Verjüngung ($P = Q$) gebraucht werden. Hier werde mit Brauer die Bezeichnung als Brückenwaage auf die ganze Gattung bezogen, die durch den Umstand charakterisirt wird, dass die Lastschale (Brücke) mit zwei oder mehr Schneiden, die nicht in gerader Linie liegen, gestützt ist.

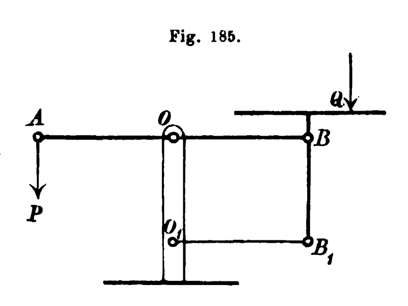
Wenn für eine unendlich kleine Configurationsänderung des Waagenmechanismus die Verticalbewegungen der Schwerpunkte von Last und Gegengewicht beziehungsweise $= \delta q$ und $= \delta p$ sind, positiv oder negativ verstanden, jenachdem sie sich abwärts oder aufwärts bewegen, so ist, falls die beweglichen Glieder der unbelasteten Waage für sich im Gleichgewicht sind, zum Gleichgewicht von P und Q erforderlich, dass

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0, \text{ also } -\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{P}{Q}$$

= dem verlangten Verjüngungsverhältnisse sei, und da dieses Verhältniss unabhängig vom Orte der Last auf der Brücke sein muss, ergiebt sich als Hauptgesetz für die Construction einer Brückenwaage die Forderung, **dass bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage die gleichzeitigen Verticalbewegungen aller Punkte der Brücke einander gleich sein müssen.**

Das einfachste Hülfsmittel zu diesem Zwecke wird durch eine ebene Drehkörperkette dargeboten, deren gegenüberliegende Glieder gleich lang sind. Wenn von derselben ein Glied OO_1, Fig. 185, so festgestellt wird, dass die Axen der Drehkörperpaare, bezw. die Keilschneiden horizontal sind, so sind die Verticalbewegungen aller Punkte des gegenüber liegenden Gliedes BB_1 nicht nur bei kleinen, sondern bei beliebig grossen Configurationsänderungen der Kette einander gleich, so dass der obigen Constructionsregel durch eine mit diesem Gliede BB_1 fest verbundene Lastschale (Brücke) in vollkommenster Weise entsprochen wird. Die in Fig. 185 angenommene und auch gewöhnlich stattfindende verticale Lage der Glieder OO_1 und BB_1 ist nicht wesentlich, vielmehr genügt es, das Glied BB_1 so zu führen, dass die Bewegungsrichtungen der Punkte B

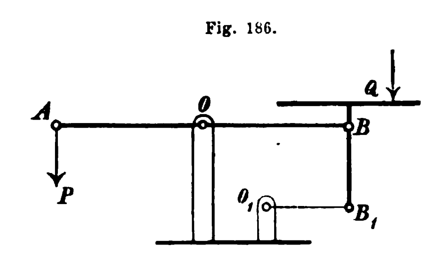
Fig. 185.



und B_1 parallel sind; indem nämlich die gleichzeitigen Elementarbewegungen dieser Punkte im Sinne BB_1 stets einander gleich sind, sind dann auch jene Elementarbewegungen selbst sowie ihre verticalen Componenten gleich gross.

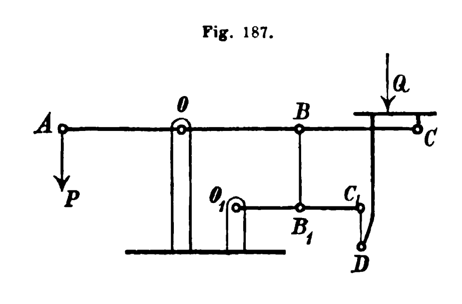
Insofern es nur darauf ankommt, der fraglichen Constructionsregel mit Rücksicht auf sehr kleine Schwingungen zu entsprechen, genügt schon eine solche Drehkörperkette, welche in der behufs der Wägung herbeizuführenden mittleren Gleichgewichtslage nach Art von Fig. 186 die Form eines Trapezes OBB_1O_1 hat. Auch hier ist nicht die verticale Lage von BB_1, sondern nur der Parallelismus der Glieder OB und O_1B_1 wesentlich, damit die darauf senkrechten Bewegungsrichtungen der Punkte B und B_1 parallel seien.

Fig. 186.



Waagen von dem Typus Fig. 185 oder Fig. 186, welche mit Brauer* beziehungsweise als Parallelogrammwaagen und als Trapezwaagen bezeichnet seien, haben indessen den gemeinsamen Uebelstand, dass bei der üblichen verticalen Lage von BB_1 die Last Q bei seitlicher Lage auf der Brücke neben der nach BB_1 gerichteten Kraft $= Q$ noch zu einem Kräftepaare Veranlassung giebt, bestehend aus zwei gleichen Kräften, welche in B und B_1 angreifend beziehungsweise im Sinne OB und B_1O_1 oder BO und O_1B_1 gerichtet sind. Der resultirende Druck, mit welchem die Elemente des Drehkörperpaares B und noch mehr die des Paares B_1 aufeinander wirken, ist somit von variabler Richtung, wodurch die Ausführung dieser Elemente als Keilschneiden und Pfannen erschwert oder wenigstens die Dauerhaftigkeit dieser Theile beeinträchtigt wird. Der Uebelstand ist beseitigt bei der abgeleiteten Trapezwaage, Fig. 187, die aus der Trapezwaage, Fig. 186, dadurch hervorgeht, dass die Hebel OB und O_1B_1 durch die Stange

Fig. 187.



* „Die Construction der Waage", §. 10.



BB_1 gelenkartig verbunden und mit weiteren Keilschneiden C, C_1 versehen werden, die in den Ebenen OB und O_1B_1 so liegen, dass

$$\frac{OC}{OB} = \frac{O_1C_1}{O_1B_1}$$

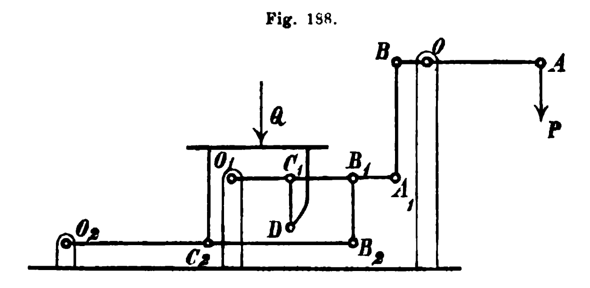
ist. Die elementaren Verticalbewegungen der Punkte C und C_1 haben dann zu denjenigen der Punkte B und B_1 dasselbe Verhältniss, sind also wie diese gleich gross und somit zur Stützung der Lastschale geeignet; dieselbe kann aber jetzt unbeschadet stets verticaler Drucke an den Schneiden C und C_1 an beliebiger solcher Stelle belastet werden, dass die Richtungslinie der Schwerkraft Q zwischen C und C_1 hindurch geht. Uebrigens erfordert die Stützung der Brücke durch die Schneiden C, C_1 die Einfügung eines weiteren Gliedes, das in Fig. 187 als Zugstange (Hängeschiene) C_1D angenommen ist, weil ohne dieses Glied die zusammengesetzte Kette $OBCDC_1B_1O_1$ (entsprechend dem Schema auf S. 206) gar nicht relativ beweglich sein, bezw. nur durch Deformation der Glieder oder durch Gleiten von Schneiden längs den Pfannen beweglich werden würde.

In den Figuren 185—187, worin A die Aufhängungsschneide der Gegengewichtsschale bedeutet, sind die Hebelarmverhältnisse so angenommen, dass bei Fig. 185 und Fig. 186 wegen $OA = OB$ die Last Q und das Gegengewicht P einander gleich, bei Fig. 187 sogar

$$Q = P\frac{OA}{OC} < P$$

sein würde. Indessen hat es keine Schwierigkeit, die Hebelverhältnisse auch so anzunehmen, dass $Q > P$ ist. Nöthigenfalls kann durch Hinzufügung eines Verjüngungshebels das Verjüngungsverhältniss verkleinert und so insbesondere die Waage als abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel nach dem durch Fig. 188 dargestellten Typus construirt werden. Hier ist $O_1B_1B_2O_2$ das ursprüngliche Trapez, dessen parallele Hebel O_1B_1 und O_2B_2 mit

Fig. 188.



den Schneiden C_1 und C_2, die so liegen, dass

$$\frac{O_1 C_1}{O_1 B_1} = \frac{O_2 C_2}{O_2 B_2}$$

ist, mit Einschaltung einer Zugstange $C_1 D$ die Brücke tragen. Würde dann der Hebel $O_1 B_1$ über O_1 hinaus verlängert und die Aufhängungsschneide A_1 der Gegengewichtsschale an dieser Verlängerung angebracht, so wäre

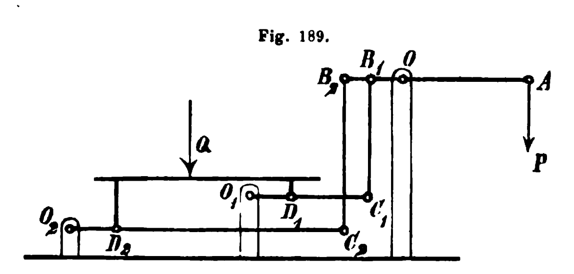
$$Q = P \frac{O_1 A_1}{O_1 C_1}.$$

Wird aber $O_1 B_1$ als einarmiger Hebel vermittels der Zugstange $A_1 B$ mit dem Verjüngungshebel AB verbunden, wie die Figur zeigt, so ist

$$Q = P \frac{OA}{OB} \frac{O_1 A_1}{O_1 C_1}.$$

Derselbe Zweck, ein gewisses Verjüngungsverhältniss $P:Q$ als Produkt von zwei Hebelverhältnissen zu erhalten, während die Bewegung der Brücke stets dem obigen Fundamentalgesetze entsprechend bleibt, kann auch durch eine Waage nach dem Typus Fig. 189 erreicht werden, die mit Brauer passend als Doppeltrapezwaage bezeichnet sei. Hier sind nämlich $OB_1 C_1 O_1$ und $OB_2 C_2 O_2$ zwei Trapeze, deren Seiten OB_1 und OB_2 dem Gegengewichtshebel angehören, während die damit parallelen Hebel die Brücke tragen vermittels zwei so liegender Schneiden D_1 und D_2, dass

Fig. 189.



$$\frac{O_1 C_1}{O_1 D_1} : \frac{O_2 C_2}{O_2 D_2} = OB_1 : OB_2$$

ist und somit

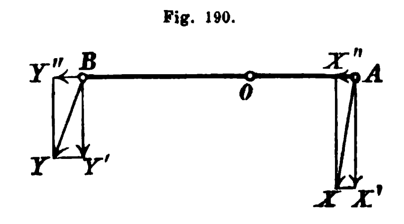
$$Q = P \frac{OA}{OB_1} \frac{O_1 C_1}{O_1 D_1} = P \frac{OA}{OB_2} \frac{O_2 C_2}{O_2 D_2}.$$

Durch Hinzufügung weiterer Hebel nach Art von Fig. 184 kann natürlich auch bei Brückenwaagen das Verhältniss $P:Q$ als Product von mehr als zwei Hebelverhältnissen erhalten werden. Mit dieser Erweiterung stellen dann aber die Figuren 184—189 die Typen dar, nach welchen zusammengesetzte Hebelwaagen in der Regel construirt sind. —

Aehnlich wie bei der einfachen Hebelwaage ist auch bei zusammengesetzten Hebelwaagen die **Stabilität** und die **Empfindlichkeit** vor Allem davon abhängig, wie die Schneiden und der Schwerpunkt jedes Hebels gegen einander liegen, ob nämlich bezüglich auf die durch zwei Schneiden des Hebels gehende (gewöhnlich horizontale) Ebene die übrigen Schneiden und der Schwerpunkt über oder unter der Ebene in grösserer oder kleinerer Entfernung von ihr sich befinden. Bei der Schwierigkeit indessen, die an den Hebeln hier unwandelbar festen Schneiden in ganz bestimmte relative Lagen zu bringen, die ohnehin mit den elastischen Deformationen etwas veränderlich sind, wird es vorgezogen, an jedem Hebel die sämmtlichen Schneiden möglichst genau in eine Ebene zu legen, um so mehr, als man dann ausser den Schwerpunktslagen gegen diese Ebenen hier noch ein anderes Hülfsmittel zur Sicherstellung passender Stabilität und Empfindlichkeit zur Verfügung hat, in den Winkeln nämlich, unter welchen die von einem Hebel ausgehenden Verbindungsstangen gegen die Schneidenebene desselben gerichtet werden. Eine Hauptregel in dieser Hinsicht ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Es sei AB, Fig. 190, ein um die Schneide O drehbarer Hebel, an welchem sich die in den Schneiden A und B angreifenden Kräfte X und Y von gegebenen Grössen und Richtungen Gleichgewicht halten; es fragt sich, unter welchen Umständen dieses Gleichgewicht stabil ist, falls die 3 Schneiden A, O, B in einer Ebene liegen? Jene Stabilität erfordert, dass bei beliebiger Drehung des Hebels um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi$ im einen oder anderen Sinne die Arbeitsumme der Kräfte X, Y negativ ist. Zerlegt man aber die letzteren in die Componenten X', X'' und Y', Y'' senkrecht zu AB und im Sinne AB, so ist wegen des Gleichgewichtes mit $OA = a$, $OB = b$:

Fig. 190.



$$X'a = Y'b$$

und deshalb die Arbeitsumme der Kräfte X', Y'

$$= \pm (X'a - Y'b) \sin \Delta\varphi = 0.$$

Die Arbeitsumme der Kräfte X'', Y'' dagegen ist

$$= (X''a - Y''b)(1 - \cos \Delta\varphi) < 0,$$

wenn $\frac{Y''}{X''} > \frac{a}{b}$, folglich $\frac{Y''}{X''} > \frac{Y'}{X'}$ oder $\frac{Y''}{Y'} > \frac{X''}{X'}$,

d. h. wenn der Winkel YBY' grösser, als der Winkel XAX' ist, was u. A. dann immer der Fall wäre, wenn AX auf die andere Seite von AX' fiele, einem negativen Winkel XAX' entsprechend. Das Gleichgewicht der am zweiarmigen Hebel in A und B angreifenden Kräfte X und Y ist folglich stabil, wenn die Richtungslinien dieser Kräfte sich in einem über A und B hinaus im Sinne XA und YB liegenden Punkte schneiden.

Wenn bei unveränderten Richtungslinien der im Gleichgewicht befindlichen Kräfte X, Y und bei unveränderter Grösse von X die Schneide O gegen B hin rückt, so wächst Y mehr und mehr und wird unendlich gross, wenn $OB = b$ bis Null abnimmt. Rückt dann O über B hinaus, so kehrt sich der Sinn von Y um, ohne dass die obige Schlussfolgerung, durch welche das Gleichgewicht als stabil erkannt wurde, wenn Winkel $YBY' >$ Winkel XAX' ist, eine Aenderung erführe; denn die Arbeit von Y'' bleibt negativ, indem diese Kraft im Sinne OB gerichtet bleibt. Daraus ist ersichtlich, dass das Gleichgewicht der Kräfte am einarmigen Hebel dann stabil ist, wenn die Richtungslinie der am kürzeren Arme OB in B angreifenden Kraft Y von der anderen in einem im Sinne BY liegenden Punkte geschnitten wird.

In beiden Fällen würde die Stabilität des Gleichgewichtes, insoweit sie von der Schwerpunktslage des Hebels unabhängig ist, einen etwas stumpfen Winkel OBY erfordern, falls der Winkel OAX ein rechter wäre. Letzteres ist z. B. der Fall bei dem Gegengewichtshebel einer Waage, welcher bei horizontaler Lage der Schneidenebene AOB an der Schneide A eine Pendelschale mit dem Gegengewichte trägt, während bei B eine Zugstange (z. B. BA_1, Fig. 184 oder Fig. 188) angreift; diese muss so gerichtet sein, dass OBA_1 ein etwas stumpfer Winkel ist, wenn der Hebel unabhängig von der Lage seines Schwerpunktes in stabilem Gleichgewichte sein soll. Dadurch, dass dieser Schwerpunkt unter der Schneidenebene liegt, wird die Stabilität erhöht.

Bei zusammengesetzten Hebelwaagen mit verjüngtem Gegengewichte $P < Q$ ist die Stabilität des Gleichgewichtes der Kräfte am Gegengewichtshebel deshalb vorzugsweise massgebend für die Stabilität des Gleichgewichtes der Kräfte P, Q und der Schwerkräfte aller Glieder des Waagenmechanismus, weil der Gegengewichtshebel derjenige ist, der die grössten Neigungsänderungen bei den Schwingungen der Waage erfährt. Wenn bei ihm die Lage des Schwerpunktes hinlänglich tief ist und die Anschlüsse von Zugstangen nach obiger Regel passend gewählt sind, kann



das Gleichgewicht der Kräfte an den übrigen Hebeln für sich indifferent oder selbst schon etwas labil sein, ohne dass mit Rücksicht auf die Zwangläufigkeit des ganzen Mechanismus dessen Stabilität dadurch aufgehoben werden müsste.

Bei indifferentem Gleichgewicht der Kräfte an einer Waage ist ihre Empfindlichkeit unendlich gross, und liegt es überhaupt in der Natur der Sache, dass ebenso, wie es sich für die einfache Hebelwaage im §. 167 ergeben hatte, so allgemein die Empfindlichkeit einer Waage um so grösser ist, je kleiner die Stabilität, weil, je kleiner der Arbeitsaufwand zur Herbeiführung einer gewissen Configurationsänderung ist, desto grösser umgekehrt die durch einen gewissen Arbeitsaufwand, herrührend von einer gewissen zusätzlichen Last, bewirkte Configurationsänderung sein muss. Der grösseren Stabilität des Gleichgewichtes, die für eine zusammengesetzte Hebelwaage verlangt zu werden pflegt, entspricht somit eine kleinere Empfindlichkeit, bei deren Beurtheilung insbesondere vom Einflusse elastischer Deformationen abgesehen werden kann.

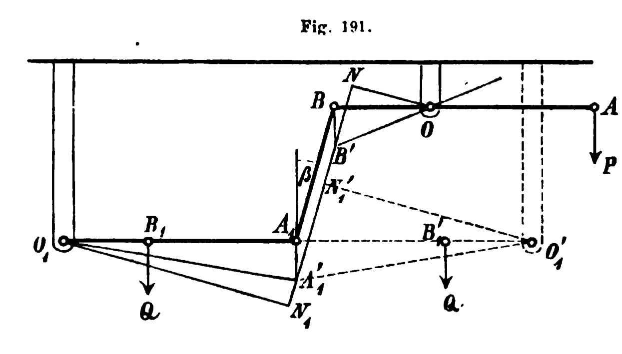
Die Justirung der Waage so, dass sie im unbelasteten Zustande gerade einspielt, ist begreiflicher Weise hier noch weniger leicht dauernd zu erreichen, als bei der einfachen Hebelwaage; gewöhnlich dient dazu entweder ein Schälchen am Knotenpunkte der die Gegengewichtsschale tragenden Ketten oder Schnüre zur Aufnahme von Tarirgewichten, oder ein Schiebegewicht, welches längs dem Gegengewichtshebel verschieblich und durch eine Klemmschraube feststellbar ist. Die an diesem Hebel befindliche Zunge, durch welche das Einspielen markirt wird, pflegt hier in Form einer horizontalen Schneide ausgeführt zu werden, die an einer nahe gegenüber liegenden unbeweglichen Schneide hin und her schwingen kann. Natürlich setzt das dauernde Einspielen der unbelasteten justirten Waage eine bestimmte Aufstellung derselben voraus; um diese bei tragbaren Brückenwaagen leicht controliren zu können, pflegt ein Fadenpendel benutzt zu werden, welches, oben am Waagengestelle hängend, gegen eine unten daran befindliche Marke gerichtet sein muss.

§. 170. Zusammengesetzte Hebelwaage mit Pendelschalen.

Diese dem Typus Fig. 184 entsprechende Waage hat den Zweck, eine Last Q mit Hülfe eines in bestimmtem Verhältnisse leichteren Gegengewichtes P zu wiegen, während beide ebenso wie bei der einfachen Hebelwaage von Pendelschalen getragen werden. Unter der Vor-

aussetzung, dass in der Gleichgewichtslage, bei welcher die Waage einspielt, die sämmtlichen Hebel, d. h. die Ebenen ihrer Keilschneiden horizontal sind, geht zwar aus den Erörterungen des vorigen §. ohne Weiteres hervor, dass die Stabilität einer Waage von der hier in Rede stehenden Art um so grösser, ihre Empfindlichkeit aber um so kleiner ist, je mehr die Winkel OBA_1, $O_1B_1A_2$ (Fig. 184) grösser, als rechte Winkel sind, und je tiefer die Schwerpunkte der Hebel liegen, ferner dass es in beiden Beziehungen vorzugsweise auf den Gegengewichtshebel AB und die von ihm ausgehende Verbindungsstange BA_1 ankommt; indessen bleibt noch übrig, specieller zu untersuchen, ob und wie das Verjüngungsverhältniss $P:Q$ und der Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi$ von verschiedenen Umständen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ abhängen.

Fig. 191.



Dabei werde eine Waage mit nur zwei Verjüngungshebeln vorausgesetzt, dem Gegengewichtshebel AB, Fig. 191, und dem Lasthebel, der entweder die Lage $A_1B_1O_1$ oder die in der Figur gestrichelt angedeutete Lage $A_1B'_1O'_1$ haben kann und in beiden Fällen mit dem Gegengewichtshebel durch die Zugstange BA_1 so zusammenhängt, dass

$$\text{Winkel } OBA_1 = 90^0 + \beta$$

ist. Die Hebellängen seien:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad O_1A_1 = O'_1A_1 = a_1, \quad O_1B_1 = O'_1B'_1 = b_1.$$

Die Waage sei so aufgestellt und justirt, dass sie mit unbelasteten Schalen bei horizontalen Lagen der Hebel im Gleichgewicht ist; eben solches Gleichgewicht finde statt bei Belastung der Schalen beziehungsweise mit P und Q. Wird dann die Last um ΔQ vergrössert, so finde das Gleichgewicht bei einer solchen geänderten Configuration statt, bei welcher die Zugstange BA_1 in die Lage $B'A'_1$ gekommen ist, entsprechend dem Drehungswinkel

$$BOB' = \Delta\varphi \text{ des Gegengewichtshebels,}$$

$$A_1O_1A'_1 \text{ bezw. } A_1O'_1A'_1 = \Delta\varphi_1 \text{ des Lasthebels.}$$

Dabei sei $\varDelta\varphi$ so klein, dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$\cos\varDelta\varphi = 1, \quad \sin\varDelta\varphi = tg\,\varDelta\varphi = \varDelta\varphi,$$

um so mehr also $\cos\varDelta\varphi_1 = 1, \quad \sin\varDelta\varphi_1 = tg\,\varDelta\varphi_1 = \varDelta\varphi_1$

gesetzt werden kann. Die Wege BB' und $A_1A'_1$ der Punkte B und A_1 sind dann als gleiche verticale gerade Linien $= b\varDelta\varphi$ zu betrachten und ist

$$\varDelta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\varDelta\varphi.$$

Sind ferner ON, O_1N_1, $O'_1N'_1$ normal zu $B'A'_1$, also auch zu BA_1, so sind die Winkel

$$NOB' = \beta + \varDelta\varphi, \quad N_1O_1A'_1 = \beta - \varDelta\varphi_1, \quad N'_1O'_1A'_1 = \beta + \varDelta\varphi_1,$$

und wenn Z die Spannung der Zugstange bedeutet, insoweit sie nur von den Kräften P und $Q + \varDelta Q$ herrührt, so entsprechen dem Gleichgewicht dieser Kräfte bezw. am Gegengewichts- und am Lasthebel die Gleichungen:

$$Zb\cos(\beta + \varDelta\varphi) = Pa\cos\varDelta\varphi$$

$$Za_1\cos(\beta \mp \varDelta\varphi_1) = (Q + \varDelta Q)b_1\cos\varDelta\varphi_1.$$

Aus ihnen folgt durch Division und mit

$$\cos\varDelta\varphi = \cos\varDelta\varphi_1 = 1, \quad \sin\varDelta\varphi = \varDelta\varphi, \quad \sin\varDelta\varphi_1 = \varDelta\varphi_1:$$

$$\frac{\cos\beta \pm \sin\beta\,\varDelta\varphi_1}{\cos\beta - \sin\beta\,\varDelta\varphi} = \left(1 + \frac{\varDelta Q}{Q}\right)\frac{Qbb_1}{Paa_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wo, was das doppelte Vorzeichen betrifft, das obere sich auf die Lage O_1A_1, das untere auf die Lage O'_1A_1 des Lasthebels bezieht. Da für $\varDelta Q = 0$ auch $\varDelta\varphi = \varDelta\varphi_1 = 0$ ist, folgt

$$1 = \frac{Qbb_1}{Paa_1} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} = \frac{b\,b_1}{a\,a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

unabhängig von β, und damit aus Gl. (1):

$$\frac{\varDelta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\sin\beta(\varDelta\varphi + \varDelta\varphi_1)}{\cos\beta - \sin\beta\,\varDelta\varphi}$$

oder mit $\varDelta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\varDelta\varphi$ und bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\frac{1}{\varepsilon} = tg\,\beta\left(1 + \frac{b}{a_1}\right)\varDelta\varphi; \quad \varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,cotg\,\beta\,\frac{a_1}{a_1 + b} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Läge der Punkt B auf der anderen Seite von O, also auf derselben wie A, ebenso B_1 auf der anderen Seite von O_1, also auf der entgegengesetzten wie A_1, so wäre BA_1 eine Druckstange, die dann behufs der Stabilität des Gleichgewichtes in demselben Sinne unter einem

gewissen Winkel β gegen die Lothrechte geneigt sein müsste, so dass jetzt OBA_1 ein etwas spitzer Winkel ist; auch für den Empfindlichkeitswinkel $\Delta\varphi$ würde sich derselbe Ausdruck (3) ergeben. Ihmzufolge ist dieser Winkel $\Delta\varphi$ im Verhältnisse $a_1 + b : a_1 - b$ grösser, wenn der Lasthebel die Lage $A_1 O'_1$, als wenn er die Lage $A_1 O_1$, Fig. 191, hat. In allen Fällen ist er proportional $cotg\,\beta$ und wird unendlich, indifferentem Gleichgewicht entsprechend, für $\beta = 0$. In diesem Falle kann jedoch $\Delta\varphi$ auf einen endlichen Betrag reducirt und somit die Stabilität dadurch gesichert werden, dass dem Schwerpunkte S des Hebels AB, dessen Gewicht $= W$ sei, eine gewisse Entfernung $= e$ von der Ebene der Schneiden A, O, B und zwar unterhalb derselben gegeben wird. Ist dann S' die Projection von S auf die Ebene AOB, so kann die in S angreifende Schwerkraft W durch eine gleich grosse in S' angreifende Kraft, die mit den Schwerkräften der übrigen Glieder des Waagenmechanismus beständig im Gleichgewichte bleibt, und durch ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Moment $= We \sin \Delta\varphi = We\,\Delta\varphi$ im Sinne einer Rückgängigmachung des Ausschlagwinkels $\Delta\varphi$ zu drehen strebt. Der durch das Zulagegewicht ΔQ zur Last Q etwas veränderten Gleichgewichtslage entspricht dann die Gleichung:

$$\Delta Q \frac{b_1}{a_1} b = We\,\Delta\varphi$$

und folgt daraus mit $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{bb_1}{ea_1} \frac{Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{a}{e} \frac{P}{W} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Insoweit die Empfindlichkeit von der Richtung der Verbindungsstange gegen die Hebel abhängt, ist sie nach (3) unabhängig von der Belastung der Waage; insoweit sie aber von der Schwerpunktslage des Gegengewichtshebels abhängt, nimmt sie nach (4) mit der Belastung zu, wenn auch nicht proportional derselben, weil in Wirklichkeit wegen der Biegung des Hebels die Entfernung e mit der Belastung etwas wächst. Im Allgemeinen können beide Hülfsmittel zusammenwirken, um eine dem jeweiligen Zwecke entsprechende Empfindlichkeit zu ergeben.

§. 171. Parallelogramm- und Trapezwaage.

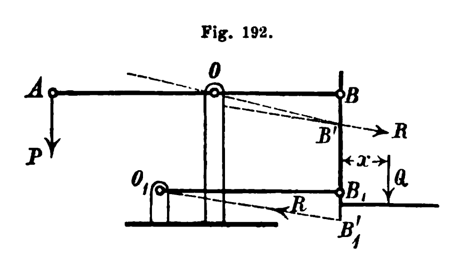
Die Parallelogrammwaage kann als besonderer Fall einer Trapezwaage betrachtet und mag deshalb zunächst für letztere (Fig. 192) der

Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ entwickelt werden, der auch für die Stabilitätsbedingung massgebend ist. Dabei wird angenommen, dass bei horizontalen Lagen des Hebels (Waagebalkens) AB und des Gliedes O_1B_1 die Schwerkräfte aller beweglichen Glieder nebst Schalen für sich im Gleichgewicht sind, ebenso wie die Last Q mit dem Gegengewichte P. Die Gliedlängen seien

$$OA = a, \quad OB = b, \quad O_1B_1 = b_1, \quad BB_1 = h;$$

ferner sei W das Gewicht des Hebels AB und e die Entfernung seines Schwerpunktes von der über ihm liegenden Keilschneidenebene AOB, B das Gewicht der Brücke (Lastschale) und s die Entfernung ihres Schwerpunktes von der lothrechten Geraden BB_1, positiv oder negativ verstanden, jenachdem er im Sinne OB oder BO ausserhalb BB_1 gelegen ist; endlich sei x, ebenso wie s algebraisch verstanden, der Schwerpunktsabstand der Last Q von der Geraden BB_1, während das Gegengewicht P, auf einer Pendelschale ruhend, eine in A angreifende Kraft ist.

Fig. 192.



Bei stabilem Gleichgewichte hat die Vergrösserung der Last um den kleinen Betrag ΔQ eine etwas veränderte Gleichgewichtsconfiguration des Mechanismus mit tiefer gelegener Lastschale zur Folge, entsprechend in Fig. 192 den kleinen Drehungswinkeln

$$BOB' = \Delta\varphi \text{ des Waagebalkens } AB,$$

$$B_1O_1B'_1 = \Delta\varphi_1 = \frac{b}{b_1}\cdot\Delta\varphi \text{ des Gliedes } O_1B_1,$$

welche Winkel wieder als so klein angenommen werden, dass

$$\cos\Delta\varphi = \cos\Delta\varphi_1 = 1, \quad \sin\Delta\varphi = \Delta\varphi, \quad \sin\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1$$

gesetzt und somit die Gerade BB_1 als in sich selbst nach $B'B'_1$ verschoben angesehen werden kann. Nun zerfallen die Kräfte B und $Q + \Delta Q$ in ebenso grosse längs BB_1 gerichtete Kräfte und in Kräftepaare mit den Momenten Bs und $(Q + \Delta Q)x$, welche zusammen eine in B'_1 angreifende gegen O_1 gerichtete Kraft und eine damit parallel in B' angreifende, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft von der Grösse

$$R = \frac{Bs + (Q + \Delta Q)x}{h\cos\Delta\varphi_1} \text{ nahe } = \frac{Bs + Qx}{h}$$

verursachen. Die in B' angreifende Kraft R wirkt drehend auf den

Hebel AB und zwar unter den Verhältnissen von Fig. 192 ($b_1 > b$) in einerlei Sinn drehend mit dem Gegengewichte P, nämlich mit dem Momente Rr am Hebelarme

$$r = b(\Delta\varphi - \Delta\varphi_1) = b\left(1 - \frac{b}{b_1}\right)\Delta\varphi.$$

In demselben Sinne dreht auch das Moment $= We\Delta\varphi$ des Kräftepaares, welches aus der Versetzung der Schwerkraft W des Hebels AB von seinem Schwerpunkte S an dessen Projektion S' auf die Ebene AOB hervorgeht.

Mit Rücksicht darauf, dass die längs BB_1 gerichtete Kraft B nebst dem auf die Schneide B_1 reducirten Gewichte des Gliedes O_1B_1 mit der in S' angreifenden Schwerkraft W und der in A angreifenden Schwere der Gegengewichtsschale im Gleichgewichte ist, dass ebenso auch zwischen der längs BB_1 gerichteten Kraft Q und der in A angreifenden Kraft P Gleichgewicht besteht, muss auch das Moment $= \Delta Q \cdot b$, mit welchem die längs BB_1 gerichtete Kraft ΔQ den Hebel AB zu drehen strebt, $=$ der Summe der entgegengesetzt drehenden Momente Rr und $We\Delta\varphi$, d. h. mit Rücksicht auf die Werthe von R und r:

$$\Delta Q \cdot b = \frac{Bs + Qx}{h} b \frac{b_1 - b}{b_1} \Delta\varphi + We\Delta\varphi$$

sein, und ergiebt sich daraus der Empfindlichkeitswinkel:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\Delta Q}{\dfrac{Bs + Qx}{h}\dfrac{b_1 - b}{b_1} + \dfrac{We}{b}} \\ &= \frac{\Delta Q}{\dfrac{Qx'}{h}\dfrac{b_1 - b}{b_1} + \dfrac{We}{b}} \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{B}{Q}s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1.$$

Die Empfindlichkeit einer Trapezwaage ($b_1 - b$ nicht $= 0$) ist hiernach abhängig von x, d. h. von der Lage der Last auf der Brücke. Indem ferner die Stabilität einen positiven endlichen Werth von $\Delta\varphi$ erfordert, müssen für $e = 0$, d. h. ohne Mitwirkung des Untergewichts des Waagebalkens AB die Grössen $b_1 - b$ und x' zugleich positiv oder negativ sein. Wenn also die Lastschale so angeordnet ist, dass x' je nach der Lage der Last sowohl positiv wie negativ sein kann (siehe z. B. Fig. 186), müsste die Stabilität entweder durch entsprechendes Untergewicht des Waagebalkens herbeigeführt, oder es muss, wenn bei nicht sehr kleinem Absolutwerthe von x' ein allzu grosser Werth von We dazu nöthig wäre, $b_1 = b$ gemacht werden.

Als reine Trapezwaage, d. h. abgesehen von den verschiedenen Arten abgeleiteter Trapezwaagen, hat in der That nur dieser die Parallelogrammwaage charakterisirende Specialfall $b_1 = b$ praktisches Interesse. Für denselben wird nach Gl. (1):

$$\varDelta\varphi = \frac{b}{e}\frac{\varDelta Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{b}{e}\frac{Q}{W} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{a}{e}\frac{P}{W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (4) im vorigen Paragraph. Die Empfindlichkeit ist von der Lage der Last unabhängig, wesentlich aber abhängig vom Untergewichte des Waagebalkens, das zur Sicherung der Stabilität erforderlich ist.

Diese Parallelogrammwaage ist als sogenannte oberschalige Waage die am allgemeinsten gebräuchliche Waage für den kaufmännischen Detailverkehr, und zwar in der Weise ausgeführt, dass entsprechend $a = b$, also $P = Q$, beide Seiten ganz gleich, beide Schalen zwangläufig geführte Oberschalen sind. Die betreffende typische Figur geht aus Fig. 185 dadurch hervor, dass deren rechte Seite auf der linken Seite des Ständers OO_1 als ein dem Parallelogramm OBB_1O_1 congruentes Parallelogramm OAA_1O_1 wiederholt wird. Dabei können die zwei Glieder O_1A_1 und O_1B_1 zu einem unteren Waagebalken $A_1O_1B_1$ vereinigt werden, wie es bei der ursprünglich nach Roberval benannten solchen gleicharmigen Waage mit zwei Oberschalen der Fall war, aber auch sonst seiner Einfachheit wegen nicht selten geschieht. Zur Vermeidung von Klemmungen oder Gleitungen an den Schneiden müssen dann freilich die zweierlei Gliedlängen OA, OB, O_1A_1, O_1B_1 und AA_1, OO_1, BB_1 mit erhöhter Sorgfalt je unter sich gleich gemacht werden; trotzdem bleibt es ungewiss, weil von unvermeidlichen Zufälligkeiten abhängig, in welchem Maasse die Belastung vom unteren und vom oberen Waagebalken getragen wird, so dass jeder von ihnen zur Inanspruchnahme auf Biegung durch die ganze Belastung ausreichende Dimensionen erhalten muss. Vortheilhafter in diesen Beziehungen ist die Anwendung gesonderter Glieder O_1A_1 und O_1B_1, die nur auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen werden. Auch kann dann dadurch, dass, wie bei der Waage von Westphal, jedes dieser Glieder, z. B. O_1B_1 an beiden Enden mit Doppelschneiden versehen wird so, dass bei O_1 diese zwei Schneiden nicht ganz in gerader Linie liegen, sondern in kleinem Abstande $= 2y$ einander parallel sind, dem betreffenden Gliede die Länge

$$b_1 = b + y \quad \text{oder} \quad b_1 = b - y$$

gegeben werden, jenachdem sie auf Druck oder auf Zug beansprucht,



jenachdem also x' in Gl. (1) positiv oder negativ ist. Dadurch kann ohne Beihülfe von Untergewicht des Waagebalkens der doppelten Rücksicht auf Stabilität und auf genügende Empfindlichkeit Rechnung getragen werden, indem nach Gl. (1):

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{Q}\frac{h}{x'}\frac{b}{\pm y} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{h}{x'}\frac{b}{\pm y} \quad \text{. . . . . (3}$$

wird. Die Empfindlichkeit ist dann unabhängig von der Belastung, während sie infolge von Untergewicht des Waagebalkens bei genau gleichen Längen $OA = OB = O_1A_1 = O_1B_1$ nach Gl. (2) proportional der Belastung veränderlich ist. —

Um für grössere Lasten die Parallelogrammwaage als verjüngte, z. B. als Decimalwaage herzustellen, braucht nur das Hebelarmverhältniss

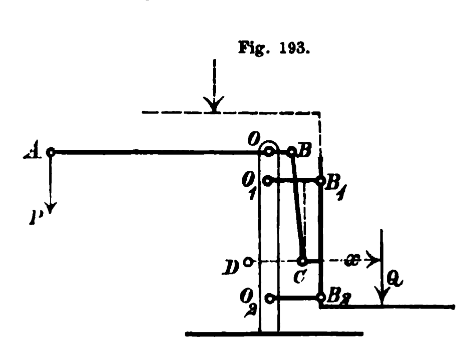
$$\frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} = 10$$

gemacht zu werden. Wird dann die Brücke behufs leichter Aufbringung der Last tief liegend so angeordnet, wie Fig. 192 andeutet, so ist immer x' positiv, also die Stabilität auch ohne Untergewicht des Waagebalkens dadurch zu sichern, dass b_1 etwas $> b$ gemacht wird. Ist etwa $b_1 = b + y$, so ist dann nach Gl. (3):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{h}{x'}\frac{b}{y} \quad \text{mit} \quad x' = x + \frac{B}{Q}s.$$

Gebräuchlicher ist indessen die Herstellung der Parallelogrammwaage als Decimalwaage mit Hülfe eines besonderen Verjüngungshebels, wie bei der Brückenwaage von George, Fig. 193. Hier ist die durch den Mechanismus $O_1B_1B_2O_2$ parallel geführte Brücke vermittels der Zugstange BC an den Waagebalken AB mit dem Armverhältnisse $OA : OB = 10$ angehängt, und können die Längen O_1B_1, O_2B_2 möglichst genau gleich, übrigens beliebig lang $= b_1$ gemacht werden, indem die Stabilität ohne Beihülfe von Untergewicht des Hebels AB dadurch herbeigeführt werden kann, dass der Winkel OBC etwas $> 90°$ gemacht wird. Ist nämlich dieser

Fig. 193.



Winkel $= 90^0 + \beta$ und $OB = b$, so ist nach Gl. (3) im vorigen Paragraph der Empfindlichkeitswinkel

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \, cotg \, \beta \frac{b_1}{b_1 - b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

weil in Betreff des Gleichgewichts der Kräfte am Hebel AB sich Alles gerade so verhält, als ob die Schwerkraft der Brücke und der Last Q unmittelbar im Punkte C angriffe, dieser aber in einem Kreise mit dem Mittelpunkte D (DC parallel und gleich $O_1B_1 = O_2B_2$) beweglich und somit der Mechanismus $AOBCD$ von jenem $AOBA_1O'_1$, Fig. 191, nicht verschieden ist, wenn man darin B'_1 mit A_1 zusammenfallen lässt. Von den Gliedern O_1B_1 und O_2B_2 wird jenes gezogen, dieses gedrückt mit einer Kraft

$$= \frac{Bs + Qx}{h},$$

die somit um so kleiner ist, je grösser $O_1O_2 = B_1B_2 = h$.

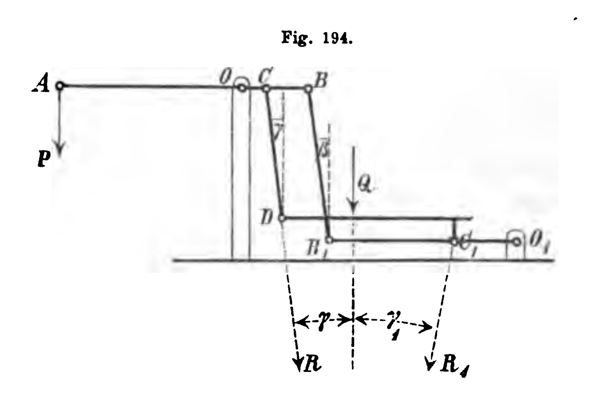
Bei der constructiven Ausführung der Waage von George sind die Glieder O_1B_1 und O_2B_2 je doppelt vorhanden, ebenso die Zugstange BC, indem der Hebel AB gegen B hin gegabelt ist und die Keilschneiden O, B in je zwei in gerader Linie liegende Schneiden zerlegt sind. Häufiger, als mit tief liegender Brücke zur Aufnahme grösserer Lasten, findet sich übrigens diese Waage in Deutschland mit hoch liegender Brücke (in Fig. 193 punktirt angedeutet) als Tischwaage für kleinere Lasten im Gebrauch; dabei ist x' negativ, O_1B_1 auf Druck, O_2B_2 auf Zug in Anspruch genommen.

§. 172. Abgeleitete Trapezwaagen.

Unter diesem Namen seien hier nicht nur die im §. 169 im engeren Sinne so genannten abgeleiteten Trapezwaagen, sondern auch Doppeltrapezwaagen, die einen und anderen event. mit Verjüngungshebel, verstanden. Was aber zunächst die abgeleiteten Trapezwaagen im engeren Sinne betrifft, so können sie unterschieden werden als solche, bei denen die nicht parallelen Seiten des zu Grunde liegenden Trapezes OBB_1O_1 sich ausserhalb oder zwischen den parallelen Seiten schneiden, somit OB und O_1B_1 gleich gerichtet sind (wie in Fig. 187) oder entgegengesetzt gerichtet (wie bei den Trapezen $OB_1C_1O_1$ und $OB_2C_2O_2$ in Fig. 189), ferner als solche, bei denen die zwischen C und C_1 ein-

geschaltete Stange CD bezw. C_1D bei C an den Gegengewichtshebel OB oder (wie in Fig. 187) bei C_1 an den Führungshebel O_1B_1 angehängt ist. Bei folgender Untersuchung der Stabilität und Empfindlichkeit solcher Waagen werde von dem gewöhnlichsten, durch Fig. 194 dargestellten Falle ausgegangen, dass OB und O_1B_1 entgegengesetzt gerichtet sind und dass die eingefügte Stange (CD) am Gegengewichtshebel angehängt ist. Dabei sei:

Fig. 194.



$$OA = a,\quad OB = b,\quad OC = c,\quad O_1B_1 = b_1,\quad O_1C_1 = c_1,$$

also nach §. 169:

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} \text{ und } \frac{Q}{P} = \frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

im Gleichgewichtszustande mit horizontalen Hebeln, falls die unbelastete Waage für sich in gleicher Weise einspielt.

Wird die Kraft Q in die durch C gehende Componente R und die durch C_1 gehende Componente R_1 zerlegt, so ist die Richtungslinie der einen (die von R in Fig. 194) durch die Richtung der von C oder C_1 ausgehenden Koppelstange (CD in Fig. 194) gegeben und dadurch dann auch die Richtungslinie der anderen Componente bestimmt, weil beide sich in einem Punkte der Richtungslinie von Q schneiden. Hiernach seien für die mittlere Gleichgewichtslage (bei horizontalen Hebeln) die Winkel

$$OCR = 90^0 + \gamma,\quad OBB_1 = O_1B_1B = 90^0 + \beta,\quad O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1.$$

Ist das Gleichgewicht stabil, so findet es, wenn Q an derselben Stelle durch $Q + \Delta Q$ ersetzt wird, bei etwas veränderter Configuration statt, indem die Hebel OB und O_1B_1 bezw. um die Winkel $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_1$ abwärts gedreht werden, welche so klein seien, dass

$$\cos\Delta\varphi = \cos\Delta\varphi_1 = 1,\quad \sin\Delta\varphi = \Delta\varphi,\quad \sin\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1 \ldots (2$$

gesetzt werden kann. Die Punkte B, C, B_1, C_1, D haben sich dabei um kleine Strecken vertical abwärts bewegt und ist

$$b\,\Delta\varphi = b_1\,\Delta\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3;$$

obige Winkel aber sind übergegangen in:

$$\left.\begin{array}{ll} OCR = 90^0 + \gamma + \Delta\varphi, & OBB_1 = 90^0 + \beta + \Delta\varphi \\ O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1 + \Delta\varphi_1, & O_1B_1B = 90^0 + \beta - \Delta\varphi_1 \end{array}\right\} \ldots (4).$$

Das Moment, mit welchem die Last $Q + \Delta Q$ den Hebel AB zu drehen strebt (im Sinne einer Vergrösserung von $\Delta\varphi$), kann bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung zerlegt werden in das Moment der in C angreifenden zusätzlichen Last ΔQ und in die Momente, welche von den Componenten R, R_1 der Kraft Q herrühren. Letztere sind zusammen:

$$M = Rc \sin OCR + R_1 c_1 \sin O_1C_1R_1 \frac{b \sin OBB_1}{b_1 \sin O_1B_1B}$$

oder mit Rücksicht auf (4) und (2):

$$M = Rc(\cos\gamma - \sin\gamma\,\Delta\varphi) + R_1c_1(\cos\gamma_1 - \sin\gamma_1\,\Delta\varphi_1)\frac{b}{b_1}\frac{\cos\beta - \sin\beta\,\Delta\varphi}{\cos\beta + \sin\beta\,\Delta\varphi_1}$$

oder gemäss Gl. (1) und analog (2), da auch β, γ und γ_1 ebenso wie $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_1$ stets sehr kleine Winkel sind:

$$M = Rc(1 - \gamma\,\Delta\varphi) + R_1c(1 - \gamma_1\,\Delta\varphi_1)\frac{1 - \beta\,\Delta\varphi}{1 + \beta\,\Delta\varphi_1}$$

$$= Rc(1 - \gamma\,\Delta\varphi) + R_1c[1 - \gamma_1\,\Delta\varphi_1 - \beta(\Delta\varphi + \Delta\varphi_1)]$$

mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung, oder endlich, da mit derselben Annäherung, mit welcher $\cos\gamma = \cos\gamma_1 = 1$ und $\sin\gamma = \gamma$, $\sin\gamma_1 = \gamma_1$ gesetzt wurde, auch

$$R\gamma = R_1\gamma_1 \quad \text{und} \quad R + R_1 = Q \ldots\ldots\ldots (5)$$

ist,

$$M = Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)(\Delta\varphi + \Delta\varphi_1)$$

$$= Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)\left(1 + \frac{b}{b_1}\right)\Delta\varphi.$$

Nun ist die Bedingung des Gleichgewichtes der Kräfte am Hebel AB in seiner geänderten Gleichgewichtslage:

$$\Delta Q \cdot c + M - Pa - M' = 0,$$

unter M' das Moment verstanden, mit welchem die in stabilem Gleichgewichte befindlichen Schwerkräfte der beweglichen Glieder den Hebel AB der unbelasteten Waage in seine mittlere Gleichgewichtslage zurückzudrehen streben. Die Einsetzung des Werthes von M giebt:

$$\Delta Q \cdot c + Qc - R_1c(\beta + \gamma_1)\frac{b_1 + b}{b_1}\Delta\varphi - Pa - M' = 0$$

oder, da für $\Delta Q = 0$ auch $\Delta\varphi = 0$ und $M' = 0$, also in Ueberein-

stimmung mit Gl. (1)

$$Qc = Pa$$

ist, und wenn ferner $M' = Kc\,\Delta\varphi$ gesetzt wird:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{R_1(\beta + \gamma_1)\frac{b_1 + b}{b_1} + K} \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

Hieraus folgt, dass wenn bei der durch Fig. 194 dargestellten Anordnung der abgeleiteten Trapezwaage, überhaupt bei entgegengesetzten Richtungen der parallelen Trapezseiten OB, O_1B_1 das Gleichgewicht der Kräfte ohne Beihülfe der Stabilität der unbelasteten Waage ($K = 0$) stabil sein soll, die Winkelsumme $\beta + \gamma_1$ positiv sein muss. Wenn aber die eingefügte Koppel an den Gegengewichtshebel angeschlossen ist (wie die Zugstange CD in Fig. 194), so kann je nach der Lage der Last auf der Brücke der Absolutwerth von γ_1 sehr verschieden, insbesondere auch = Null sein, woraus folgt, dass β und γ_1 je für sich positiv sein müssen, also auch, da γ und γ_1 gleichzeitig positiv oder negativ (die Winkel OCR und $O_1C_1R_1$ gleichzeitig stumpf oder spitz) sind, dass in Fig. 194 die Winkel β und γ positiv, d. h. die Winkel OBB_1 und OCD stumpf sein müssen.

Auf ähnliche Weise kann in anderen Fällen die Stabilität geprüft werden. Nur ist in Gl. (6), wenn die Trapezseiten OB, O_1B_1 gleich gerichtet sind, b_1 durch $-b_1$ und γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen, falls die Winkel β, γ, γ_1 algebraisch immer so verstanden werden, dass

$$OBB_1 = 90^0 + \beta, \quad OCR = 90^0 + \gamma, \quad O_1C_1R_1 = 90^0 + \gamma_1 \quad \ldots (7)$$

ist, unter R und R_1 die beziehungsweise durch C und C_1 gehenden Componenten von Q verstanden. Die Nothwendigkeit des Ersatzes von b_1 durch $-b_1$ in diesem Falle ist ohne Weiteres einleuchtend und analog dem doppelten Vorzeichen in Gl. (3), §. 170, mit Bezug auf die Doppelfigur 191; dass aber auch γ_1 durch $-\gamma_1$ zu ersetzen ist, entspricht dem Umstande, dass, während bei entgegengesetzt gerichteten parallelen Trapezseiten (Fig. 194) die Winkel OCR und $O_1C_1R_1$ gleichzeitig stumpf oder spitz sind, von denselben bei gleich gerichteten parallelen Trapezseiten (Fig. 187) der eine stumpf, wenn der andere spitz ist. Allgemein ist also der Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels einer abgeleiteten Trapezwaage:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{R_1(\beta \pm \gamma_1)\frac{b_1 \pm b}{b_1} + K} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Allgemein kann man jetzt sagen, dass das Gleichgewicht der Kräfte P, Q unabhängig von der Stabilität des Gleichgewichtes der unbelasteten Waage stabil ist, wenn $\beta + \gamma_1$ und $b_1 \pm b$ gleichzeitig positiv oder negativ sind; ist z. B. bei gleich gerichteten parallelen Trapezseiten $b_1 < b$, so muss $\beta - \gamma_1$ negativ sein u. s. f.

Nach Gl. (8) ist der Empfindlichkeitswinkel im Allgemeinen abhängig von der Lage der Last auf der Brücke, da hiermit R_1 und γ_1 veränderlich sind. Nun ist aber wegen $R_1(+\gamma_1) = R\gamma$ und $R + R_1 = Q$ nach Gl. (5):

$$R_1(\beta + \gamma_1) = R_1\beta + R\gamma = Q\beta,$$

wenn $\beta = \gamma$ gemacht wird, und wird dann unabhängig von der Lage der Last:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{Q\beta\frac{b_1 + b}{b_1} + K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

insbesondere mit $K = 0$ und $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{b_1}{b_1 + b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

analog Gl. (3) im §. 170 mit $cotg\,\beta = \frac{cos\,\beta}{sin\,\beta} = \frac{1}{\beta}$. Natürlich kann aber die Bedingung $\beta = \gamma$ nur dann stets erfüllt werden, wenn γ ebenso wie β ein durch die Construction bestimmter, von der zufälligen Lage der Last auf der Brücke unabhängiger Winkel ist, wenn also die Koppel bei C an den Gegengewichtshebel angeschlossen wird, wie es u. A. bei der Waage gemäss Fig. 194 der Fall ist. —

Die ihrem Wesen nach durch diese Figur 194 dargestellte abgeleitete Trapezwaage ist die sehr verbreitete Decimalwaage von Quintenz oder auch sogenannte Strassburger Brückenwaage. Dem Obigen zufolge ist sie behufs der Stabilität des Gleichgewichtes ohne Hülfe von Untergewicht der Waagebalken und behufs gleicher Empfindlichkeit für jede Lage der Last auf der Brücke so zu construiren, dass die Winkel OBB_1 und OCD gleich gross und etwas $> 90^0$ sind, während die Unabhängigkeit des Verjüngungsverhältnisses $P : Q = OC : OA = 1 : 10$ von jener Lage der Last an die Bedingung $OC : OB = O_1C_1 : O_1B_1$ geknüpft ist.

Was die mancherlei Variationen der abgeleiteten Trapezwaage betrifft, so ist zu bemerken, dass sie sich nicht nur insofern

unterscheiden können, als OB und O_1B_1 gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, die Brücke durch eine Koppel mit OB oder mit O_1B_1 verbunden,

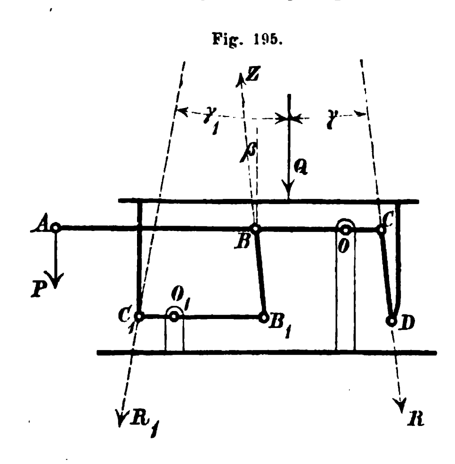
$$\frac{OB}{O_1B_1} \lessgtr 1, \quad \frac{OC}{OB} = \frac{O_1C_1}{O_1B_1} \lessgtr 1$$

ist, sondern auch insofern, als die Stangen BB_1 und CD bezw. C_1D entweder, wie es bei Fig. 194 und überhaupt gewöhnlich der Fall ist, auf Zug oder auf Druck in Anspruch genommen sind. Auch durch letzteren Unterschied werden die obigen Schlussfolgerungen nicht berührt, falls nur die Winkel β, γ, γ_1 auf entsprechende Weise algebraisch verstanden werden. Was γ und γ_1 betrifft, so wurden diese Winkel durch die Definitionsgleichungen (7) bereits ausdrücklich auf die Richtungen der Kraftcomponenten R, R_1 von Q bezogen; dagegen muss die Definition des Winkels $\beta = OBB_1 - 90^0$, die sich auf die Voraussetzung bezog, dass die Richtung BZ der durch die Stange BB_1 auf den Gegengewichtshebel übertragenen Kraft mit der Richtung von B gegen B_1 übereinstimmt, nachträglich durch die Definition:

$$\text{Winkel } OBZ = 90^0 + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, a)$$

ersetzt werden, um den Ausdruck (8) von $\Delta\varphi$ mit den daraus gezogenen Folgerungen allgemein gültig bleiben zu lassen.

Fig. 195.



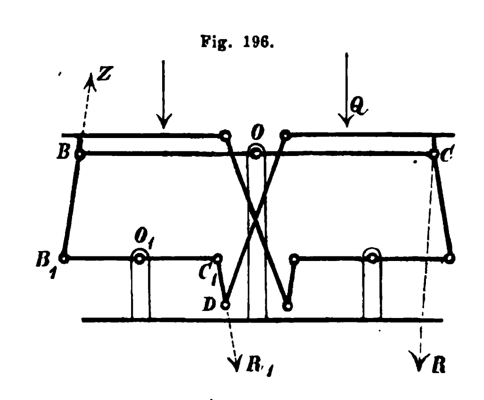
Eine hierher gehörige Variation der abgeleiteten Trapezwaage ist die durch Fig. 195 im Princip dargestellte Waage von Pellenz. Sie geht aus der Waage von Quintenz (Fig. 194) dadurch hervor, dass die Schneiden B und B_1 auf die anderen Seiten von O und O_1 verlegt werden. Indem aber jetzt die Verbindungsstange BB_1 auf Druck beansprucht wird, ist der Winkel OBB_1 etwas $< 90^0$ zu machen, so dass BB_1 und CD nach wie vor parallel bleiben. Der Empfindlichkeitswinkel ohne Rücksicht auf Untergewicht der Hebel ist dann wie bei der Quintenz-Waage nach Gl. (10):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\,\frac{b_1}{b_1 + b}, \quad \text{insbesondere} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varepsilon\beta} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

wenn bei der Waage von Pellenz $b = b_1$ gemacht wird.

Aehnlich den im vorigen Paragraph besprochenen oberschaligen Parallelogrammwaagen für den kaufmännischen Detailverkehr, entsprechend $P = Q$, ist auch die abgeleitete Trapezwaage als oberschalige Gleichwaage, wie sie mit Brauer ihrem Wesen nach im Allgemeinen bezeichnet werde, mehrfach im Gebrauch. Besonders verbreitet ist die Waage von Pfanzeder, bezw. von Gebr. Pfitzer: Fig. 196. Sie entspricht mit symmetrischer Verdoppelung dem Falle, dass die parallelen Seiten OB und O_1B_1 des zu Grunde liegenden Trapezes gleich gerichtet sind, dass also in Gl. (8) die unteren Vorzeichen gelten. Jede Schale wird unmittelbar vom Waagebalken und durch Vermittlung der Koppel vom Führungshebel getragen, z. B. die rechtseitige Schale, Fig. 196, bei C vom Waagebalken und vermittels der Koppel C_1D bei C_1 vom Führungshebel. Von den Componenten R, R_1 der Kraft Q hat letztere die Richtung C_1D, erstere die Richtung von C gegen den Schnittpunkt von Q und R_1; die Verbindungsstange BB_1 wird auf Druck beansprucht. Die Stabilität erfordert einen positiven Werth des Nenners im Ausdrucke (8) von $\Delta\varphi$, worin die unteren Vorzeichen gelten, also ohne Beihülfe von Untergewicht ($K = 0$) mit Rücksicht darauf, dass hier $b_1 - b$ negativ ist, auch einen negativen Werth von $\beta - \gamma_1$. Somit muss

Fig. 196.



$$\gamma_1 > \beta, \text{ d. h. Winkel } O_1C_1R_1 > OBZ$$

sein. Dazu ist es zwar nicht nöthig, dass $O_1C_1R_1$ etwas stumpf, OBZ etwas spitz sei, doch ist es deshalb zweckmässig, weil dann OCR etwas spitz und somit möglichst angenähert der Bedingung $OBZ = OCR$ ($\beta = \gamma$) für die Unabhängigkeit des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ von der Angriffsstelle der Last Genüge zu leisten ist. —

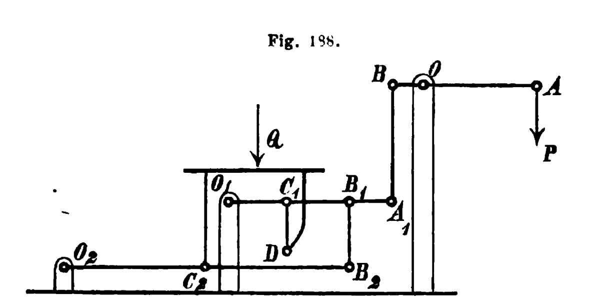
Eine abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel wurde im §. 169 durch die typische Figur 188 veranschaulicht. Für dieselbe ist, wenn

$$\begin{array}{lll} OA = a & OB = b & \\ O_1A_1 = a_1 & O_1B_1 = b_1 & O_1C_1 = c_1 \\ & O_2B_2 = b_2 & O_2C_2 = c_2 \end{array}$$

gesetzt wird:
$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}; \quad \frac{Q}{P} = \frac{a}{b}\frac{a_1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Setzt man ferner die Winkel:
$$OBA_1 = 90^0 + \beta, \quad O_1B_1B_2 = 90^0 + \beta_1, \quad O_1C_1D = 90^0 + \gamma_1,$$
so hat die Annahme $\beta_1 = \gamma_1$ (analog der obigen Annahme $\beta = \gamma$ mit Bezug auf Fig. 194) wieder zur Folge, dass die Empfindlichkeit von der Lage der Last Q auf der Brücke unabhängig

Fig. 188.



ist; ferner ist mit Rücksicht darauf, dass die Stangen BA_1, B_1B_2 und C_1D auf Zug in Anspruch genommen werden, das Gleichgewicht unabhängig von Untergewicht der Hebel stabil, wenn β und $\beta_1 = \gamma_1$ kleine positive Winkel sind. Nach einer im §. 169 gemachten allgemeinen Bemerkung sind indessen die Winkel β_1, γ_1 von untergeordnetem Einflusse auf diese Stabilität, so dass es genügt, nur den Winkel OBA_1 etwas stumpf zu machen, während B_1B_2 und C_1D für die mittlere Gleichgewichtslage rechtwinklig gegen O_1A_1 gerichtet werden.

Vollständig ergiebt sich im Falle $\beta_1 = \gamma_1$ der Einfluss von β und β_1 auf die Empfindlichkeit durch folgende Ueberlegung, wobei mit $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi_1$ die kleinen Winkel bezeichnet seien, um welche die Hebel OA und O_1A_1 durch das kleine Zulagegewicht ΔQ auf der Brücke gedreht werden. Wäre $\beta = \beta_1 = 0$, so wäre, abgesehen von Untergewicht der Hebel, das Gleichgewicht indifferent. Ist nur $\beta = 0$, so wird nur durch β_1 die Stabilität bedingt und verhält sich in Beziehung auf dieselbe Alles gerade so, als ob das Gegengewicht vertical aufwärts gerichtet in A_1 oder in einem auf der anderen Seite von O_1 liegenden Punkte des Hebels O_1B_1 vertical abwärts gerichtet angriffe, d. h. es verhält sich die Waage bezüglich der Stabilität wie eine abgeleitete Trapezwaage ohne Verjüngungshebel, so dass nach obiger Gleichung (9) mit $K = 0$, ferner mit dem unteren Vorzeichen (gleichen Richtungen der parallelen Trapezseiten O_1B_1 und O_2B_2 entsprechend) und bei Substitution von b_1 für b, b_2 für b_1, β_1 für β, $\Delta\varphi_1$ für $\Delta\varphi$:
$$\Delta Q = Q\beta_1 \frac{b_2 - b_1}{b_2} \Delta\varphi_1 = Q\beta_1 \frac{b_2 - b_1}{b_2} \frac{b}{a_1} \Delta\varphi \quad \ldots\ldots (13)$$

ist. Wäre dagegen nur $\beta_1 = 0$, so wäre die Stabilität nur von der Hebelcombination $AOBA_1O_1$ analog Fig. 191 abhängig, während $Q + \varDelta Q$ in C_1 (entsprechend dem Punkte B_1 in Fig. 191) angreifend zu denken wäre; nach §. 170, Gl. (3) wäre dann bei Substitution von $\frac{\varDelta Q}{Q}$ für $\frac{1}{\varepsilon}$ und von $\frac{1}{\beta}$ für $cotg\,\beta$:

$$\varDelta Q = Q\beta \frac{a_1 + b}{a_1} \varDelta\varphi \qquad (14).$$

Mit Rücksicht auf die kleinen Winkel β und β_1 zusammen ergiebt sich also durch Addition der Gleichungen (13) und (14):

$$\frac{\varDelta Q}{Q} = \frac{1}{\varepsilon} = \left(\beta \frac{a_1 + b}{a_1} + \beta_1 \frac{b_2 - b_1}{b_2} \frac{b}{a_1}\right) \varDelta\varphi \qquad (15),$$

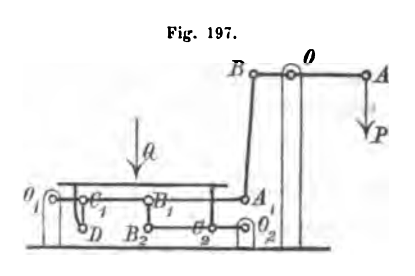
worin aber näherungsweise das Glied mit β_1 vernachlässigt werden kann, weil das Verhältniss seines Coefficienten zu demjenigen des Gliedes mit β

$$= \frac{b_2 - b_1}{b_2} \frac{b}{a_1 + b}$$

wesentlich < 1 ist.

Eine bessere Ausnutzung des Raumes, nämlich kleinere Horizontalausdehnung der Waage bei grösserer Länge der Brücke, als bei der Construction gemäss Fig. 188, kann dadurch erreicht werden, dass dem Hebel O_2B_2 die entgegengesetzte Lage gegeben wird, wie Fig. 197 zeigt. Diese Form der abgeleiteten Trapezwaage mit Verjüngungshebel ist besonders in Frankreich gebräuchlich, wobei auch oft die Koppel C_1D weggelassen, die Brücke also unmittelbar bei C_1 vom Hebel O_1B_1, bei C_2 vom Hebel O_2B_2 unterstützt wird, freilich nicht zum Vortheil der betreffenden Schneiden, die dann bei den Schwingungen der Waage auf den Pfannen etwas gleiten müssen. In obigen Gleichungen (13) und (15) ist für den Fall der Figur 197, indem jetzt die parallelen Seiten O_1B_1, O_2B_2 des zu Grunde liegenden Trapezes $O_1B_1B_2O_2$ entgegengesetzt gerichtet sind, $b_2 + b_1$ für $b_2 - b_1$ zu setzen. —

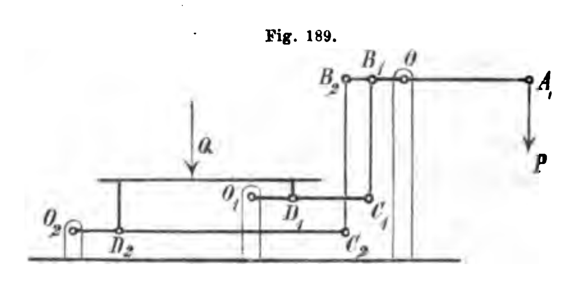
Fig. 197.



Für die Doppeltrapezwaage, dargestellt im §. 169 durch die schematische Figur 189, ergab sich daselbst, wenn

$$OA = a$$
$$OB_1 = b_1 \qquad O_1C_1 = c_1 \qquad O_1D_1 = d_1$$
$$OB_2 = b_2 \qquad O_2C_2 = c_2 \qquad O_2D_2 = d_2$$

Fig. 189.



gesetzt wird, als Bedingung dafür, dass die Punkte D_1 und D_2 gleiche Verticalbewegungen haben und dass somit das Verhältniss $Q:P$ von der Lage der Last auf der Brücke unabhängig ist:

$$\frac{c_1}{d_1} : \frac{c_2}{d_2} = b_1 : b_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

und zwar ist dann:

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b_1}\frac{c_1}{d_1} = \frac{a}{b_2}\frac{c_2}{d_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

Damit aber zur Verhinderung von Gleitungen der Schneiden auf den Pfannen bei D_1 und D_2 die Einschaltung einer Koppel an der einen oder anderen dieser Stellen entbehrlich sei, müssen nicht nur gleichzeitige Verticalbewegungen, sondern auch gleichzeitige Horizontalbewegungen der Punkte D_1 und D_2 in gleichem Sinne gleich gross, muss also:

$$d_1 = d_2 \text{ und somit } c_1 : c_2 = b_1 : b_2 \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

sein. Die Stabilität ohne Beihülfe von Untergewicht der Hebel erfordert etwas stumpfe Winkel:

$$OBC_1 = 90^0 + \beta_1 \quad \text{und} \quad OBC_2 = 90^0 + \beta_2.$$

Der durch ein Zulagegewicht $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ auf der Brücke bewirkte Neigungswinkel des Gegengewichtshebels AOB_1B_2 wäre dann nach §. 170, Gl. (3) mit Bezug auf Fig. 191 daselbst, jenachdem die ganze Last nur bei D_1 auf den Hebel O_1C_1 oder nur bei D_2 auf den Hebel O_2C_2 drückte,

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{\varepsilon\beta_1}\frac{c_1}{c_1 + b_1} \quad \text{oder} \quad \Delta\varphi_2 = \frac{1}{\varepsilon\beta_2}\frac{c_2}{c_2 + b_2},$$

wenn $cotg\,\beta_1 = \frac{1}{\beta_1}$ und $cotg\,\beta_2 = \frac{1}{\beta_2}$ gesetzt wird. In der That liegt der

durch $\varDelta Q$ bedingte Neigungswinkel $\varDelta\varphi$ des Gegengewichtshebels zwischen $\varDelta\varphi_1$ und $\varDelta\varphi_2$, der einen oder anderen Grenze näher kommend, je nach der Lage der Last auf der Brücke, so dass er von dieser unabhängig, wenn $\varDelta\varphi_1 = \varDelta\varphi_2$ ist. Das ist, wenn die Bedingung (18) erfüllt ist, der Fall für $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, und zwar ist dann der Empfindlichkeitswinkel:

$$\varDelta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{c_1}{c_1+b_1} = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{c_2}{c_2+b_2} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

für jede Belastungsweise der Brücke.

§. 173. Zusammengesetzte Hebelwaagen mit geschränkten Axen.

Bei allen in den vorhergehenden Paragraphen durch die Figuren 184—197 im Princip dargestellten Beispielen zusammengesetzter Hebelwaagen wurden die Axen (Schneiden) aller Hebel parallel angenommen, die kinematische Kette des Waagenmechanismus als ebene Drehkörperkette, wodurch die möglichst widerstandslose zwangläufige Beweglichkeit in der That bei einfachster Construction, mit möglichst wenig Axen und Gliedern erreicht werden kann. Die Rücksicht auf die Gedrungenheit der Anordnung, auf das Raumbedürfniss und auf zweckmässige Zugänglichkeit der Brücke lässt jedoch oft die Anwendung von Gliedern mit geschränkten, insbesondere mit rechtwinklig geschränkten Axen vorziehen, trotzdem dass dann die Verbindung zweier solcher in sich schneidenden Verticalebenen schwingenden Glieder G_1 und G_2 die Einfügung von Verbindungsgliedern oder wenigstens eines solchen Gliedes mit Axen erfordert, die theils mit den Axen von G_1, theils mit den Axen von G_2 parallel sind. Wenn z. B. die durch Fig. 197 im vorigen §. dargestellte abgeleitete Trapezwaage mit Verjüngungshebel so abgeändert wird, wie es einer Drehung von 90° des Theiles A_1BOAP der Figur um die durch den Mittelpunkt der Schneide A_1 gehende verticale Gerade entsprechen würde, so wären jetzt die Axen A, O, B gegen die übrigen rechtwinklig geschränkt und wäre jetzt der Hebel O_1A_1 mit der Zugstange BA_1 durch ein bei A_1 einzufügendes Glied zu verbinden, welches ausser der Axe A_1 noch eine mit B, O, A parallele Axe A' enthält. Eine kleine Verschiebung dieses Verbindungsgliedes A_1A' gegen die Zugstange BA' längs der Axe A' ist dadurch zwar nicht ausgeschlossen, aber sie ist bei sehr kleinem Drehungswinkel $\varDelta\varphi_1$ des Hebels O_1A_1 so klein

$$= a_1(1 - \cos\varDelta\varphi_1) = \frac{1}{2}a_1(\varDelta\varphi_1)^2,$$

dass sie durch eine kleine Biegung der Stange BA' ersetzt und verhindert werden kann, falls letztere nur genügend lang ist.

Um eine passende Stabilität und Empfindlichkeit zu erzielen, genügt es auch bei der hier besprochenen Modification, mit welcher die Brückenwaage Fig. 197 in der That gewöhnlich ausgeführt wird, nur den Winkel OBA_1 ($= OBA'$, sofern A_1 und A' sehr nahe beisammen liegen) für die mittlere Gleichgewichtslage etwas $> 90^0$, etwa $= 90^0 + \beta$ zu machen, während $B_1 B_2$ und $C_1 D$ rechtwinklig gegen $O_1 A_1$, somit vertical gerichtet werden. Der Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels, nämlich des durch ein Zulagegewicht $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon} Q$ auf der Brücke bewirkten Neigungswinkels $\Delta\varphi$ des Gegengewichtshebels AB, erfährt durch die veränderte Lage des letzteren eine gewisse Aenderung. Wären nämlich alle Axen parallel, so wäre nach Gl. (15) im vorigen §. mit $\beta_1 = 0$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta}\frac{a_1}{a_1 + b}$$

gemäss Gl. (3), §. 170. Aus der Ableitung dieser Gleichung im §. 170 ist aber ersichtlich, dass der Factor $\frac{a_1}{a_1 + b}$ nur davon herrührt, dass durch den dem Neigungswinkel $\Delta\varphi$ von OA entsprechenden Neigungswinkel $\Delta\varphi_1$ von $O_1 A_1$ zugleich auch das Moment der in der Stange BA_1 herrschenden Zugkraft Z für die Axe O_1 geändert wird, während hier bei rechtwinklig geschränkten Axen O und O_1 mit der auch dort zugelassenen Annäherung, mit welcher $\cos\Delta\varphi_1 = 1$ gesetzt werden kann, das fragliche Moment unverändert

$$= Z\cos\beta \,.\, a_1$$

unabhängig von $\Delta\varphi_1$ ist. Aus Gl. (3), §. 170, geht also der hier gültige Ausdruck des Empfindlichkeitswinkels $\Delta\varphi$ dadurch hervor, dass $\Delta\varphi_1 = \frac{b}{a_1}\Delta\varphi = 0$, d. h. $\frac{b}{a_1} = 0$ und somit gesetzt wird:

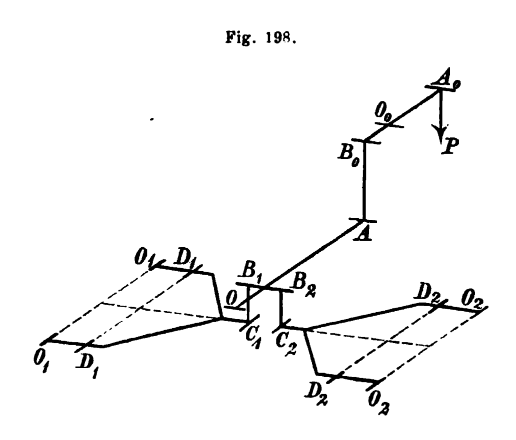
$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In der That ist die hier in Rede stehende rechtwinklige Richtung des Lasthebels gegen den Gegengewichtshebel AB gewissermassen das Mittel zwischen den entgegengesetzten Richtungen $A_1 O_1$ und $A_1 O'_1$ (Fig. 191) desselben, für welche der zu $\frac{1}{\varepsilon\beta}$ hinzutretende Factor im Ausdrucke von

$\Delta\varphi$ im einen Falle $=\frac{a_1}{a_1+b}$, im andern $=\frac{a_1}{a_1-b}$ ist, während er hier als Mittel $=1$ wird. —

Besonders gebräuchlich ist die Anordnung von Hebeln mit geschränkten Axen bei Centesimalwaagen; die durch Fig. 198 mit Weglassung der Brücke und der Stützen für die Schneiden O_0, O, $O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ schematisch und perspectivisch dargestellte Centesimalwaage von Rollé und Schwilgué diene als Beispiel. Die rechtwinklige Richtung des Zwischenhebels OA gegen die einander gleichen und entgegen gerichteten Dreieckshebel $O_1 O_1 C_1$ und $O_2 O_2 C_2$, welche bei $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ die Brücke tragen, kann hier u. A. dadurch motivirt sein, dass die Brücke von den schmaleren Seiten $O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ her (z. B. zum Auf- und Abfahren eines zu wiegenden Fuhrwerks) frei zugänglich sein soll. Die Waage ist als besonderer Fall einer Doppeltrapezwaage mit Verjüngungshebel zu betrachten; sie unterscheidet sich von der Doppeltrapezwaage, Fig. 189, dadurch, dass der Hebel OA, der dort zweiarmig, hier behufs seines Anschlusses an den Verjüngungs- bezw. Gegengewichtshebel $B_0 A_0$ durch die Zugstange AB_0 einarmig gemacht ist, ferner dadurch, dass mit Benutzung der Buchstabenbezeichnungen des vorigen Paragraph hier

Fig. 198.



$$b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2$$

gemacht, und dass die Hebel $O_1 C_1$ und $O_2 C_2$ hier nicht gleich, sondern entgegengesetzt gerichtet sind. Letzterer Umstand hat zur Folge, dass trotz der Gleichheit von d_1 und d_2 hier die Entfernung der Schneiden $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ bei den Schwingungen des Mechanismus etwas veränderlich ist und dass deshalb zur Verhinderung von Gleitungen dieser Schneiden längs ihren Pfannen entweder bei D_1, D_1 oder bei D_2, D_2 kurze Koppelstangen zwischen dem betreffenden Dreieckshebel und der Brücke eingeschaltet werden müssen. Die Einschaltung einfacher Verbindungsglieder $C_1 C'$ und $C_2 C''$, deren Axen C' und C'' den in gerader Linie liegenden Axen B_1 und B_2 parallel sind, an den Stellen C_1 und

C_2 genügt hier nicht, weil zur Verhinderung von Gleitungen längs den Axen C' und C'' die Stangen $B_1 C'$ und $B_2 C''$ hier zu kurz und somit zu wenig biegsam zu sein pflegen, indem sie unter der Brücke Platz finden müssen. Die fraglichen Verbindungsglieder müssen dazu selbst aus je zwei Gliedern $C_1 C_1'$ und $C_1' C'$ bezw. $C_2 C_2''$ und $C_2'' C''$ gebildet werden, welche durch die mit C_1 und C_2 parallelen Axen C_1' und C_2'' zusammenhängen, so dass letztere sich in verticalen Ebenen auf und nieder bewegen können.

Mit den Bezeichnungen:

$$b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c, \quad d_1 = d_2 = d,$$

ferner mit $$OA = a, \quad O_0 B_0 = b_0, \quad O_0 A_0 = a_0$$

sind gemäss der Forderung einer Centesimalwaage die Hebelverhältnisse so zu wählen, dass

$$\frac{Q}{P} = \frac{a_0}{b_0} \frac{a}{b} \frac{c}{d} = 100$$

ist. Behufs passender Stabilität und Empfindlichkeit ist für die mittlere Gleichgewichtslage der Winkel $O_0 B_0 A$ etwas $> 90^0$ zu machen, während die übrigen Zugstangen rechtwinklig gegen die betreffenden Hebel gerichtet werden mögen.

§. 174. Abstellvorrichtungen.

Vorrichtungen, welche dazu dienen, die Schneiden beim Nichtgebrauche einer Waage sowie bei ihrer Belastung oder Entlastung zu schonen, sind bei Brückenwaagen von besonderer Wichtigkeit und um so nöthiger, je grösser die zu wiegenden Lasten sind und je weniger auf die Vermeidung von Erschütterungen des Waagenmechanismus bei Belastung oder Entlastung der Brücke gerechnet werden kann.

Bei transportablen Decimalwaagen für Lasten von mässiger Schwere begnügt man sich meistens mit einer Arretirungsvorrichtung, wodurch ohne Entlastung der Schneiden nur die Beweglichkeit des Mechanismus zeitweilig aufgehoben wird. Durch einen Handhebel pflegt zu dem Ende der längere Arm des Gegengewichtshebels mit der daran hängenden Gegengewichtsschale in seine höchste Lage gehoben zu werden, wodurch die Brücke in ihre tiefste Lage gesenkt, nämlich mit den diese Lage bestimmenden Anschlägen zur Berührung gebracht wird. Eine in Betracht kommende Arbeit ist zu dieser Operation ebenso wenig wie zur

Wiederherstellung des freien Spiels der Waage aufzuwenden, sofern in beiden Fällen Gleichgewicht der Kräfte an ihr stattfindet.

Bei den gewöhnlich fest fundamentirten Centesimalwaagen zur Wägung sehr schwerer Lasten genügt eine solche Arretirung nicht, ist vielmehr ausserdem Entlastung der Schneiden durch anderweitige Unterstützung der Brücke erforderlich, auch durch die Aichordnung vorgeschrieben, um den Waagenmechanismus mit seinen Schneiden vor dem schädlichen Einflusse von Erschütterungen zu bewahren, die besonders beim Aufbringen der Last auf die Brücke, sowie auch bei ihrer Entfernung von derselben ohne solche Maassregel kaum vermeidlich sein würden. Die Operation der Abstellung einer solchen Centesimalwaage umfasst drei aufeinander folgende einzelne Vorgänge, welche mit Brauer* als Stützung, Entlastung und Entfernung bezeichnet seien. Zuerst ist durch die Stützung die Brücke mit gewissen Stützen, den sogenannten Stützkegeln mit Rücksicht auf ihre übliche Form, in Berührung zu bringen, ohne dass damit schon ein erheblicher Druck auf letztere durch entsprechende Verminderung des Druckes zwischen den Schneiden und Pfannen verbunden wäre; die darauf folgende Entlastung besteht aber in der Uebertragung des Druckes von den Schneiden auf die Stützkegel, womit zwar keine relative Bewegung der letzteren gegen die Brücke, jedoch insofern auch eine Bewegung verbunden ist, als die Deformationen der Glieder des Waagenmechanismus rückgängig zu machen sind, welche durch ihre Belastung vorher bedingt waren; zu grösserer Sicherheit sind endlich noch die Pfannen der Brücke von den entlasteten Schneiden der Lasthebel etwas zu entfernen. Mit Rücksicht auf die zu diesen Zwecken nöthigen relativen Bewegungen können drei Fälle unterschieden werden:

1) Die Abstellung erfolgt durch Senkung der Lasthebel, während die Stützen unbeweglich sind; das Befahren (Auf- oder Abbringen der Last) erfolgt bei tiefster Lage der Brücke.
2) Die Abstellung erfolgt durch Hebung der Stützen, so dass die Befahrung der Brücke in einer höheren, als der Mittellage stattfindet.
3) Die Abstellung wird durch Hebung der Stützen und darauf folgende Senkung der Lasthebel bewirkt, so dass die Brücke in ihrer mittleren oder Wägestellung befahren wird; die Hebung der Stützen bewirkt hierbei die Stützung, die Senkung der Hebel die Entfernung, während die Entlastung, d. i. die Uebertragung

* „Die Construction der Waage“, S. 99.



des Drucks von den Schneiden auf die Stützen theils schon durch die erste, theils erst durch die zweite Operation bewirkt werden kann.

Die Zweckmässigkeit der betreffenden Einrichtungen ist in allen Fällen mit Rücksicht auf möglichste Einfachheit der Construction und möglichste Kleinheit des zur Herstellung und Aufhebung der Abstellung erforderlichen Arbeitsaufwandes zu beurtheilen.

Die Abstellung durch Senkung der Hebel wird häufig so ausgeführt, dass die Zugstange (AB_0, Fig. 198), welche den Zwischenhebel mit dem Gegengewichtshebel verbindet, an passender Stelle unterbrochen und daselbst ein Windewerk eingeschaltet ist, wodurch, während der Gegengewichtshebel in seiner höchsten Lage, also bei tiefster Lage der Brücke arretirt ist, die fragliche Zugstange verlängert oder verkürzt werden kann, jenachdem es sich darum handelt, die Abstellung zu bewirken oder wieder aufzuheben. Es kann z. B. der untere Theil jener Stange oben in eine Zahnstange auslaufen, während der obere Theil vermittels eines Bügels ein Gehäuse trägt, in welches die Zahnstange von unten her eintritt, um durch ein im Gehäuse gelagertes Zahnrädergetriebe mit Kurbel nach Auslösung einer Sperrung abwärts oder aufwärts bewegt zu werden, jenachdem die Stange verlängert oder verkürzt werden soll. Diese Einrichtung ist zwar einfach, jedoch insofern mangelhaft, als zur Uebertragung des Drucks von den Stützen auf die Lasthebelschneiden durch Verkürzung von AB_0 eine erhebliche Deformationsarbeit aufzuwenden ist, welche bei der umgekehrten Druckübertragung von den Hebeln auf die Stützen durch Verlängerung von AB_0 nicht nur verloren geht, sondern sogar durch hemmende Kraft an der Kurbel mit Anstrengung vernichtet werden muss, um eine zu schnelle stossweise Aenderung des Drucks an der einen und anderen Stelle zu vermeiden. Besser in dieser Hinsicht sind solche Einrichtungen, wie sie u. A. von Gebr. Hopp, sowie von Bockhacker und Dinse in Berlin getroffen wurden, bei welchen der Zwischenhebel AO, Fig. 198, mit seiner Drehungsaxe O nicht fest, sondern auf einem besonderen Abstellhebel H gelagert ist, der ein Gegengewicht an einer solchen Stelle trägt, dass dasselbe sich aufwärts oder abwärts bewegt, jenachdem durch eine kleine Drehung von H die Axe O gesenkt oder gehoben und damit Deformationsarbeit gewonnen oder verbraucht wird, um die Abstellung herbeizuführen bezw. wieder rückgängig zu machen. Bei passender Schwere des Gegengewichtes kann so ein wesentlicher Theil jener im einen Falle frei werdenden Arbeit aufgespeichert werden, um später zur Deckung des Arbeitsbedarfes nütz-



liche Verwendung zu finden. Die Entfernung der entlasteten Lasthebelschneiden von den betreffenden Pfannen an der Brücke oder ihre Wiederannäherung an dieselben ist hier mit einer nur kleinen positiven bezw. negativen Schwerearbeit lediglich der Glieder des Waagenmechanimus (ohne den festgestellten Gegengewichtshebel und die Zugstange $B_0 A$) verbunden, die aber für die Bemessung des vorgenannten Gegengewichtes am Hebel H mit zu berücksichtigen ist.

Bei der Abstellung durch Hebung der Stützen sind, nachdem der Gegengewichtshebel in mittlerer Lage festgestellt ist, die Stützkegel bis zur Berührung mit der Brücke zu heben, dann sammt der von ihnen gestützten belasteten Brücke weiter bis zur Entlastung der Lasthebelschneiden und endlich noch etwas weiter bis zu kleiner Entfernung der betreffenden Pfannen von diesen Schneiden empor zu heben. Die Entlastung erfordert hierbei wegen des Gewinns von Deformationsarbeit einen dieselbe nur wenig übertreffenden Arbeitsaufwand, um so mehr aber die weitere Hebung der jetzt vollständig von den Stützkegeln getragenen Brücke, weshalb hier solche Einrichtungen von erhöhter Wichtigkeit wären, bei welchen jene aufzuwendenden Arbeiten durch ein niedersinkendes Gegengewicht geleistet werden, dessen Wiedererhebung später durch die Senkung der aufs Neue belasteten Brücke bewirkt wird.* Indessen sind die meisten der bisher üblichen, hierher gehörigen Abstellvorrichtungen mit so erheblicher Reibung verbunden, dass durch diese die Schwerkraftarbeit der niedergehenden Brücke grossentheils verbraucht und, indem auch die Aufspeicherung des etwaigen Ueberschusses durch Hebung eines Gegengewichtes versäumt, die zur Hebung der Brücke erforderliche Arbeit noch wesentlich vergrössert wird.

Die Abstellung durch Heben der Stützen und nachfolgendes Senken der Lasthebel kann folgendermaassen ausgeführt werden. Zu Ende einer Wägung wird der Gegengewichtshebel in seiner mittleren Lage (durch einen Vorsteckbolzen) festgestellt und werden darauf die Stützkegel bis zur Berührung mit der Brücke gehoben, z. B. nach einer Construction von Pellenz u. Comp. durch Keile, die vermittels eines unter der Brücke liegenden Kniehebelsystems auswärts verschoben werden. Entsprechend der hierbei ausgeübten Kraft wird dadurch nicht nur Arretirung, sondern auch schon theilweise Entlastung erreicht. Die vollständige Entlastung kann dann ebenso wie bei der ersten Gruppe von Abstellvorrichtungen erzielt werden: durch Verlängerung der Zugstange

* Siehe Brauer: „Die Construction der Waage“, Fig. 118, Tafel V.



AB_0, Fig. 198, vermittels eines eingeschalteten Windewerks oder besser durch Senkung der Drehaxe O, mit welcher zu diesem Zwecke der Zwischenhebel AO von einem besonderen Entlastungshebel H getragen wird, so dass dann die Deformationsarbeit der elastischen Glieder des Waagenmechanismus durch Vermittelung des bei O auf den Hebel H ausgeübten Druckes als Hebungsarbeit eines auf H sitzenden Gegengewichtes zu späterer Benutzung aufgespeichert werden kann. Bei der zum Verwiegen von Eisenbahnwagen dienenden Waage von Pellenz u. Comp. begnügt man sich in der Regel mit der Arretirung und theilweisen Entlastung, welche durch das Vorschieben der Keile unter die Stützkegel bewirkt wird, indem eine vollständige Entlastung nur zum Schutze der ausser Gebrauch gesetzten Waage beim Passiren von Locomotiven und ganzen Wagenzügen über die Brücke für nöthig gehalten wird.*

Von den besprochenen drei Gruppen von Abstellvorrichtungen sind die der ersten und dritten Gruppe insofern vorzuziehen, als dabei eine Hebung oder Senkung der belasteten Brücke theils gar nicht, theils nur dann erforderlich ist, wenn die Last auf derselben mit dem Gegengewichte im Gleichgewicht und somit die resultirende Arbeit ihrer Schwerkräfte = Null ist. Es ist dann nur mit Reibungsarbeit, ferner mit der Schwerearbeit des Mechanismus an und für sich (ohne Belastung) und mit der Deformationsarbeit desselben zu rechnen, welche bei seiner Belastung aufzuwenden ist und bei seiner Entlastung frei wird. —

Schliesslich mag noch eine sehr bemerkenswerthe Abstellvorrichtung etwas näher besprochen werden, welche in neuester Zeit von H. Bockhacker, Maschinenfabrikant in Berlin, ausgeführt und ihrer allgemeinen Anwendbarkeit wegen als Universalentlastung bezeichnet worden ist.** Sie gehört zur dritten der obigen drei Gruppen von Abstellvorrichtungen, zeichnet sich aber durch äusserste Reduction der Reibungswiderstände und dadurch aus, dass die entgegengesetzten Bewegungen der Stützkegel und der Lasthebel durch dieselbe Manipulation (durch Umlegen eines Handhebels) bewirkt werden. Es befindet sich an jedem Ende der Brücke unterhalb derselben und querliegend gegen ihre Längsaxe (in kleinen Entfernungen parallel O_1O_1 und O_2O_2, Fig. 198) eine Welle W mit kreisförmigem Querschnitte $q t s' q'$, Fig. 199, deren Radius $cq = cq' = r$ sei. Sie hat an den Enden (bei O_1 und O_1 bezw. bei O_2 und O_2,

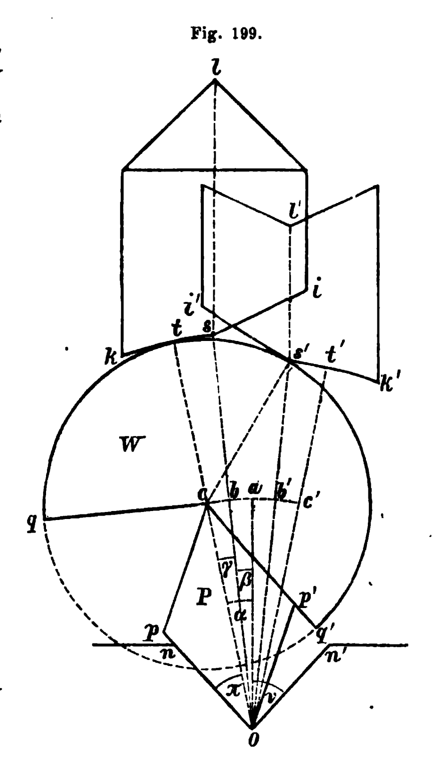
* Abbildungen der hier nur ihrem Wesen nach besprochenen Abstellvorrichtungen enthält der Atlas des wiederholt citirten Werkes von Brauer.

** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1882, S. 330 und Tafel XXII.



Fig. 198) segmentförmige Ausschnitte, mit welchen sie auf gehärteten Stahlprismen P von rautenförmigem Querschnitte $cpop'$, Fig. 199, dessen Diagonale $co = p$ sei, aufliegt, die ihrerseits in Pfannen non' gelagert sind. Auf den Enden der Wellen W über den Prismen P sind nahe neben einander vertical verschiebbar je einer der 4 Stützkegel $iskl$ aufgestützt und je eines der 4 Lasthebellager $i's'k'l'$, d. h. der Pfannen, welche die als Drehaxen O_1O_1 und O_2O_2 der Lasthebel dienenden Keilschneiden zu tragen haben. Die Stützkegel und die Hebellager sind unten theils durch Cylinderflächen sk und $s'k'$ zum Halbmesser $p + r$, theils durch ebene Flächen si und $s'i'$ von gleicher Neigung gegen die Verticale begrenzt. Alle Angriffsflächen sind verstählt und gehärtet, die Keilkanten bei o und c nach einem sehr kleinen Radius abgerundet. Durch einen Hebelmechanismus können die zwei Wellen W gleichzeitig in entgegengesetztem Sinne gedreht werden, bis sich entweder das eine Paar gegenüberliegender Flächen von P gegen die Begrenzungsflächen on der Prismenpfanne und cq' des Ausschnittes von W oder das andere Paar gegen on' und cq anlegt.

Fig. 199.



Die Figur 199 entspricht der ersteren dieser Grenzlagen, wobei sich die Stützkegel in höchster, die Hebellager in tiefster Lage befinden; auf ersteren ruht die belastete Brücke mit ihrem ganzen Gewichte Q, während die Hebelschneiden D_1D_1 und D_2D_2 (Fig. 198) in einer kleinen Tiefe y unter den betreffenden Pfannen an der Brücke sich befinden. In der Figur sind a und b die Punkte, in welchen der aus dem Mittelpunkte o mit dem Radius $oc = p$ beschriebene Kreisbogen von der Verticalen durch o und von der Geraden os geschnitten wird; ferner ist $ab' = ab$, $b'c' = bc$ und gehen ob', oc' sehr nahe durch die Punkte s' und t', streng genommen dann, wenn sich das Hebellager anstatt des Stützkegels in höchster Lage befindet. Der Querschnittskreis von W be-

rührt den Kreisbogen ks in t, indem die betreffenden Mittelpunkte c und o mit t in gerader Linie liegen. Die gleichen Neigungen der ebenen Angriffsflächen si und $s'i'$ sind so angenommen, dass $s'i'$ in der Lage von Fig. 199 normal zu cs' ist. Der Winkel $aoc = aoc' = \alpha$ ist sehr klein. Die beiden Theile aob und boc dieses Winkels seien bezw. mit β und γ bezeichnet, ferner die kleinen Strecken $ab = ab'$ mit b, $bc = b'c'$ mit c. Sind dann die Strecken

$$st = s't' = t \text{ und } ss' = 2s,$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} s &= (p+r)\beta = \frac{p+r}{p} b \\ t &= (p+r)\gamma = \frac{p+r}{p} c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wird nun aus der in Fig. 199 dargestellten Lage heraus der Welle W eine Linksdrehung um einen solchen Winkel ertheilt, dass sich der Querschnittskreis von W auf dem Bogen $ts = t$ des Kreisbogens ks zum Mittelpunkte o abwickelt, wozu ein Drehungswinkel

$$\psi = t\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p+r}\right) = (p+r)\gamma \frac{p}{r(p+r)} = \frac{p}{r}\gamma \quad \ldots\ldots (2)$$

erforderlich ist, so kommt gleichzeitig c nach b, indem das Prisma P eine Rechtsdrehung um den Winkel γ ausführt. Der Stützkegel ändert dabei seine Lage nicht, wogegen das Hebellager vermittels seiner Kante s' um eine kleine Strecke y' gehoben wird. Letztere setzt sich aus zwei Theilen zusammen, welche bezw. einer Hebung des Querschnittskreises von W bis zu seinem Durchgange durch den Punkt s und der Linksdrehung $= \psi$ desselben um diesen Punkt s entsprechen. Somit ist

$$y' = (p+r)(1 - \cos\gamma) + 2s\psi$$

oder nach (1) und (2) und weil γ ein sehr kleiner Winkel ist:

$$\begin{aligned} y' &= (p+r)\frac{\gamma^2}{2} + 2(p+r)\beta\frac{p}{r}\gamma \\ &= (p+r)\gamma\left(\frac{\gamma}{2} + 2\frac{p}{r}\beta\right) \\ &= \frac{p+r}{p} c\left(2\frac{b}{r} + \frac{1}{2}\frac{c}{p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (y'). \end{aligned}$$

Durch diese Hebung $= y'$ der Hebellager sollen die zum Tragen der Brücke bestimmten Keilschneiden der Lasthebel um y gehoben wor-

den sein, so dass sie mit den betreffenden Pfannen der Brücke gerade zur Berührung gelangt sind, ohne schon einen Druck auf dieselben auszuüben. Setzt man also y' in dem betreffenden Verhältnisse (dem Verhältnisse der Perpendikel von C_1 auf $O_1 O_1$ und $D_1 D_1$ in Fig. 198) grösser, als y, so ist die mit (y') bezeichnete Gleichung eine erste Bedingungsgleichung für die Wahl der Dimensionen p, r, b, c.

Wird jetzt der Welle W eine weitere Linksdrehung ertheilt, entsprechend der Rechtsdrehung β von P, also dem Wege ba des Mittelpunktes des Querschnittskreises von W, so ist der Betrag jener Linksdrehung von W analog Gl. (2):

$$\varphi = \frac{p}{r}\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Dabei hat sich W um die stumpfe Kante s des immer noch in Ruhe bleibenden Stützkegels gedreht und ist (immer mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung) das Hebellager mittels seiner Angriffskante s' weiter gehoben worden um:

$$x = 2s\varphi = 2\frac{p+r}{p}b \cdot \frac{p}{r}\beta = 2\frac{p+r}{pr}b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x).$$

Indem die Brücke, noch immer auf den unverrückten Stützkegeln ruhend, sich nicht mitbewegt hat, ist x eine relative Verticalbewegung der Auflagerschneiden $O_1 O_1$ und $O_2 O_2$ (Fig. 198) der Lasthebel gegen ihre Tragschneiden $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$; indem aber jetzt die Angriffskanten s und s' in gleicher Höhe liegen, soll das Gewicht Q der belasteten Brücke für diese mittlere Lage von W und P zur Hälfte von den Stützkegeln, zur Hälfte von den Lasthebeln getragen werden, somit x der Hälfte derjenigen relativen Verticalbewegung der Auflager- und Tragschneiden der Lasthebel gleich sein, welche dem Uebergange vom Zustande der Nichtbelastung des Waagenmechanismus zu demjenigen seiner vollen Belastung Q entspricht unter Aufwendung einer in ihm aufgespeicherten Deformationsarbeit $= Qx$. Wird also x in diesem Sinne verstanden, so ist die Gleichung (x) eine zweite Bedingungsgleichung für die darin vorkommenden Buchstabengrössen. Zur Deformation des Waagenmechanismus ist jetzt einstweilen erst die Arbeit

$$\frac{Q}{2}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\,Qx$$

aufgewendet worden, welche durch den Druck am betreffenden Handhebel geleistet werden musste.

Bei weiterer Drehung von W linksläufig um den Winkel φ, also von P rechtsläufig um den Winkel β, wobei der Mittelpunkt des Querschnittskreises von W nach b' gelangt, bleibt das Hebellager mit seiner Kante s' in Ruhe, indem sich W um diese Kante dreht. Die Stützkegel gehen mit der Brücke, indem sie sich stetig von $\frac{Q}{2}$ bis Null entlasten, um die Strecke x herunter, entsprechend einer weiteren relativen Verticalbewegung der zweierlei Keilschneiden der Lasthebel um den Betrag x, also der Deformationsarbeit des Waagenmechanismus

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{2}+Q\right)x=\frac{3}{4}\,Qx.$$

Diese Arbeit wird jetzt aber nicht nur durch die Arbeit $=Qx$ der niedergehenden Brücke geleistet, sondern es bleibt auch von letzterer noch ein Betrag $=\frac{1}{4}\,Qx$ übrig, der voraussichtlich zur Bewältigung der betreffenden Reibungswiderstände mehr als ausreichend ist.

Die cylindrische Angriffsfläche $s'k'$ des Hebellagers wird jetzt von der Welle W in s' berührt, so dass die weitere Linksdrehung von W um den Winkel ψ mit entsprechender Rechtsdrehung von P um den Winkel γ eine relative Abwälzung von W auf jener cylindrischen Angriffsfläche längs $s't'$ bedingt und einen weiteren Niedergang der Stützkegel um y', so dass sie sich um diesen Betrag von der in Ruhe bleibenden Brücke entfernen.

Abgesehen von Reibungswiderständen, die aber hier sehr gering sind, entsprechend den theils wälzenden Relativbewegungen, theils Drehungen um harte Keilschneiden, hat sich somit ergeben, dass die Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um die mit belasteter Brücke abgestellte Waage wieder zur Wägung frei zu machen, nur $=\frac{1}{4}\,Qx=\frac{1}{4}$ der Deformationsarbeit des voll belasteten Waagenmechanismus ist, und ähnlich verhält es sich bei der umgekehrten Manipulation der Abstellung nach stattgefundener Wägung. In der That ist dann bei der zweiten der unterschiedenen 4 Theilbewegungen die Arbeit Qx zur Hebung der Brücke um den Betrag x aufzuwenden, von welcher Arbeit indessen der Bestandtheil $\frac{3}{4}\,Qx$ durch frei werdende Deformationsarbeit geliefert wird, während sonst nur Reibungsarbeiten zu leisten sind, welchen ausserdem noch die bei der dritten Theilbewegung frei werdende Deformationsarbeit

$\frac{1}{4} Qx$ zugut kommt. Durch thunlichste Vergrösserung der Querschnitts- und Verkleinerung der Längendimensionen der beweglichen Glieder des Waagenmechanismus lässt sich x und somit die aufzuwendende Arbeit vermindern.

Die Gleichungen (y') und (x) können endlich noch durch weitere Constructionsbedingungen bezüglich der Winkel

$$pcp' = pop' = 2\pi, \quad non' = 2\nu, \quad qcq' = 2\varkappa$$

ergänzt werden. Mit

$$\alpha = \beta + \gamma = \frac{b+c}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

ergiebt sich unmittelbar aus der Figur:

$$\nu = \pi + \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\nu).$$

Indem ferner der Winkel $pcq = 2\varkappa - 2\pi$ = dem ganzen relativen Drehungswinkel von W gegen P, also = der Summe des Rechtsdrehungswinkels von P und des Linksdrehungswinkels von W sein muss, folgt:

$$2\varkappa - 2\pi = 2(\beta + \gamma) + 2(\varphi + \psi)$$

oder mit Rücksicht auf (2), (3), (4):

$$\varkappa - \pi = \alpha\left(1 + \frac{p}{r}\right)$$

oder endlich mit Rücksicht auf Gl. (ν):

$$\varkappa = \nu + \frac{p}{r}\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\varkappa).$$

Der von Herrn Bockhacker am oben angeführten Orte mitgetheilten Zeichnung einer ausgeführten solchen Abstellvorrichtung für eine Centesimalwaage von 25000 Kgr. Tragfähigkeit ist näherungsweise zu entnehmen:

$$r = 43^{mm}, \quad p = 61^{mm}, \quad b = c = 5{,}5^{mm}, \quad \text{also } \alpha = 10{,}5^0,$$

ferner $\pi = 30^0, \quad \nu = 40{,}5^0, \quad \varkappa = 55{,}5^0$

in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (ν) und ($\varkappa$), während damit aus den Gleichungen (y') und (x) folgt:

$$y' = 2{,}8^{mm} \quad \text{und} \quad x = 2{,}4^{mm}.$$

Die Grösse x wird durch passende Wahl der Dimensionen selbst bei den grössten Waagen auf etwa 2^{mm} zu reduciren sein, und wäre dann für eine Waage von $Q = 50000$ Kgr. Tragfähigkeit, wie sie in der Praxis selten überschritten wird, die jeweils aufzuwendende Arbeit:

$$\frac{1}{4} Qx = \frac{1}{4} \cdot 50000 \cdot 0{,}002 = 25^{mk}$$

ohne die Reibungsarbeit. Letztere schätzt Herr Bockhacker hier zu nahe 18 mk; indem aber ein Theil derselben nach Obigem durch disponible Arbeit geleistet wird, mögen nur 15 mk gerechnet, und mag somit die ganze Arbeit, welche zur Abstellung oder zur Rückgängigmachung derselben aufzuwenden ist, für dergleichen ungünstigste Verhältnisse auf 40 mk veranschlagt werden.

b. Laufgewichtswaagen.

§. 175. Theorie einfacher Laufgewichtswaagen.

Die einfache Laufgewichtswaage besteht aus einem Hebel (Waagebalken), der um eine horizontale Aufhängungsaxe (Mittelschneide) O drehbar ist und an welchem das Gegengewicht P und die Last Q in solchen Punkten bezw. mit O parallelen Schneiden A, B angreifen, dass deren horizontal gemessene Entfernungen von O, also die betreffenden Hebelarme $OA = x$ von P, sowie $OB = y$ von Q in der zur Wägung herbeizuführenden (durch das Einspielen einer Zunge zu markirenden) mittleren Gleichgewichtslage des Hebels nicht beide constant sind, um so diese Gleichgewichtslage bei veränderlicher Last Q mit einem unveränderlichen Gegengewichte P herbeiführen zu können. Die Bestimmung von Q geschieht dann durch Ablesung der Länge x oder y auf einer am Waagebalken angebrachten Theilung. Dabei können 3 Fälle stattfinden, jenachdem

1) nur x variabel, dagegen y constant $= b$, oder
2) nur y variabel, dagegen x constant $= a$ ist, oder
3) x und y beide so veränderlich sind, dass $x + y$ constant $= c$ ist.

In allen Fällen ist es ebenso wie bei der einfachen Hebelwaage im engeren Sinne erforderlich, dass der Mittelpunkt aller an der Waage angreifenden Schwerkräfte bei mittlerer Gleichgewichtslage und jeder Belastung mit Rücksicht auf die Stabilität unter O, aber mit Rücksicht auf genügende Empfindlichkeit nur sehr wenig unter O liege. Auch hier wird diesen Erfordernissen am einfachsten dadurch entsprochen, dass A, B und O in eine (bei mittlerer Gleichgewichtslage horizontale) Ebene gelegt werden, während der Schwerpunkt S des Waagebalkens, dessen Gewicht $= W$ sei, in einer kleinen Entfernung $= e$ unterhalb dieser Ebene sich befindet. Ist s der Horizontalabstand des Punktes S von der Aufhängungsaxe O, positiv oder negativ verstanden, jenachdem dieser

Punkt auf der Seite von A oder auf der Seite von B liegt, so ist die Gleichgewichtsbedingung bei mittlerer Gleichgewichtslage:

$$Px + Ws = Qy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und bei dem durch einen kleinen Zuwachs ΔQ der Last bewirkten kleinen Ausschlagwinkel $\Delta\varphi$:

$$Px + W(s + e\,\Delta\varphi) = (Q + \Delta Q)\,y$$

mit der Annäherung, mit welcher $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, $\cos\Delta\varphi = 1$ gesetzt werden kann. Aus beiden Gleichungen folgt mit $\Delta Q = \frac{1}{\varepsilon}\,Q$:

$$We\,\Delta\varphi = \Delta Q\,.\,y;\quad \Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{Qy}{We} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Biegung des Waagebalkens hat zwar zur Folge, dass mit wachsender Belastung sich die Ebene AB etwas von der Mittelschneide O entfernt und dass auch e mit Q etwas zunimmt, doch kann davon hier mit Rücksicht auf die geringere von solchen Waagen zu verlangende Genauigkeit abgesehen werden.

1) Von den oben erwähnten drei Arten einfacher Laufgewichtswaagen ist diejenige mit constanter Länge $y = b$ des Lastarmes, die sogenannte römische Waage, die gebräuchlichste. Das Gegengewicht P ist Laufgewicht und pflegt längs dem eingetheilten Waagebalken verschieblich zu sein vermittels einer Hülse, die an gegenüber liegenden Stellen zwei in gerader Linie liegende horizontale Schneiden trägt, an denen ein Gewicht hängt; P ist dann = der Summe aus diesem angehängten und dem Eigengewicht der Hülse, und wenn deren Doppelschneide so angeordnet ist, dass sie durch ihren Schwerpunkt geht, ist sie zugleich die Angriffslinie A des Gegengewichtes P, welche mit der Aufhängungsschneide O und der Angriffslinie B von Q in einer Ebene liegen soll.

Die Bedingung (1) für das Einspielen der Waage geht mit $y = b$ über in:

$$Px + Ws = Qb.$$

Darin sind nur Q und x veränderlich, so dass der Aenderung von Q um eine Gewichtseinheit die Aenderung

$$\Delta x = \frac{b}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Längeneinheiten von x entspricht. Die Theilung des Waagebalkens ist also gleichförmig; sie kann empirisch erhalten werden, indem man die Stellen markirt, wo zum Einspielen der Waage die Angriffslinie A des Laufgewichtes P sich für $Q = m$ und für $Q = (m + n)$ Gewichtseinheiten

befinden muss, dann den Abstand beider Marken in n gleiche Theile theilt, die auch über die Grenzmarken hinaus aufzutragen sind. Das Gewicht des Aufhängungsmittels (Schale, Haken etc.) der Last Q ist hier in W einbegriffen.

Der Empfindlichkeitswinkel ist nach Gl. (2):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Qb}{We} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4);$$

er wächst proportional Q, abgesehen von der bei diesem Ausdrucke vernachlässigten Biegung des Waagebalkens.

2) Im Falle constanter Länge $x = a$ des Gegengewichtsarmes verhält sich die Last Q als Laufgewicht. Nach Gl. (1) ist:

$$Qy = Pa + Ws = Const. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

somit nach (2) der Empfindlichkeitswinkel unabhängig von Q. Die Theilung würde ungleichförmig, wenn sie nach Gewichtseinheiten abgestuft werden sollte. Indessen giebt es auch Fälle, in welchen durch die Wägung ermittelt werden soll, wie viel mal $= n$ mal das Gewicht des zu wägenden Körpers in der Gewichtseinheit enthalten ist, z. B. das Gewicht eines Garnsträhns, in welchem Falle n die sogenannte Nummer des Garnes ist. Mit $Q = \frac{1}{n}$ ergiebt sich dann:

$$y = n(Pa + Ws) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6),$$

entsprechend einer gleichförmigen Theilung, nämlich $\Delta y = Pa + Ws$ $=$ einer Constanten für $\Delta n = 1$.

Hierbei ist freilich zu bemerken, dass das Gewicht des Aufhängungsmittels der Last Q, welches im vorigen Falle im Gewichte W des Waagebalkens einbegriffen werden konnte, hier der veränderlichen Lage gegen O wegen sammt dem Gewichte des betreffenden Verschiebungsmittels (Hülse) in Q einbegriffen ist. Für die Herstellung und Benutzung der Waage zur Ermittelung der in Gewichtseinheiten ausgedrückten Last würde dieser Umstand nicht störend sein, indem nur stets derselbe Abzug Q' von Q zu machen wäre, um die gesuchte Netto-Last zu erhalten. Sollte dagegen die Waage als Garnwaage oder zu ähnlichen Zwecken, nämlich zur Bestimmung von n im Ausdrucke $Q = \frac{1}{n}$ benutzt werden, so müsste Q das Gewicht der Netto-Last, nämlich ohne Aufhängungs- und Verschiebungsmittel sein. Das liesse sich zwar dadurch erzielen, dass auf dem Gegengewichtsarme des Waagebalkens ein Gewicht $= Q'$ verschiebbar angebracht und dessen Schwerpunkt immer im Abstande y von O erhalten wird, unter Ein-

rechnung des Gewichtes $2Q'$ in W; doch würde dadurch die Handhabung der Waage behufs einer Wägung wesentlich erschwert, und ist es überhaupt begreiflich, dass die in Rede stehende Art von Laufgewichtswaagen mit unveränderlicher Länge des Gegengewichtsarmes zu bemerkenswerther Verwendung bisher nicht gekommen ist.

3) Dem Falle, dass die Summe der Längen des Last- und Gegengewichtsarmes constant ist, entspricht die dänische oder schwedische Schnellwaage, bestehend aus einem Waagebalken, der in einer um die Aufhängungsaxe O drehbaren Hülse, deren Schwerpunkt in O liegt, verschieblich ist, während die Angriffslinien A und B von P und Q feste Lagen an ihm haben. Indem sowohl A, wie auch der Schwerpunkt S des Waagebalkens unveränderliche Entfernungen von B haben, kann mit $x+y=c$ und $s+y=d$ die Gleichgewichtsbedingung (1) auf die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} Qy &= P(c-y) + W(d-y) \\ &= Pc + Wd - (P+W)y = P'(c'-y) \quad \ldots\ldots (7). \end{aligned}$$

Dabei ist das Gewicht der Lastschale bezw. des Lasthakens in W eingerechnet, und kann $P'=P+W$ durch anderweitige Wägung, c' durch Messung von y beim Einspielen der Waage mit bekannter Belastung Q gefunden werden, wonach die Theilung des Waagebalkens gemäss Gl. (7) durch Rechnung oder durch Construction sich ergiebt. Der Empfindlichkeitswinkel ist nach (2) und (7):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{P'}{We}\left(c' - \frac{P'c'}{P'+Q}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{P'c'}{We}\,\frac{Q}{P'+Q} \quad \ldots\ldots (8),$$

um so grösser, je grösser Q, jedoch in geringerem Maasse wachsend, als Q.

§. 176. Ausführungsformen der Laufgewichtswaage.

Von den im vorigen §. besprochenen drei Arten von Laufgewichtswaagen ist, wie schon dort bemerkt wurde, als einfache Laufgewichtswaage weitaus am gebräuchlichsten die römische Waage mit constanter Länge des Lastarmes und verschieblichem Gegengewichte längs dem für gleiche Lastdifferenzen gleichförmig einzutheilenden Waagebalken; für zusammengesetzte Laufgewichtswaagen eignet sich dieses System ausschliesslich, insbesondere um bei Brückenwaagen die Last auf der Brücke durch Ablesung mit Hülfe einer Theilung am Gegengewichtshebel zu ermitteln, nachdem längs demselben ein unveränderliches Gegengewicht

bis zum Einspielen der Waage verschoben wurde. Im einen wie im anderen Falle kann dieses Laufgewicht, anstatt an der Doppelschneide einer verschieblichen Hülse zu hängen, auch fest mit letzterer verbunden oder überhaupt als starrer Körper mit dem betreffenden Waagebalken prismatisch gepaart sein; nur ist dann durch seine Gestalt dafür zu sorgen, dass sein Schwerpunkt sich möglichst genau in der durch die Aufhängungsschneide O und die Lastschneide B gehenden Ebene senkrecht zu diesen Schneiden bewege.

Letzteres ist auf eigenthümliche Weise bei der Waage von Thornton und Voss erreicht worden, die zwar nur zur Wägung kleinerer Lasten ohne Anspruch auf grössere Genauigkeit geeignet, jedoch durch ihre compendiöse Beschaffenheit und Transportfähigkeit bemerkenswerth ist. Ihr Waagebalken ist ein Rohr R, an welchem die Aufhängungsschneide O und Lastschneide B (je als kurze Doppelschneide) so angebracht sind, dass die Ebene OB durch die Axe der kreiscylindrischen Höhlung von R hindurch geht. Die Aufhängung bei O und die Anhängung der Last bei B geschehen durch Bügel, welche die betreffenden Doppelschneiden mit entsprechenden Augen umfassen und beim Transport der Waage gegen die Oberfläche von R angelegt werden können. Die Massenvertheilung des Rohres R ist so, dass sein Schwerpunkt von der Ebene OB auf der Seite des Lastbügels etwas entfernt liegt, während auf der anderen (beim Gebrauche oberen) Seite anstatt einer Zunge sich eine Libelle auf R befindet. In diesem Rohre befindet sich nun als Gegengewicht für die Last ein System von teleskopartig gegen einander verschieblichen coaxialen Hohlcylindern nebst einer massiven Stange C_1 in der Mitte, so dass vermittels eines Knopfes am Ende von C_1 zunächst diese Stange im Hohlcylinder C_2, dann dieser im Hohlcylinder C_3, schliesslich der letzte (äusserste) dieser Hohlcylinder im Rohre R stets bis zu derselben Länge $= 2a$ nach aussen verschoben werden kann, bis das Gleichgewicht mit einspielender Libelle erreicht ist. Das Gewicht der Last Q ist dann an der Theilung abzulesen, welche äusserlich an $C_1, C_2 \ldots$ angebracht ist, und zwar entspricht es dem Theilstriche, welcher dem Rande des letzten noch ganz im Rohre R befindlichen Hohlcylinders, bezw. dem Rande von R selbst, falls die Verschiebung sich auch schon auf den äussersten dieser Hohlcylinder erstreckt hat, gegenüber liegt. Sind z. B. ausser der Stange C_1 zwei solche Hohlcylinder C_2, C_3 vorhanden und sind P_1, P_2, P_3 bezw. die Gewichte von C_1, C_2, C_3, so sind, jenachdem nur C_1 ganz auswärts (um die Strecke $2a$ gegen C_2) oder ausserdem C_2 (um die Strecke $2a$ gegen C_3) oder



ausserdem C_3 (um dieselbe Strecke $2a$ gegen R) auswärts verschoben ist, die auf Drehung um O wirkenden Momente des Laufgewichtes, falls ursprünglich die Schwerpunkte seiner Bestandtheile C_1, C_2, C_3 sämmtlich in O lagen,

$$P_1 a, \quad P_1 . 3a + P_2 a, \quad P_1 . 5a + P_2 . 3a + P_3 a,$$

folglich mit $OB = b$ die dadurch im Gleichgewicht erhaltenen Lasten Q

$$= P_1 \frac{a}{b}, \quad (3 P_1 + P_2) \frac{a}{b}, \quad (5 P_1 + 3 P_2 + P_3) \frac{a}{b}.$$

Ist ΔQ die Laständerung, welche der Verschiebung um einen Skalentheil (= der Entfernung zweier aufeinander folgender Theilstriche) entsprechen soll, so sind die Anzahlen $= n_1, n_2, n_3$ der gleichen Theile, in welche die Länge $2a$ bezw. auf C_1, C_2, C_3 getheilt werden muss, bestimmt durch die Gleichungen, durch welche die vorgenannten Lasten bezw.

$$= n_1 \Delta Q, \quad (n_1 + n_2) \Delta Q, \quad (n_1 + n_2 + n_3) \Delta Q$$

gesetzt werden, also durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \Delta Q &= P_1 \frac{a}{b} \\ n_2 \Delta Q &= (2 P_1 + P_2) \frac{a}{b} \\ n_3 \Delta Q &= (2 P_1 + 2 P_2 + P_3) \frac{a}{b} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Insbesondere für $P_1 = P_2 = P_3 = P$ ist:

$$n_1 = \frac{1}{3} n_2 = \frac{1}{5} n_3 = \frac{P}{\Delta Q} \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Genauigkeit der Wägung mit einer Laufgewichtswaage ist besonders deshalb von untergeordneter Art, weil die Theilung des Waagebalkens, die meistens aus freier Hand vorzunehmende Verschiebung des Laufgewichtes und die Beobachtung seiner jeweiligen Lage viel weniger feine Abstufungen gestatten, als die Belastung einer Gegengewichtsschale mit Gewichtstücken. Indessen sind verschiedenartige Einrichtungen mit Erfolg getroffen worden, um diese Mängel zu vermindern, namentlich bei grösseren Brückenwaagen, bei denen das Laufgewicht am Gegengewichtshebel zum Ersatze einer mit Gewichtstücken zu belastenden Waagschale dient. Insbesondere kann dies dadurch erreicht werden, dass dem Laufgewichte P mit seiner zugehörigen Skala S am Waagebalken noch ein kleineres Laufgewicht p mit besonderer Skala s hinzugefügt wird, welches z. B. passend als ein mit P prismatisch gepaarter linealförmiger Schieber

ausgeführt sein kann, auf welchem die Skala s angebracht ist. Auf S sind dann die grösseren Gewichtseinheiten ΔQ der Last Q, auf s die kleineren Gewichtseinheiten Δq derselben, sowie durch Schätzung noch Bruchtheile von Δq abzulesen. Zu dem Ende wird, während p gegen P so eingestellt ist, dass die Marke Z an P auf den Nullpunkt von s zeigt, P sammt p längs dem Waagebalken bis ungefähr zum Einspielen der Waage verschoben, darauf nöthigenfalls etwas zurückgeschoben, bis Z gerade auf einen Theilstrich von S weist (was durch kerbförmige Einschnitte am Waagebalken erleichtert und gesichert werden kann), endlich das genauere Einspielen der Waage durch Verschiebung von p längs P herbeigeführt. Die Marke Z lässt dann auf der Skala S die Zahl der grösseren Einheiten ΔQ, auf s die der kleineren Einheiten Δq event. nebst einem zu schätzenden Bruchtheile von Δq erkennen. Bei gleichen Entfernungen der Theilstriche auf den Skalen S und s verhält sich

$$\Delta q : \Delta Q = p : P + p.$$

Die Nebenskala kann sich auch ebenso wie die Hauptskala am Waagebalken befinden, so dass zuerst nur P allein, dann p längs dem Waagebalken verschoben wird, in welchem Falle sich bei gleichen Theilungen beider Skalen

$$\Delta q : \Delta Q = p : P$$

verhält; doch ist die zuerst beschriebene Einrichtung insofern vorzuziehen, als beide Ablesungen an derselben Stelle zu geschehen haben. Zur Ablesung noch kleinerer Gewichtseinheiten $\Delta q'$ der Last kann ausserdem ein zweites noch leichteres Gewicht p' als ein mit Skala s' versehenes Lineal relativ gegen P verschieblich angebracht sein, in welchem Falle die Verschiebung von p gegen P jeweils nur bis zum Einspielen von Z auf einem Theilstriche von s zu geschehen hat und auf s' ausser Vielfachen von $\Delta q'$ auch durch Schätzung noch Bruchtheile von $\Delta q'$ abzulesen bleiben.

Bei einer Construction von Brauer ist der Waagebalken als Schraubenspindel H mit einer der Länge nach eingehobelten Nuth auf der Seite des Laufgewichtes gestaltet, während letzteres aus 3 Theilen A, B, C besteht so, dass A in Form einer mit entsprechender centraler Durchbrechung auf H geschobenen runden Scheibe vermittels jener Nuth der Länge nach gegen H verschieblich, B als eine die Schraubenspindel umgebende Hülse relativ gegen A nur drehbar um die Schraubenaxe, C endlich gegen B nach einer diese Axe rechtwinklig schneidenden Richtung nur verschieblich ist; dieses Glied C ist mit einem der Schraubenspindel H entsprechenden Muttergewinde längs etwa $^1/_3$ des Umfanges

von H versehen und wird durch den Druck einer Feder in Eingriff mit H erhalten, so lange nicht durch einen entgegengesetzten Druck mit der Hand die Paarung aufgehoben wird. In der Nuth befindet sich die Hauptskala S, deren Theilstriche um die Ganghöhe der Schraube von einander entfernt liegen. An A befindet sich die zu S gehörige Marke Z und ausserdem am Umfange eine Kreistheilung s, z. B. von 100 gleichen Theilen, an B endlich die zu dieser Theilung gehörige Marke z. Im Zustande der Auslösung des Schraubenpaares kann dann das aus A, B und C zusammen bestehende Laufgewicht zunächst so weit verschoben werden, bis bei dem Einspielen von Z auf einen Theilstrich von S die mittlere Gleichgewichtslage insoweit erreicht ist, dass sie bei der Einstellung von Z auf den folgenden Theilstrich von S schon überschritten würde; ist bei solcher Lage von A gegen S die Marke z an B auf den Nullpunkt der Kreistheilung s an A eingestellt, so passt das Mutterschraubengewinde von C gerade in das Schraubengewinde von H, wenn C dem Einflusse des Federdruckes wieder frei gegeben wird, und ist dann durch Drehung von BC und dadurch bewirkte weitere Verschiebung von ABC die Waage zu völligem Einspielen zu bringen. Schliesslich zeigt Z auf S die Zahl der grösseren Gewichtseinheiten ΔQ der Last, z auf s die Zahl der überschüssigen kleineren Gewichtseinheiten Δq derselben an.

Um besonders bei grösseren Waagen (Centesimalwaagen zur Wägung von Fuhrwerken etc.) die Verschiebung des Laufgewichtes P zu erleichtern, ist der zugehörige Waagebalken verzahnt bezw. mit einer Zahnstange verbunden worden, so dass in diese Verzahnung ein in P gelagertes, mit Handkurbel versehenes Getriebe eingreift. Mit letzterem kann zugleich eine eingetheilte Scheibe zur Markirung der kleineren Gewichtseinheiten der Last verbunden werden u. s. f.

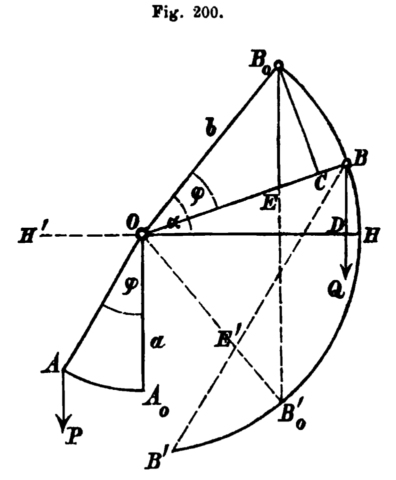
c. Neigungswaagen.

§. 177. Theorie der einfachen Neigungswaage.

Die einfache Neigungswaage ist ein um eine horizontale Axe O drehbarer Hebel, dessen Schwerpunkt A in einem gewissen Abstande a von O entfernt liegt und dessen in A angreifend zu denkendes Gewicht P als Gegengewicht der Last Q benutzt wird, die an einer mit O in der Entfernung b parallelen Axe B angreift; das Gewicht der Lastschale

bezw. des Lasthakens oder überhaupt des Aufhängungsmittels der Last Q am Hebel ist hierbei als ein in B concentrirter Bestandtheil von P zu betrachten. Auf die Grösse von Q wird aus der durch einen Zeiger auf einer Skala markirten Gleichgewichtslage des Hebels geschlossen, und handelt es sich also vor Allem um die Beziehung zwischen Q und dem Winkel φ, um welchen in dieser Gleichgewichtslage AOB, Fig. 200, der Hebel gegen diejenige A_0OB_0 gedreht ist, welche der unbelasteten Waage, also $Q=0$ entspricht und in welcher OA_0 vertical abwärts gerichtet ist. Ist aber der Winkel

Fig. 200.



$$AOB = A_0OB_0 = 90^0 + \alpha, \quad \text{also} \quad B_0OH = \alpha,$$

unter OH eine horizontale Gerade verstanden, so ist die Gleichgewichtsbedingung bei Abstraction von Reibungswiderständen:

$$Pa \sin \varphi = Qb \cos(\alpha - \varphi)$$

oder mit der Bezeichnung $R = P\frac{a}{b}$ = dem in der Geraden OA auf den Abstand b von O reducirten Hebelgewichte:

$$Q = R\frac{\sin \varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Daraus folgt:

$$\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi = \frac{R}{Q} \sin \varphi$$

$$\cot g\, \varphi = \frac{R}{Q \cos \alpha} - tg\, \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und durch Differentiation:

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{R}{\cos \alpha} \frac{dQ}{Q^2}.$$

Hiernach ist näherungsweise auch für kleine Laständerungen ΔQ von endlicher Grösse:

$$\Delta\varphi = \frac{R}{Q^2 \cos \alpha} \frac{\Delta Q}{1 + \cot g^2 \varphi},$$

und da nach Gl. (2):

$$1+cotg^2\varphi=1+\frac{R^2}{Q^2\cos^2\alpha}-\frac{2R\sin\alpha}{Q\cos^2\alpha}+tg^2\alpha$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{R^2}{Q^2}-2\frac{R}{Q}\sin\alpha+1\right)$$

ist, ergiebt sich mit $\varDelta Q=\frac{1}{\varepsilon}Q$ der Empfindlichkeitswinkel:

$$\varDelta\varphi=\frac{1}{\varepsilon}\frac{R\cos\alpha}{Q}\frac{1}{\frac{R^2}{Q^2}-2\frac{R}{Q}\sin\alpha+1}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\cos\alpha}{\frac{R}{Q}-2\sin\alpha+\frac{Q}{R}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Er ist abhängig von Q und am grössten, wenn $\frac{R}{Q}+\frac{Q}{R}$ am kleinsten, d. h. wenn

$$-\frac{R}{Q^2}+\frac{1}{R}=0 \quad \text{oder} \quad Q=R$$

ist, und zwar

$$max\,\varDelta\varphi=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{2\varepsilon}cotg\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right).(4).$$

Um den Mittelwerth des Empfindlichkeitswinkels möglichst gross zu erhalten, sind die Elemente P, a, b so zu wählen, dass $R=P\frac{a}{b}$ ein Mittelwerth der mit der Waage zu wägenden Lasten Q ist. Das Maximum von $\varDelta\varphi$ ist um so grösser, je grösser α bis $\alpha=90^0$, wofür $max\,\varDelta\varphi$ unendlich gross wird, einem indifferenten Gleichgewichtszustande entsprechend. Diesen Werth darf α natürlich nicht erreichen und pflegt in der That α selten $>45^0$ gemacht zu werden, wofür

$$max\,\varDelta\varphi=\frac{1}{2\varepsilon}cotg\,22{,}5^0=\frac{1{,}207}{\varepsilon}$$

ist. Sollte z. B. in diesem Falle und bei Voraussetzung einer kreisförmigen Skala zum Mittelpunkte O von r Millimeter Radius die Veränderung der Last Q um $\frac{1}{\varepsilon}Q$ eine Bewegung des Zeigers auf der Skala

von 1 Millimeter bewirken, so wäre

$$max\, \Delta\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1{,}207}{\varepsilon}, \quad \text{also} \quad \varepsilon = 1{,}207\, r,$$

z. B. ε nur $= 603$ für $r = 500$ Millimeter. Eine grosse Empfindlichkeit ist danach von solcher Neigungswaage nicht zu erwarten, um so weniger, als das Bedürfniss grosser Neigungswinkel oft die Gestaltung der Axen O, B als Keilschneiden unthunlich macht; die grössere Reibung cylindrischer Zapfen an diesen Stellen bedingt dann einen so grossen Unzuverlässigkeitswinkel $\Delta\varphi_1$ (§. 166), dass es in Vergleich mit demselben illusorisch wäre, wenn man etwa $max\, \Delta\varphi < \frac{1}{r}$ annehmen wollte. —

Die Herstellung der Skala ergiebt sich aus Gl. (1), geschieht aber am einfachsten graphisch mit Rücksicht auf die folgende Bemerkung. Zieht man in Fig. 200 die Gerade B_0C normal zu OB, B_0E und BD vertical, also normal zu OH, so ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke B_0CE und ODB:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{B_0C}{OD} = \frac{B_0E}{OB} = \frac{e}{b}$$

mit der Bezeichnung $B_0E = e$, somit nach Gl. (1):

$$Q = R\frac{e}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Die Strecke $B_0E = e$ ist also der Last Q proportional, und wenn die Verticale B_0EB_0' oder eine damit parallele Gerade als Skala benutzt würde mit OB als Zeigerrichtung, so würde die Theilung gleichförmig für gleiche Abstufungen ΔQ der Last, und ihr Schnittpunkt mit OB_0 der Nullpunkt. Sollte die geradlinige Skala einen gewissen Winkel mit der Verticalen bilden, so müsste die Zeigerrichtung um denselben Winkel in demselben Sinne gegen OB geneigt sein; einer horizontalen Skala würde z. B. eine zu OB senkrechte Zeigerrichtung entsprechen. Um die Theilpunkte einer Kreisskala mit dem Mittelpunkte O zu erhalten, brauchen nur die Theilpunkte der gleichförmig getheilten geradlinigen Skala von O aus radial projicirt zu werden, wodurch die Theilung der Kreisskala natürlich um so ungleichförmiger wird, je mehr sich ihre Theilpunkte von der durch O gehenden Normalen zur geradlinigen Skala entfernen.

Anstatt einer unbeweglichen Skala und eines mit der Waage fest verbundenen beweglichen Zeigers könnte auch ein unbeweglicher Zeiger mit einer an der Waage festen beweglichen Skala benutzt werden.

Würde z. B. mit dem Hebelarme OB bei B, Fig. 200, eine Gerade als Skala unter dem Winkel

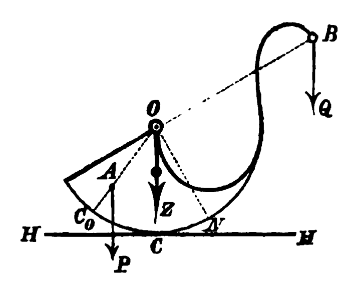
$$OB_0 B_0' = OBB' = 90^0 - \alpha$$

fest verbunden, so erhielte sie eine gleichförmige Theilung für OB_0' als unbewegliche Zeigerrichtung; denn wenn diese die Gerade BB' in E' schneidet, so ist

$$B'E' = BE = e,$$

weil $B'E'$ und BE symmetrisch sind in Bezug auf die Verbindungsgerade des Punktes O mit dem Schnittpunkte von $B_0 B_0'$ und BB'. Bezüglich gleichzeitiger Richtungsänderung der Skala und des Zeigers, sowie in Betreff centraler Projection der gleichförmig getheilten geradlinigen auf die Kreisskala gelten wieder die obigen Bemerkungen. Sollte z. B. die unbewegliche Zeigerrichtung vertical sein, so wäre die Richtung der geradlinigen Skala um den Winkel $B_0'OA_0 = 90^0 - \alpha$ in demselben Sinne aus der Richtung BB' heraus zu drehen, so dass sie mit OB parallel wird. Fig. 201 zeigt eine eigenthümliche Art der Ausführung dieses Falles mit Kreisskala. Die Waage ist hier nicht ein um O drehbarer Hebel, sondern sie ruht mit einer kreiscylindrischen Fläche rollbar auf einer horizontalen Ebene HH, indem sie dieselbe bei veränderlicher Last Q an verschiedenen Stellen C berührt. Sie hat am Umfange eine Kreistheilung mit dem in der Richtung OA liegenden Nullpunkte C_0; auf dieselbe weist ein Zeiger Z, der als Pendel um O drehbar aufgehängt ist. Indem die gleichförmig getheilte geradlinige Skala die Richtung OB haben müsste, liegen die Theilstriche der Kreistheilung bei N am weitesten auseinander, falls ON senkrecht zu OB ist. Jede elementare Wälzung ist als Drehung um die Axe C zu betrachten, für welche die Momente von P und Q dieselben sind wie für die Axe O.

Fig. 201.



Um für gleiche Abstufungen ΔQ eine Kreisskala mit gleichförmiger Theilung zu erhalten, kann man solche Einrichtungen treffen, wodurch die Lage entweder des Angriffspunktes A von P, oder der Angriffslinie B von Q, oder der Drehungsaxe O an der Waage mit deren Neigung auf entsprechende Weise veränderlich wird.* Sofern es indessen meistens

* Brauer: „Die Construction der Waage", S. 23.

darauf ankommt, dass $\Delta\varphi$ nicht sowohl für gleiche Werthe von ΔQ, sondern für gleiche Werthe von $\frac{\Delta Q}{Q}$ möglichst gleich gross sei, ist die gleichförmige Theilung der Kreisskala ohne besonderen Werth.

§. 178. Anwendungen der einfachen Neigungswaage.

Einfache Neigungswaagen sind besonders zu solchen Wägungen kleiner Lasten geeignet, bei welchen es mehr auf Schnelligkeit und Bequemlichkeit, als auf grosse Genauigkeit ankommt, z. B. als Briefwaagen, Papierwaagen, Garnwaagen etc. Eine Briefwaage von zweckmässiger Form geht u. A. aus der in Fig. 201 dargestellten Waage mit beweglicher Skala und unbeweglicher Zeigerrichtung dadurch hervor, dass die Stützung und Wälzung auf der Ebene HH, die den Uebelstand hat, einer öfteren Controle und Berichtigung bezüglich der horizontalen Lage dieser Stützebene zu bedürfen, nebst dem Pendelzeiger Z durch Aufhängung vermittels eines Gehänges ersetzt wird, das dann zugleich als Zeiger dienen kann. Eine geradlinige Skala ist dabei parallel OB mit der im Gehänge um die Axe O drehbaren Waage zu verbinden und so einzutheilen, dass die gleich weit von einander entfernten Theilstriche gegen O convergiren; die Schnittpunkte der letzteren mit einem Kreise zum Mittelpunkte O liefern die Theilpunkte einer Kreisskala.

Ganz ähnlich kann passender Weise eine Papierwaage eingerichtet werden, welche dazu dient, annäherungsweise möglichst schnell aus dem Gewichte eines Bogens auf das Gewicht $= m$ Kgr. von einem Ries zu schliessen. Ist n die Bogenzahl von einem Ries, so wird der Theilstrich, auf welchen der Zeiger bei Belastung der Waage durch $\frac{m}{n}$ Kgr. weist, mit m bezeichnet. Zwei verschiedene Skalen derselben Waage entsprechen $n = 500$ für ungeleimtes und $n = 480$ für geleimtes Papier. Die Gewichtsdifferenzen einzelner Bogen können hierbei durch Multiplication mit n so grosse Fehler verursachen, dass in Vergleich mit denselben die der Neigungswaage an und für sich anhaftende Ungenauigkeit gegenüber der Bequemlichkeit ihres Gebrauches kaum in Betracht kommt. Aehnlich verhält es sich in anderen Fällen einer solchen verjüngten Wägung zum Zwecke des Schlusses aus dem Gewichte eines Theils oder einer kleineren Einheit auf dasjenige des Ganzen bezw. einer grösseren Einheit. —

Von grösserem technischem Interesse ist die Garnwaage, welche

zur Bestimmung der Feinheitsnummer n eines Garnes dient, d. i. der Zahl, welche angiebt, wie viel mal das Gewicht einer bestimmten Fadenlänge in einem bestimmten als Einheit angenommenen Gewichte, z. B. das Gewicht eines Strähns von 1000 Meter Länge in einem ganzen oder halben Kilogramm enthalten ist. Die hierbei zu Grunde liegenden Längen- und Gewichtseinheiten selbst sind einstweilen noch in verschiedenen Ländern verschieden. Die Anordnung und Eintheilung der Skala einer solchen Garnwaage gemäss der Forderung, dass sie unmittelbar die Feinheitsnummer n abzulesen gestatten soll, ergiebt sich im Anschlusse an die Entwicklungen im vorigen §. und an Fig. 200 auf folgende Weise.

Bezeichnet man daselbst mit ψ den Winkel, unter welchem der Schwerpunktsradius OA gegen die Horizontale geneigt ist, also den Winkel $H'OA$, Fig. 200, der dabei positiv oder negativ gesetzt wird, jenachdem er unter oder über OH' liegt, so ist nach Gl. (2) mit $\varphi = 90^0 - \psi$ und $Q = \frac{1}{n}$:

$$tg\,\psi = \frac{R}{\cos\alpha} n - tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, dass eine unbewegliche geradlinige und verticale Skala für OA als Zeiger eine gleichförmige Theilung zu erhalten hätte; denn wenn sie OH' im Abstande h von O schneidet, so dass OH' und OA die Strecke $h\,tg\,\psi$ derselben zwischen sich fassen, so ist für $\Delta n = 1$:

$$\Delta(h\,tg\,\psi) = \frac{Rh}{\cos\alpha} = Const.$$

In der Regel wird aber eine kreisförmige Skala zum Mittelpunkte O vorgezogen, die durch centrale Projection der gleichförmig getheilten verticalen geradlinigen Skala erhalten wird, und deren Theilstriche somit um so näher aneinander zu liegen kommen, je weiter sie von OH' entfernt sind. Sind also n_1 und n_2 ($n_1 < n_2$) die Grenzwerthe von n, für welche die Waage bestimmt ist, so erscheint es am besten, die Kreisskala so anzuordnen, dass

$$\psi = 0 \text{ wird für } n = \frac{n_1 + n_2}{2} = m,$$

nach Gl. (1) also:

$$R = \frac{\sin\alpha}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder wegen $R = P\frac{a}{b}$ bei gegebenen Werthen von P und a:

$$b = \frac{Pa}{R} = \frac{Pa}{\sin\alpha} m = \frac{Pa}{\sin\alpha} \frac{n_1 + n_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Der negative Winkel $\psi = \psi_1$, welcher $n = n_1$ entspricht, und der positive Winkel $\psi = \psi_2$, welcher $n = n_2$ entspricht, sind dann absolut genommen gleich gross.

Je grösser dieser Winkel $\psi_2 = -\psi_1$ gemacht wird, desto grösser wird zwar der Mittelwerth der Entfernung zweier benachbarter Theilstriche der Kreisskala, aber desto mehr nimmt sie auch von der Mitte (von OH' aus) nach den Enden ab, so dass sich hier die Aufgabe darbietet, jenen Winkel und somit den Mittelpunktswinkel $= 2\psi_2$ der ganzen Theilung möglichst so zu wählen, dass die kleinste Entfernung ihrer Theilstriche an den Enden noch möglichst gross sei, und somit die kleinste Empfindlichkeit, mit welcher n durch Ablesung an der Skala gefunden wird, nämlich diejenige für $n = n_1$ und $n = n_2$ ein Maximum sei. Nun ist nach (1) und (2):

$$tg\,\psi = \frac{tg\,\alpha}{m} n - tg\,\alpha = \frac{n-m}{m} tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{tg\,\alpha}{m} \cos^2\psi = \frac{tg\,\alpha}{m} \frac{1}{1 + \left(\frac{n-m}{m}\right)^2 tg^2\,\alpha}$$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{cotg\,\alpha + \left(\frac{n-m}{m}\right)^2 tg\,\alpha}.$$

Dieser Differentialquotient ist ein Maass der Empfindlichkeit, mit welcher n auf der Kreisskala abzulesen ist. Er ist am kleinsten für $n = n_1$ oder $= n_2$, und zwar mit

$$k = \frac{n_2 - m}{m} = \frac{m - n_1}{m} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$min\,\frac{d\psi}{dn} = \frac{1}{m} \frac{1}{cotg\,\alpha + k^2\,tg\,\alpha}.$$

Insofern aber dieser Minimalwerth von $\frac{d\psi}{dn}$ noch von α abhängt, ist er ein Maximum, wenn

$$cotg\,\alpha + k^2\,tg\,\alpha \text{ ein Minimum,}$$

d. h. wenn

$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{k^2}{\cos^2\alpha}=0,\quad tg\,\alpha=\frac{1}{k}=\frac{n_2+n_1}{n_2-n_1}\quad \ldots\ldots (5)$$

ist. Der Forderung entspricht also ein Winkel $\alpha > 45^0$, wogegen sich nach Gl. (4):

$$tg\,\psi_2=\frac{n_2-m}{m}\,tg\,\alpha=k\,tg\,\alpha=1,\quad \psi_2=-\psi_1=45^0\quad \ldots (6)$$

ergiebt, entsprechend einem eingetheilten Quadranten als Skala.* Aus Gl. (5) folgt auch:

$$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{n_2+n_1}{\sqrt{2(n_2^2+n_1^2)}}$$

und somit aus Gl. (3):

$$b=Pa\sqrt{\frac{n_2^2+n_1^2}{2}}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Wegen der Schwierigkeit genauer Bestimmung des Schwerpunktes A und des Winkels α ist es rathsam, die vorläufig näherungsweise gemäss den Gleichungen (5) und (7), also durch Berechnung von α und b für gegebene Werthe von n_1, n_2 und angenommene Werthe von P, a construirte Waage nachträglich durch geeignete kleine Regulirungsmassen M, M' zu justiren, von denen etwa vermittels feiner Schrauben M im Sinne OA, M' normal dazu verstellbar sein mag. Durch Verstellung von M' kann dann die lothrechte Zeigerrichtung bei unbelasteter Waage, durch Verstellung von M die horizontale Zeigerrichtung bei der Belastung mit $Q=\frac{1}{m}$ Gewichtseinheiten herbeigeführt werden. Markirt man demnächst die Theilstriche S_1 und S_2 des einzutheilenden Kreisbogens bei den Belastungen $Q=\frac{1}{n_1}$ und $\frac{1}{n_2}$, so ergiebt sich, wenn auch die Winkel $H'OS_1$ und $H'OS_2$ etwas von 45^0 verschieden ausfallen mögen, doch eine richtige Skala, wenn jetzt die Sehne S_1S_2 in n_2-n_1-1 gleiche Theile getheilt wird und die erhaltenen Theilpunkte central von O aus auf den Kreisbogen S_1S_2 projicirt werden.

Um schliesslich die so gefundene Skala auch für die Feinheitsnummern n_2 bis n_3 benutzen zu können, deren Intervall

$$n_3-n_2=n_2-n_1$$

* Redtenbacher: „Der Maschinenbau", Bd. I, S. 404.

ist, braucht nur der Lastarm des Hebels ausser B noch mit einer zweiten Aufhängungsaxe B' der Last versehen zu werden, deren Lage mit den Bezeichnungen

$$OB' = b' \text{ und Winkel } AOB' = 90^0 + \alpha'$$

gemäss (5) und (7) bestimmt ist durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha' &= \frac{n_3 + n_2}{n_3 - n_2} = \frac{n_3 + n_2}{n_2 + n_1}\,tg\,\alpha \\ b' &= Pa\sqrt{\frac{n_3^2 + n_2^2}{2}} = b\sqrt{\frac{n_3^2 + n_2^2}{n_2^2 + n_1^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Die von oben nach unten aufeinander folgenden Theilstriche der Skala erhalten dann eine doppelte Bezeichnung,

einerseits mit $n_1 \quad n_1 + 1 \ldots n_2$
andrerseits mit $n_2 \quad n_2 + 1 \ldots n_3$.

§. 179. Zusammengesetzte Neigungswaagen.

Der Ersatz einer einfachen durch eine zusammengesetzte Neigungswaage kann durch die Absicht bedingt sein, statt einer Pendelschale oder eines Hakens zur Aufnahme der Last Q eine parallel geführte horizontale Tafel verwenden zu können. Am einfachsten dient dazu eine z. B. zur Wägung von Briefen und leichteren Packeten sehr gebräuchliche Waage, welche aus der Parallelogrammwaage, Fig. 185 (§. 169), dadurch hervorgeht, dass der geradlinige Hebel AOB mit Weglassung der bei A hängenden Gegengewichtsschale durch einen Winkelhebel ersetzt wird, dessen im Schwerpunkte A angreifend zu denkendes Gewicht P als Gegengewicht der Last Q benutzt wird. Für die Skala sind in diesem Falle die im §. 177 entwickelten Regeln vollständig anwendbar, falls in P das Gewicht der Tafel mit Stiel BB_1 nebst dem halben Gewichte der Lenkstange O_1B_1 eingerechnet wird, indem dann bezüglich des Gleichgewichtes zwischen P und Q sich Alles gerade so verhält, als ob Q unmittelbar in B concentrirt angriffe.

Zur Wägung grösserer Lasten sind zur Vermeidung eines übermässig schweren Winkelhebels AOB solche zusammengesetzte Neigungswaagen mehr geeignet, bei welchen ebenso wie bei den früher besprochenen zusammengesetzten Hebelwaagen im engeren Sinne durch Vermittlung eines passenden Mechanismus nur ein bestimmter Theil der Last auf den Gegengewichtshebel, nämlich hier auf den die einfache Neigungswaage

darstellenden Winkelhebel übertragen wird. Die Regeln, welche für die Construction zusammengesetzter Hebelwaagen im engeren Sinne zur Sicherung der Stabilität aufgestellt wurden bezüglich der Winkel, unter welchen die Verbindungsstangen der Hebel gegen letztere gerichtet sind, kommen hier nicht in Betracht, weil eine Neigungswaage stets mehr als ausreichend stabil ist; auch sind jene Winkel hier mit Q zwischen weiteren Grenzen veränderlich, wie überhaupt natürlich die Configuration des ganzen Mechanismus. Wenn aber die im §. 177 entwickelten Regeln für die Anordnung und Eintheilung der Skala auf dergleichen zusammengesetzte Neigungswaagen übertragbar sein sollten, müsste für alle jene Configurationen des Mechanismus die den Winkelhebel angreifende Verbindungsstange oder jede derselben, falls ihrer mehrere vorhanden sind, beständig vertical bleiben und die durch sie auf den Hebel übertragene Kraft Z aus zwei Theilen X, Y bestehen, so dass X ein unveränderliches Verhältniss zum Eigengewichte des Mechanismus und Y ein unveränderliches Verhältniss zur Last Q hat. Im Falle z. B. von zwei solchen Stangen, die in B_1 und B_2 die verticalen Kräfte $Z_1 = X_1 + Y_1$ und $Z_2 = X_2 + Y_2$ auf den mit dem Zeiger bei unbeweglicher Skala, bezw. mit der Skala bei unbeweglichem Zeiger fest verbundenen Winkelhebel übertragen, liessen sich dann X_1 und X_2 mit dem Eigengewichte des Hebels zu der in A angreifenden Schwerkraft P, sowie Y_1 und Y_2 zu einer verticalen Kraft $Y = Y_1 + Y_2$ zusammensetzen, welche, in einem unveränderlichen Punkte B des Winkelhebels angreifend, einem bestimmten aliquoten Theile der Last Q gleich ist. Sofern sich aber im Allgemeinen jene Bedingungen nicht erfüllt finden, selbst dann nicht für alle Configurationen des Mechanismus, wenn nur eine Stange die Verbindung mit dem Winkelhebel vermittelt, erfordert die Skala in der Regel eine empirische Theilung.

Die Systeme zusammengesetzter Hebelwaagen (§§. 169—173), welche zur Construction zusammengesetzter Neigungswaagen geeignet sind, erfahren eine weitere Einschränkung bei Brückenwaagen durch die Forderung, dass die gleichzeitigen Verticalbewegungen aller Punkte der Brücke hier nicht nur für sehr kleine, sondern für grosse Configurationsänderungen des Mechanismus einander gleich sein müssen, um das Ergebniss der Wägung von der Lage der Last auf der Brücke unabhängig zu machen. Dieser Forderung entspricht z. B. die Doppeltrapezwaage, Fig. 198 (§. 173), deren Mechanismus u. A. bei zusammengesetzten Neigungswaagen zur Wägung von Passagiergepäck mehrfach Anwendung gefunden hat, indem dabei entweder, wie bei einer betreffenden Waage von Pellenz, der Hebel

OA als Winkelhebel mit dem Zeiger verbunden ist unter Weglassung des weiteren Hebels $A_0 B_0$, oder dieser letztere durch die einfache Neigungswaage ersetzt wird, wie bei einer Waage von Jos. Greiner in München.

Die besprochenen Constructionsbedingungen zusammengesetzter Neigungswaagen, sowohl was die Parallelführung einer Brücke, als was die zweckmässige möglichst gleichförmige Theilung der Skala gemäss den für die einfache Neigungswaage gültigen Regeln betrifft, sind um so besser erfüllbar, je weniger der Winkelhebel drehbar zu sein braucht, um die verlangten Abstufungen der Last auf einer genügend grossen Skala und folglich mit genügender Genauigkeit anzeigen zu können. Dazu sind solche Einrichtungen zweckmässig, durch welche die betreffenden Neigungswinkel vergrössert auf den Zeiger übertragen werden. Bei einer solchen Einrichtung von Herrmann in Berlin* ist mit dem Winkelhebel ein geschlitzter Arm verbunden, welcher, anstatt unmittelbar als Zeiger zu dienen, eine Zahnstange verschiebt vermittels eines in jenen Schlitz hineinragenden Ansatzstiftes derselben; die Zahnstange greift in ein kleines Rad auf der Axe des Zeigers. Ist der Theilrissumfang des Rades = der Verschiebung der Zahnstange, so umfährt die Zeigerspitze den ganzen Umfang der zugehörigen vollen Kreisskala, und die Theilung der letzteren wird mit derselben Annäherung gleichförmig, mit welcher für den geschlitzten Arm des Winkelhebels als Zeiger eine geradlinige Skala von gleicher Richtung mit der Zahnstange gleichförmig getheilt werden müsste.

d. Federwaagen.

§. 180. Theorie der Federwaage.

Die Federwaage ist ein Instrument, welches dazu dient, auf die Grösse des Gewichtes und dadurch der Masse eines Körpers aus der Grösse der durch dieses Gewicht unter gewissen Umständen verursachten Deformation einer Feder, in der Regel einer Stahlfeder, zu schliessen. Letztere pflegt dabei entweder in Form eines meist offenen Ringes benutzt zu werden, oder als Schraubenfeder (cylindrische Spiralfeder), die durch die Schwerkraft des betreffenden Körpers im Sinne ihrer Axe gezogen und dadurch verlängert wird. Die Deformation wird entweder

* Brauer: „Die Construction der Waage“, Taf. III, Fig. 75.



unmittelbar durch einen auf eine Skala weisenden Zeiger gemessen oder nach vorhergegangener Vergrösserung vermittels eines geeigneten, gewöhnlich eines Hebel- oder Rädermechanismus. Im Falle einer ringförmigen oder überhaupt einer so gestalteten Feder, dass die Beziehung zwischen ihrer Belastung und Deformation von weniger einfacher Art ist, erhält die Skala eine vollkommen empirische, für gleiche Intervalle der Last im Allgemeinen ungleichförmig ausfallende Theilung, so dass von einer Theorie keine Rede ist. Vorzuziehen sind aber solche Federn, welche eine angenäherte Vorausberechnung ihrer Deformation x in Folge der Last von gegebener Grösse Q und gegebener Angriffsweise gestatten und für welche die Beziehung zwischen x und Q innerhalb der betreffenden Grenzen von Q sich als einfache Proportionalität ergiebt, so dass die Skala eine gleichförmige Theilung erhalten kann. Wird dann auch der Theilstrich, welcher der Maximallast $Q = n\Delta Q$ entspricht, thatsächlich durch den Versuch bestimmt, so genügt es doch, die Entfernung zwischen diesem und dem Theilstriche, welcher $Q = 0$ entspricht, in n gleiche Theile zu theilen zur Ablesung der verschiedenen Vielfachen von ΔQ bis zu $n\Delta Q$; zugleich lassen sich dann die Dimensionen der Feder im Voraus so berechnen, dass sowohl ihre Anstrengung, als ihre Deformation für die Maximalbelastung Q verlangten Werthen nahe gleich werden. Das Verfahren mag hier nur für den gewöhnlichen Fall einer im Sinne ihrer Axe gezogenen Schraubenfeder von überall gleichem kreisförmigem Querschnitte erläutert werden. Dabei sei:

d der Durchmesser des Stahldrahtes, aus welchem die Feder verfertigt,

r der Radius der Cylinderfläche, auf welcher ihre Mittellinie gelegen ist,

n die Zahl der Windungen, die von so schwacher Steigung vorausgesetzt werden, dass sie sich im unbelasteten Zustande der Feder fast berühren,

t die höchstens zulässige Schubspannung,

G der Modul der Schubelasticität des Federstahls.

Die in der Axe der Schraubenfeder (d. h. in der Axe der ihre Mittellinie enthaltenden Cylinderfläche) ziehend wirkende Kraft Q wirkt in jedem Querschnitte mit dem Moment Qr auf Torsion und verursacht dadurch nach den Gesetzen der Elasticitätslehre* die Maximalschubspannung:

---

* Siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit", Gleichungen (230) und (243).

$$t = \frac{16}{\pi} \frac{Qr}{d^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

sowie den specifischen Torsionswinkel (in Bogenmaass ausgedrückten Torsionswinkel pro Längeneinheit des Drahtes):

$$\vartheta = \frac{32}{\pi G} \frac{Qr}{d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Streng genommen wirkt zwar die Axialkraft Q auf irgend einen Querschnitt ausser mit dem Moment Qr noch mit einer Kraft $= Q$, welche sich in eine Zugkraft längs der Tangente der Mittellinie und eine Schubkraft längs dem Querschnitte des Drahtes zerlegen lässt, doch sind diese Kraftwirkungen, von denen die der Zugkraft bei grösserer Steigung der Schraubenfeder von Belang sein könnte, hier nur von untergeordneter Bedeutung. Wäre nun eine in der Schraubenfederaxe liegende materielle Gerade mit einem Längenelemente $= ds$ der Schraubenfeder fest verbunden, so würde die Verdrehung dieses Elementes um den Winkel ϑds eine Verschiebung jener Geraden längs ihrer Richtung $= r\vartheta ds$ bewirken, und da die ganze Drahtlänge der Feder $= n \,.\, 2\pi r$ ist, ergiebt sich die resultirende Verlängerung derselben im Sinne ihrer Axe gemäss Gl. (2):

$$x = r\vartheta \,.\, n \,.\, 2\pi r = \frac{64 n}{G} \frac{Qr^3}{d^4} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Für gegebene Werthe von Q, x, t, G und einen angenommenen Durchmesser d des Stahldrahtes erhält man aus den Gleichungen (1) und (3):

$$r = \frac{\pi t}{16} \frac{d^3}{Q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$n = \frac{G}{64} \frac{x d^4}{Q} \left(\frac{16}{\pi t} \frac{Q}{d^3}\right)^3 = \frac{64 G}{\pi^3 t^3} \frac{Q^2 x}{d^5} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

z. B. für das Millimeter als Längeneinheit und das Kilogramm als Krafteinheit mit

$$t = 10, \quad G = 10000 \text{ Kgr. pro Quadratmillimeter:}$$

$$r = 1{,}96 \frac{d^3}{Q} \text{ und } n = 20{,}6 \frac{Q^2 x}{d^5} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

§. 181. Anwendungen der Federwaage.

Während die Federwaage die Bequemlichkeit des Gebrauches mit der Neigungswaage gemein hat, gestattet sie im Allgemeinen eine noch compendiösere und solche Form, dass sie zum Schutz gegen Staub und zufällige Verletzungen oder auch mit Rücksicht auf die Gefälligkeit der

Erscheinung leicht in ein Gehäuse eingeschlossen werden kann bis auf die Skala mit Zeiger und auf die Schale oder den Haken zur Aufnahme der Last. Dagegen ist ihre Zuverlässigkeit derjenigen einer Neigungswaage insofern untergeordnet, als die Temperatur einen merklichen Einfluss auf die Länge und Elasticität der Stahlfeder ausübt; diese erfordert eine öftere Controle, da sie durch längeren Gebrauch oder durch unvorsichtige übermässige Belastung dauernde Aenderungen erleiden kann. Dass der Schluss vom Gewicht auf die Masse als die mit jeder Waage eigentlich zu messende Grösse streng genommen nur mit der Annäherung hier zulässig ist, mit welcher die Beschleunigung der Schwere am Gebrauchsorte der Federwaage mit derjenigen des Herstellungsortes der Skala übereinstimmt, worauf schon im §. 165 hingewiesen wurde, kommt in den Fällen, auf welche die Benutzung von Federwaagen hauptsächlich beschränkt ist, im Vergleich mit ihren sonstigen Mängeln nicht weiter in Betracht.

Die einfachste Form einer Federwaage ist die Salter'sche Briefwaage, bestehend aus einer Schraubenfeder, welche, in einem röhrenförmigen Gehäuse vertical hängend, unten den zur Aufnahme der Briefe dienenden hakenförmigen Bügel und ausserdem einen Zeiger trägt, der, aus einem Schlitze des Gehäuses hervorragend, auf die an diesem äusserlich angebrachte geradlinige Skala weist.

Die besonders als Hauswirthschaftswaage gebräuchliche Salter'sche Federwaage enthält in ihrem runden dosenförmigen Gehäuse zwei nebeneinander hängende Schraubenfedern, die unten durch einen Anker verbunden und vermittels desselben belastet sind. Die Skala ist auf einer der beiden verticalen ebenen Bodenflächen des Gehäuses als Kreisskala angebracht, und es wird auf ihr die Verlängerung der Schraubenfedern dadurch in vergrössertem Massstabe angezeigt, dass die Axe des Zeigers ein Zahnrädchen trägt, in welches eine von dem Verbindungsanker aus zwischen den Federn sich aufwärts erstreckende Zahnstange eingreift. Die Lastschale ist entweder eine Hängeschale oder eine Oberschale, letzteren Falles mit einer im Gehäuse versteckt angebrachten Parallelführung.

Ebenso wie die Neigungswaage gemäss vorigem §. kann auch die Federwaage mit einer zusammengesetzten Hebelwaage an Stelle des Gegengewichtshebels verbunden werden. Im Falle einer Brückenwaage gilt dann auch hier die Bemerkung, dass die Brücke nicht nur näherungsweise für eine sehr kleine Configurationsänderung des Mechanismus, sondern genau parallel geführt werden muss, um vom Orte der Last auf



derselben die Wägung unabhängig zu machen. Insbesondere eignet sich auch hier der Brückenwaagentypus Fig. 198, der z. B. bei einer zusammengesetzten Federwaage von Gebr. Dopp in Berlin zur Wägung von Passagiergepäck, nur mit der Modification benutzt ist, dass die beiden die Brücke tragenden Dreieckshebel und der Querhebel OA zweiarmig statt einarmig gemacht sind, wobei nach wie vor einem Niedergange der Brücke auch ein Niedergang der Stange AB_0 entspricht. Letztere ist, durch eine hohle Säule geschützt, mit der eigentlichen Federwaage verbunden, hier insbesondere mit dem Verbindungsanker der unteren Enden von zwei gleichen neben einander hängenden Schraubenfedern.

Zu leichter Justirung einer Schraubenfeder ist eine patentirte einfache Vorrichtung von Reimann bemerkenswerth, bei welcher ihr Angriff durch eine entsprechend geformte Platte vermittelt wird, die als eine von innen in die Windungen der Schraubenfeder eingreifende Mutter längs derselben hin und her geschraubt werden kann, um so die wirksame Länge der Feder, nämlich die wirksame Zahl ihrer Windungen zu corrigiren; ihre Erhaltung ist dadurch zu sichern, dass die von jener Mutterplatte ausgehende axiale Angriffstange durch Prismenführung an der Drehung verhindert wird.

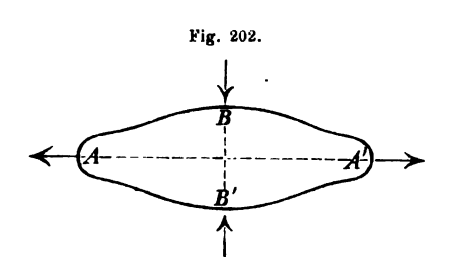
V. Instrumente zur Messung von Kräften.

Dieselben pflegen im engeren Sinne Dynamometer genannt zu werden, wenn sie zur Messung beliebiger Kräfte dienen, welche als Zugkräfte durch entsprechende Organe (Ketten, Seile etc.) oder als Druckkräfte durch feste Körper ausgeübt bezw. übertragen werden. Zur Messung des specifischen Druckes von Flüssigkeiten im weiteren Sinne des Wortes dienen sogenannte Manometer, welche als Flüssigkeits-, Ventil- oder Federmanometer unterschieden werden können, jenachdem die Messung vermittelt wird durch das Gleichgewicht des zu messenden Druckes mit dem durch ihre Schwere bedingten hydrostatischen Drucke einer gewissen tropfbaren Flüssigkeit (insbesondere Quecksilber oder Wasser), oder mit der Belastung eines Ventils, welches einseitig dem zu messenden Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist, oder mit der Elasticität eines federnden Körpers, der durch den zu messenden Druck belastet und entsprechend deformirt wird.

§. 182. Dynamometer.

Zuweilen lässt sich zur Messung einer Kraft irgend eine Waage, selbst eine Hebelwaage benutzen, indem man an ihr die fragliche Kraft ebenso wie die Schwerkraft einer zu wägenden Last mit einem Gegengewichte in Gleichgewicht bringt. Gewöhnlich aber und zwar jedenfalls dann, wenn das Instrument während der Messung in Bewegung begriffen sein muss, bedient man sich analog den Federwaagen eines elastischen Körpers, um aus dessen Deformation unter der Einwirkung fraglicher Kraft auf die Grösse derselben zu schliessen. Dabei wird, ebenso wie es bezüglich der Federwaage in den vorhergehenden Paragraphen bemerkt wurde, die Deformation entweder unmittelbar in wahrer Grösse oder vermittels eines geeigneten Mechanismus vergrössert durch einen Zeiger auf einer meistens empirisch getheilten Skala angezeigt. Mit diesem zwangläufigen Zeiger ist hier häufig ein loser, nur mit einiger Reibung beweglicher sogenannter Maximumzeiger verbunden, welcher durch jenen geschoben und an der dem Maximum der Kraft entsprechenden Stelle liegen gelassen wird, sofern dieselbe variabel ist und ausser ihrer augenblicklichen Grösse auch diejenige sichtbar gemacht werden soll, welche sie in einer gewissen Zeit höchstens erreicht hatte.

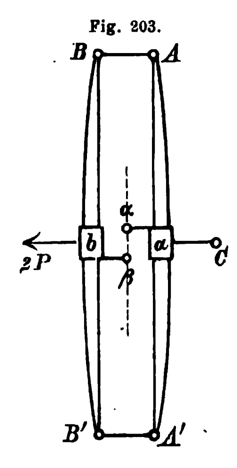
Fig. 202.



Der elastische Körper von Stahl erhält gewöhnlich die Form eines geschlossenen länglichen Ringes nach Art von Fig. 202, auf welchen man grössere zu messende Kräfte, z. B. Zugkräfte zur Fortbewegung landwirthschaftlicher Maschinen und Geräthe auf dem Felde, im Sinne der grossen Axe AA' ziehend oder kleinere Kräfte im Sinne der kleinen Axe BB' drückend wirken lässt. Im einen wie im anderen Falle wird die Verkürzung von BB', die bei gleicher Kraftgrösse im ersten Falle kleiner, als im zweiten, jedenfalls aber grösser, als die gleichzeitige Verlängerung von AA' ist, als Maass der Kraft benutzt, indem sie durch einen Hebel- oder Zahnrädermechanismus vergrössert von einem Zeiger auf einer empirisch getheilten Kreisskala angezeigt wird. Ist dasselbe Instrument für die eine und andere Kraftrichtung zugleich bestimmt, erhält es natürlich zwei verschiedene Skalen.

Die empirische Theilung der letzteren schliesst jede Theorie aus. Indessen sind ebenso, wie bei Federwaagen (§. 180), so auch bei Federdynamometern im Allgemeinen solche Formen und Belastungsweisen der Stahlfedern vorzuziehen, welche gleichförmigen und im Voraus berechenbaren Theilungen der Skalen entsprechen. Diese Forderung erfüllt das Zugdynamometer von Morin, Fig. 203, welches ausserdem eine unmittelbare Ablesung der verhältnissmässig grossen Deformation ohne vergrössernden Zwischenmechanismus gestattet. Es besteht aus zwei gleichen, unbelastet geraden Stahlstäben AA', BB', an den Enden gelenkartig durch gleiche kürzere Stangen $AB, A'B'$ verbunden und in den Mitten mit Fassungen a, b versehen, vermittels welcher der eine Stab AA' an einen festen Bolzen C angeschlossen, der andere BB' von der zu messenden Zugkraft $= 2P$ angegriffen werden kann. Diese Stahlstäbe haben rechteckige Querschnitte von constanter Breite, wogegen die Dicke (die mit der Zugkraft $2P$ parallele Rechteckseite) von der Mitte nach den Enden jedes Stabes so abnimmt, dass sein Längenprofil einerseits geradlinig, andererseits parabolisch begrenzt ist, angenähert entsprechend der Form eines Körpers von gleichem Widerstande, d. h. von gleicher Maximalspannung und Pressung in allen Querschnitten. Bezeichnet

Fig. 203.



$2l$ die Länge $AA' = BB'$, Fig. 203,

b die constante Breite jedes Stahlstabes,

h die grösste Dicke (in der Mitte),

E den Elasticitätsmodul des Stahls,

x die Durchbiegung jedes Stabes, also $2x$ die Summe ihrer Durchbiegungen unter dem Einflusse der Zugkraft $2P$, so ist:*

$$x = \frac{8\,P l^3}{E b h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Z. B. bei einem Exemplar der polytechnischen Schule in Hannover** ist:

$$l = 375^{mm}, \quad b = 40^{mm}, \quad h = 16^{mm}$$

und entspricht je einer Zugkraft $2P = 9^k$ eine Durchbiegung $2x = 1^{mm}$.

* Siehe des Verfassers „Theorie der Elasticität und Festigkeit", S. 117. Gleichung 186.

** Rühlmann's „Allgemeine Maschinenlehre", Bd. I, §. 44.

Damit ergiebt sich aus (1):

$$E = 23170^k \text{ pro Quadratmillim.}$$

Als grösste zulässige Zugkraft wird in diesem Falle angegeben:

$$2P = 400^k, \quad \text{entsprechend } 2x = \frac{400}{9} = 44{,}4^{mm}$$

und einer grössten specifischen Spannung oder Pressung:

$$k = \frac{6Pl}{bh^2} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

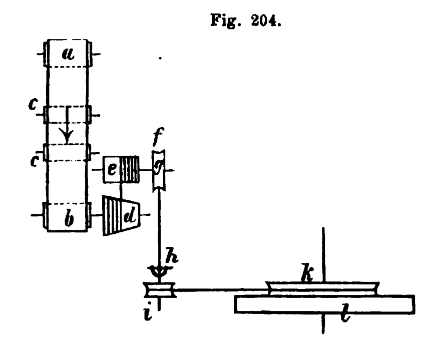
$= 44^k$ pro Quadratmillim. Sind k und E, sowie die Maximalwerthe von P und x gegeben, so sind (1) und (2) Bedingungsgleichungen, welchen die Dimensionen l, b, h der Stahlstäbe zu entsprechen haben. Bei constanter Dicke $= h$ wäre unter sonst gleichen Umständen ihre Durchbiegung nur halb so gross.

In den meisten Fällen der Anwendung solcher Dynamometer ist die zu messende Kraft $2P$ mehr oder weniger veränderlich, und kommt es dann nicht sowohl darauf an, ihren Werth in einem gewissen Augenblicke oder ihr Maximum während einer gewissen Zeit zu finden, sondern ihren Mittelwerth für eine Zeit, während welcher der Angriffspunkt der Kraft und somit das Instrument einen gewissen Weg durchläuft. Dazu dient die Verbindung des Instrumentes mit einem Registrirapparate. Bei dem Morin'schen Dynamometer z. B. sind die Fassungen a, b der Federn (Fig. 203) mit Bleistifthaltern verbunden, die an den Enden vermittels entsprechender Hülsen passend beschwerte Bleistifte α, β tragen, unter welchen in der Richtung $\alpha\beta$ oder $\beta\alpha$ parallel den Federn ein Papierstreifen fortgezogen wird. Dabei zeichnet α eine gerade Linie, β eine Curve, deren mittlere Ordinate in Bezug auf jene Gerade als Abscissenaxe dem Mittelwerthe von $2P$ nach einem bekannten Verhältnisse proportional ist. Dieser Mittelwerth ist auf die Zeit bezogen, wenn man den Papierstreifen mit constanter Geschwindigkeit sich bewegen lässt; er ist dagegen auf den Weg der Zugkraft $2P$ bezogen, wenn man diesem für jedes Zeitelement den Weg des Papierstreifens proportional macht. Im letzteren Falle ist die Fläche zwischen den Spuren der Punkte α, β und zwei Ordinaten unmittelbar ein Maass für die Arbeit der Kraft $2P$, leistet also der Kraftmesser zugleich die Funktion eines Arbeitsmessers.

Dieser letztere Fall ist besonders wichtig für die Bestimmung des Arbeitsaufwandes zur Fortbewegung landwirthschaftlicher Maschinen über

das dadurch zu bearbeitende Feld. Dabei wird das Dynamometer nebst Registrirapparat von einem Wagen getragen, der in die Zugkette der fraglichen Maschine eingeschaltet ist, und es empfängt der Papierstreifen seine Bewegung von einem der Räder dieses Wagens, etwa gemäss der durch Fig. 204 im Grundrisse angedeuteten Anordnung des erwähnten Instrumentes der polytechnischen Schule in Hannover. Hier ist

Fig. 204.



a die (mit regulirbarer Reibung um ihre Axe drehbare) Walze, von welcher der Papierstreifen sich abwickelt,

b die Walze, auf welche er aufgewickelt wird;

c, *c* sind Rollen, welche den Papierstreifen dicht ausserhalb der Bleistifte α, β (Fig. 203) unterstützen,

d ist eine auf der Welle von *b* feste, etwas conische Walze, in Umdrehung gesetzt durch eine Schnur infolge ihrer Abwicklung von *d* bei Aufwicklung auf die cylindrische Walze *e*. Die Conicität von *d* ist so bemessen, dass der Durchmesser der gerade in Abwicklung begriffenen Schnurwindung = dem Durchmesser der mit Papier umwickelten Walze *b*, dass also die Differenz der Radien von je zwei benachbarten Schnurwindungen = der Papierdicke ist.

f ist ein Schraubenrad auf der Welle von *e*,

g die zugehörige, in der Figur nicht sichtbare, weil unterhalb *f* eingreifende Schraube,

h ein in die Schraubenwelle eingeschaltetes Universalgelenk,

i eine kleine Kettenrolle auf der Fortsetzung dieser Welle,

k eine grössere Kettenrolle auf der Axe des Triebrades *l*.

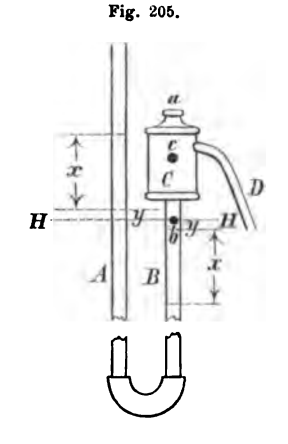
Die drei übrigen Räder des das Instrument tragenden Wagens sind Laufräder. Die correcte Wirksamkeit dieses Registrirwerkes setzt eine rein rollende Bewegung des Triebrades *l* auf dem Boden voraus; dem Uebelstande, dass es in der That freilich auf feuchten Feldern oder bei sehr unregelmässiger Oberfläche derselben zeitweilig gleiten oder gar ausser Berührung mit dem Boden kommen kann, wird durch eine rauhe Umfläche des Radkranzes und durch eine elastische regulirbare Verbindung der Radwelle mit dem passend beschwerten Wagen zu begegnen gesucht.

§. 183. Flüssigkeitsmanometer.

Sofern es sich nicht um die Messung sehr kleiner specifischer Pressungen handelt, pflegt Quecksilber als manometrische Flüssigkeit benutzt zu werden; ausser durch seine specifische Schwere empfiehlt es sich besonders durch seine geringe Verdunstung bei gewöhnlicher Temperatur. Die einfachste Form eines solchen Quecksilbermanometers ist das sogenannte Hebermanometer, bestehend aus einer U-förmigen Röhre mit vertical aufwärts gerichteten Schenkeln, bezw. zwei geraden solchen Röhren, die unten durch ein Verbindungsstück communiciren und von welchen die eine A oben offen ist, die andere B mit dem Raume communicirt, dessen specifischer Druck gemessen werden soll. Haben A und B gleiche Querschnitte, so wird, wenn die Quecksilberoberfläche in B um die Strecke x herunter gedrückt wird, dieselbe in A um ebenso viel gehoben, so dass der betreffende specifische Ueberdruck (Ueberschuss über den äusseren Druck) durch die Quecksilbersäulenhöhe $h = 2x$ gemessen wird. Die Hälfte derselben $= x$ pflegt im offenen Schenkel A an einer Skala abgelesen zu werden, entweder unmittelbar im Falle einer Röhre von Glas, oder häufiger im Falle einer eisernen (überhaupt undurchsichtigen) Röhre vermittels eines Schwimmers, der einen Draht mit oben daran befestigtem Zeiger trägt oder auch mit einer Schnur verbunden ist, welche, über eine Leitrolle geführt, am herabhängenden Ende den Zeiger trägt. Sofern eine Atmosphäre einer Quecksilbersäule von $\Delta h = 760^{mm}$ entspricht, entspricht sie auf der Skala einer Länge von

$$\Delta x = \frac{760}{2} = 380^{mm} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Fig. 205.



Uebelstände dieses Hebermanometers sind die stets nur angenähert erfüllbare Voraussetzung gleicher und gleichförmiger Weite beider Röhrenschenkel und für den Fall des zu messenden Ueberdruckes von Wasserdampf die Ansammlung condensirten Wassers über dem Quecksilber im Schenkel B. Letzterer Umstand kann durch die in Fig. 205 skizzirte Anordnung für praktische Zwecke unschädlich gemacht werden, nämlich dadurch, dass zwischen dem Rohrschenkel B und der zum Dampfraume führenden Röhre D ein Gefäss C eingeschaltet wird, welches so mit Wasser gefüllt

ist, dass dessen Niveau nur geringen Schwankungen unterliegt. Dieses Gefäss ist oben und an der Seite mit verschliessbaren Oeffnungen *a*, *c* versehen, der Rohrschenkel *B* mit einer Oeffnung *b* in der Horizontalebene *HH*, bis zu welcher bei beiderseits gleichem Drucke das Quecksilber in *A* und *B* emporreichen soll. Während das Dampfrohr *D* abgesperrt ist und die Löcher *a*, *b* geöffnet sind, wird durch *a* Quecksilber eingefüllt bis es aus *b* auszufliessen beginnt, dann *b* geschlossen, *c* geöffnet und durch *a* Wasser eingefüllt, bis es aus *c* abzufliessen beginnt, endlich *a* sowohl wie *c* geschlossen. Das Instrument ist jetzt zum Gebrauche vorgerichtet, und muss in diesem Zustande der Zeiger auf den Nullpunkt der Skala weisen.

Durch das Einfüllen von Wasser hatte sich das Quecksilber in *B* um die Strecke y gesenkt, in *A* um ebenso viel gehoben, und es ist, wenn c die Höhe der Oeffnung *c* über *HH*, also über der Oeffnung *b*, und weil die Dichtigkeit des Quecksilbers in Vergleich mit Wasser $= 13{,}6$ zu setzen ist, y bestimmt durch die Gleichung:

$$2y = \frac{y + c}{13{,}6}; \quad y = \frac{c}{2 \,.\, 13{,}6 - 1} = \frac{c}{26{,}2}.$$

Wenn nun der Dampfdruck einwirkt und das Quecksilber in *A* um die Strecke x weiter hebt, in *B* ebenso tief herunterdrückt, so sinkt zwar auch die Wasseroberfläche im Gefässe *C*, jedoch seines grösseren Querschnittes wegen verhältnissmässig wenig. Zudem findet durch Condensation von Dampf eine allmählige Vermehrung des Wassers statt, und wenn man das Dampfrohr *D* in aufsteigender Richtung dicht oberhalb *c* in das Gefäss *C* einmünden lässt, kann ohne wesentlichen Fehler angenommen werden, dass das Wasserniveau beständig in der Höhe c über *HH* bleibt. Unter dieser Voraussetzung ist die Quecksilbersäulenhöhe, welche dem Dampfdrucke Gleichgewicht hält:

$$h = 2x - \frac{x}{13{,}6} = \frac{26{,}2}{13{,}6}x = \frac{131}{68}x,$$

und einer Atmosphäre Ueberdruck entspricht die Skalenlänge:

$$\Delta x = \frac{68}{131} 760 = 394{,}5^{mm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Der andere Uebelstand des Hebermanometers, dass es gleichförmige und gleiche Querschnitte der Röhrenschenkel *A*, *B* oder wenigstens gleiche Grössen von je zwei correspondirenden Querschnitten derselben

voraussetzt, fällt fort bei dem Gefässmanometer: Fig. 206. Wenn hier F den Ueberschuss des inneren Querschnittes des Gefässes B über den äusseren Querschnitt des Rohres A, f den inneren Querschnitt des letzteren bedeutet, so entspricht einer Hebung $= x$ des Quecksilbers in A eine Senkung desselben in B um den Betrag $\frac{f}{F}x$. Die den Ueberdruck messende Quecksilbersäulenhöhe ist also

Fig. 206.

$$h = x + \frac{f}{F}x = \frac{F+f}{F}x,$$

so dass eine Atmosphäre der Skalenlänge

$$\Delta x = \frac{F}{F+f} 760^{mm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

entspricht. Die gleichförmige Theilung der Skala trotz der meistens etwas ungleichförmigen Grösse von f benachtheiligt hier die Messung um so weniger, je kleiner f in Vergleich mit F ist; auch ist es ein Vortheil, dass die grössere Quecksilbermasse weniger leicht in Schwingungen gerathen und dadurch die Ablesung unsicher machen kann. Die Ansammlung von Condensationswasser bei der Messung des Ueberdrucks von Wasserdampf ist dadurch unschädlich zu machen, dass das Gefäss B über dem Quecksilber bis zur Mündung des von B aus abfallenden Dampfrohrs D beständig mit Wasser gefüllt erhalten und dadurch nur der Nullpunkt der Skala ein für allemal etwas verschoben wird. Dagegen hat bei grossen zu messenden Pressungen das Gefässmanometer den Uebelstand, dass die Skala, die schon bei Hebermanometern sehr unbequem lang werden kann, bei ihm fast doppelt so lang ist.

Die Verkürzung der Skala in beliebigem Verhältnisse ist freilich dadurch leicht zu erreichen, dass beim Gefässmanometer der Quecksilberstand nicht in der Röhre A, sondern in dem möglichst genau cylindrisch hergestellten Gefässe B abgelesen, nämlich mit demselben ein Glasrohr verbunden wird, welches unter und über der Quecksilberoberfläche mit B communicirt. Da mit den vorigen Bedeutungen von F und f der Senkung $= y$ dieser Quecksilberoberfläche eine Erhebung in A um die Strecke $x = \frac{F}{f}y$ entspricht, ist

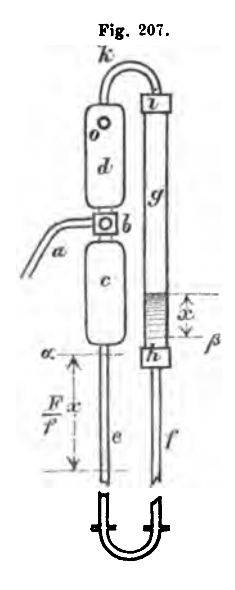
$$h = y + \frac{F}{f}y = \frac{F+f}{f}y$$

und entspricht jeder Atmosphäre die Skalenlänge:

$$\Delta y = \frac{f}{F+f} 760^{\mathrm{mm}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Gleichförmigkeit der Grössen von f und F ist jetzt wesentliches Erforderniss gleichförmiger Theilung der Skala. Die Anwendung bei Dampfkesseln wäre indessen voraussichtlich mit dem Uebelstande verbunden, dass das Glasrohr besonders da, wo die Ablesung zu geschehen hätte und wo es abwechselnd mit Quecksilber und mit Condensationswasser in Berührung käme, bald blind werden würde.

Fig. 207.



Empfehlenswerther zu solchem Zwecke, obschon weniger einfach, erscheint das Manometer von Desbordes: Fig. 207 mit der Verbesserung von Schäffer & Budenberg, etwa herausgeschleudertes Quecksilber leicht und ohne Verlust in die Messröhre zurückbringen zu können. Hier ist

a das vom Kessel kommende Dampfrohr,

b ein Verbindungsstutzen zwischen zwei gusseisernen Flaschen c, d mit einem Hahn von solcher Bohrung, dass dadurch entweder zwischen a und c oder zwischen d und c die Communication hergestellt werden kann, während jedesmal der dritte Theil von den zwei verbundenen abgesperrt ist;

e und f sind schmiedeiserne Röhren, unten durch ein Verbindungsstück zusammenhängend,

g ist ein Glasrohr von grösserer Weite, als e und f, zwischen den Fassungen h, i befestigt,

k ein Verbindungsrohr zwischen g und d,

o eine Oeffnung, durch welche die Flasche d und somit der obere Theil der Glasröhre g mit der äusseren Luft communicirt.

Gewöhnlich communicirt das Dampfrohr a mit der Flasche c, welche bis oben bei b mit Wasser gefüllt wird, so dass bei beiderseits gleichem Drucke das Quecksilber in e bis zu solchem Niveau α, in g bis zu solchem Niveau β reicht, dass die Höhen von b und β über α sich wie 13,6 : 1 verhalten; das Niveau β entspricht dann dem Nullpunkte der Skala. Würde das Quecksilber durch einen Zufall (durch plötzliche Zulassung des Kesseldampfes) aus g herausgeschleudert, so würde es sich in d sammeln und könnte bei entsprechender Stellung des Hahns b durch c hindurch nach e zurückfliessen.

Was die Theilung der Skala betrifft, so ist zu bedenken, dass, wenn F und f beziehungsweise die Querschnitte der Röhren g und e sind, die Hebung $= x$ des Quecksilbers in g über das Niveau β von einer Senkung desselben $= \frac{F}{f} x$ in e unter das Niveau α begleitet wird, ohne in Betracht kommende Senkung der Wasseroberfläche in der Flasche c, sofern diese das Rohr e erheblich an Weite übertrifft und weil auch bei frei werdendem Raume in c allmählig neues Condensationswasser darin sich ansammelt. Indem aber die Summe $= x + \frac{F}{f} x$ jener Quecksilbersäulen zum Theil von der im Rohre e hinzugekommenen Wassersäule von der Höhe $\frac{F}{f} x$, die einer Quecksilbersäule von der Höhe $\frac{1}{13,6} \frac{F}{f} x$ äquivalent ist, getragen wird, ist die den Dampfüberdruck messende Quecksilbersäulenhöhe in der That nur:

$$h = x + \frac{F}{f} x \left(1 - \frac{1}{13,6}\right) = \left(1 + \frac{63}{68} \frac{F}{f}\right) x.$$

Einer Atmosphäre entspricht also die Skalenlänge:

$$\Delta x = \frac{760}{1 + \frac{63}{68} \frac{F}{f}} \text{ Millim.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Im Falle $F = f$ wäre dieses Manometer mit dem durch Fig. 205 dargestellten identisch; in der That ist dann nach Gl. (5):

$$\Delta x = \frac{68}{131} 760 = 394,5^{mm}$$

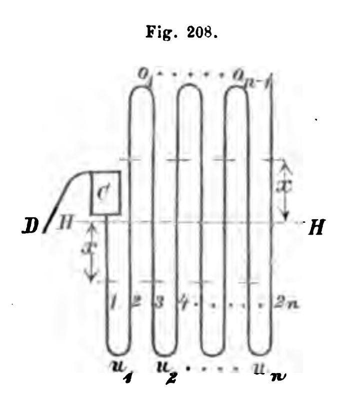
übereinstimmend mit Gl. (2). Wäre aber z. B. $\frac{F}{f} = 5$, so würde $\Delta x = 135^{mm}$, so dass, um 6 Atm. Ueberdruck zu umfassen, die Skala und die Glasröhre g nur etwa die Länge eines Barometerrohres $= 6 \,.\, 135 = 810^{mm}$ zu erhalten brauchten. —

Wenn nun aber auch der Skala in jedem Falle eine passende Länge gegeben werden kann, so bleibt doch bei allen bisher besprochenen Instrumenten, falls sie zur Messung grosser specifischer Pressungen bestimmt sind, ihre beträchtliche Länge und somit die Höhe des zu ihrer Aufstellung nöthigen Raumes ein misslicher Umstand, abgesehen von der Kostspieligkeit der in den langen Röhren befindlichen Quecksilbermasse. Z. B. bei obiger Ausführung des Manometers von Desbordes (Fig. 207)

mit einer 6 Atmosphären umfassenden Skala von 810 Millim. Länge müssten die Röhren e und f je $5 . 810$ Millim. $= 4{,}05$ Mtr. lang sein.

Den Zweck einer möglichst compendiösen Form erfüllt das sogenannte Differenzialmanometer oder besser Divisionsmanometer. indem dabei die manometrische Quecksilbersäule in neben einander liegende Theile getheilt, der Umstand dagegen nur von untergeordneter Bedeutung ist, dass es eigentlich nicht nur Quecksilbersäulen, sondern Differenzen von Quecksilber- und Wassersäulen sind, deren Gesammtheit als Maass des betreffenden specifischen Ueberdruckes erscheint. Dieses Manometer besteht in der mit einfachen Linien durch Fig. 208 angedeuteten Art aus einer geraden Zahl $= 2n$ von neben einander befindlichen, gleich weiten eisernen Röhren, die oben und unten durch Verbindungsstücke $o_1 \ldots o_{n-1}$, bezw. u_1, $u_2 \ldots u_{2n}$ communiciren. Um es zum Gebrauche herzurichten, wird durch verschliessbare Oeffnungen bei $o_1 \ldots o_{n-1}$ Quecksilber eingefüllt, bis dasselbe aus kleinen Löchern der Röhren im Niveau HH auszufliessen beginnt, alsdann nach Verschluss dieser Löcher Wasser nachgefüllt bis die verbliebenen Räume der 2ten bis $(2n-1)^{ten}$ Röhre ganz damit angefüllt sind; endlich werden die Füllöffnungen geschlossen. Durch das Einfüllen des Wassers wurde, sobald es die Röhren ganz anfüllte, das Gleichgewicht des Quecksilbers nicht gestört; wenn aber letzteres jetzt durch den zu messenden Ueberdruck in der ersten Röhre um die Strecke x unter HH herabgedrückt wird, so muss es wegen des continuirlichen Zusammenhanges der Flüssigkeit auch in der 3ten, $5^{ten} \ldots (2n-1)^{ten}$ Röhre um x gesenkt, in der 2ten, $4^{ten} \ldots 2n^{ten}$ Röhre aber um x gehoben werden, und ist dann die den Ueberdruck messende Quecksilbersäule:

Fig. 208.



$$h = (n-1) . 2x\left(1 - \frac{1}{13{,}6}\right) + 2x$$

$$= \left[\frac{63}{68}(n-1) + 1\right] 2x = \frac{63n+5}{34} x .$$

Die Länge x wird angezeigt auf einer Skala durch einen Zeiger, der mit einem Schwimmer im $2n^{ten}$ Rohre verbunden ist.

Wenn zur Messung des Druckes von Wasserdampf, um die Ansammlung von Condensationswasser unschädlich zu machen, die erste Röhre wieder oben mit einem weiteren Gefässe C versehen und dieses bis zur Einmündungsstelle des Dampfrohres D mit Wasser angefüllt erhalten wird, so wird durch die von dieser Stelle bis zum Niveau HH reichende Wassersäule nur der (empirisch zu bestimmende) Anfangspunkt der Skala etwas hinaufgerückt, dagegen kommt wegen der unterhalb HH im ersten Rohre befindlichen Wassersäule $= x$ im Ausdrucke von h das Glied

$$-\frac{1}{13,6}x = -\frac{5}{68}x = -\frac{2,5}{34}x$$

hinzu, wird also

$$h = \frac{63n + 2,5}{34}x.$$

Im einen oder andern Falle ist folglich die einer Atmosphäre entsprechende Skalenlänge:

$$\Delta x = \frac{34 \cdot 760}{63n + 5} \text{ bezw. } = \frac{34 \cdot 760}{63n + 2,5} \text{ Millim. } \quad \ldots\ldots (6)$$

z. B. für $n =$ 2 3 4 5

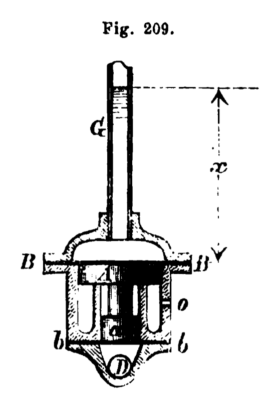
$$\Delta x = \left\{\begin{matrix} 197,2 & 133,2 & 100,5 & 80,8 \\ 201,1 & 135,0 & 101,6 & 81,4 \end{matrix}\right\} \text{Millim.}$$

Uebrigens hat dieses Instrument eine weite Verbreitung nicht gefunden; seine vielen Verbindungen und verschliessbaren Oeffnungen erschweren und vertheuern die Herstellung und geben zu Undichtigkeiten Anlass. Auch ist die compendiösere Form nicht mit Verkleinerung der ganzen Rohrlänge und der zur Füllung nöthigen Quecksilbermasse verbunden.

Mit Vermeidung dieser Mängel ist das vorgesetzte Ziel auch dadurch erstrebt worden, dass ein grösserer und ein kleinerer Kolben, beide in coaxialen Hohlcylindern anschliessend beweglich, unter sich fest verbunden sind, und dass der kleinere Kolben durch den zu messenden specifischen Druck, der grössere durch die demselben Gleichgewicht haltende Quecksilbersäule belastet wird, welche dann im Verhältnisse der grösseren zur kleineren Kolbenfläche kleiner ist, als sie bei dem gewöhnlichen Quecksilbermanometer sein müsste. Zur Vermeidung der Reibung, welche bei ganz dichtem Anschlusse der Kolben in den Hohlcylindern sich störend geltend machen würde, sind von Galy-Cazalat (1846) leicht biegsame

Kautschukmembranen empfohlen worden, die den Doppelkolben berührend zwischen sich fassen und so die Dichtung bewirken. Fig. 209 zeigt dieses Manometer nach einer Ausführung von C. Kayser;* A und a sind die fest verbundenen Kolben zwischen den Kautschukmembranen BB und bb, D ist die Mündung des Rohrs, welches nach dem Dampfraum oder überhaupt nach dem Raum führt, in welchem der zu messende specifische Druck stattfindet, G das verticale Glasrohr, in welches sich das im Gehäuse über BB befindliche Quecksilber hinauf erstreckt.

Fig. 209.



Auf a wirkt von unten vermittels der Membran bb der zu messende Druck $= n$ Atm. Ueberdruck, auf A von oben vermittels der Membran BB die Quecksilbersäule $= x$ Millim. Der äussere Druck kommt, weil von allen Seiten wirkend, nicht in Betracht, sofern er durch Vermittlung der kleinen Oeffnung o auch im Inneren des Gehäuses zwischen BB und bb stattfindet. Sind also F und f die Flächen der Kolben A und a in Quadratmillimetern, und ist K Gramm das Gewicht des Doppelkolbens, p Gramm der Atmosphärendruck pro Quadratmillimeter, so ist der Gleichgewichtszustand des frei spielenden (auf dem ringförmigen Stege im Inneren des Gehäuses nicht aufliegenden) Doppelkolbens abgesehen vom Biegungswiderstande der Membranen bestimmt durch die Gleichung:

$$fnp = K + F\frac{x}{760}p$$

$$x = 760\,n\frac{f}{F} - \frac{760\,K}{Fp}.$$

$$\Delta n = 1 \text{ entspricht } \Delta x = 760\frac{f}{F}\text{Millim.} \quad \ldots\ldots (7.$$

Der Nullpunkt der Skala, welcher um $\frac{760\,K}{Fp}$ Millimeter unter BB liegen muss, ist dadurch zu bestimmen, dass für einen bekannten Werth von n der betreffende Theilstrich der Skala zur Coincidenz mit der Quecksilberkuppe in G gebracht wird.

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1859, S. 170.

Für Pressungen, die nur wenig höher sind, als der Atmosphärendruck, kann das Instrument nicht gebraucht werden; denn der Kolben A erhebt sich erst dann von seinem Sitz, biegt die Membran und treibt das verdrängte Quecksilber in G empor, wenn n grösser wird, als diejenige Atmosphärenzahl, mit deren entsprechendem Theilstriche bei aufliegendem Kolben A die Quecksilberkuppe an der Skala zusammenfällt. Soll also das Instrument überhaupt nur für höhere Drucke in einem gegebenen Falle gebraucht werden, so kann man durch entsprechendes Zufüllen von Quecksilber machen, dass erst bei etwas kleinerem, als dem kleinsten zu messenden Druck der Kolben und die Quecksilberkuppe sich zu heben anfangen, und man erreicht dadurch den Vortheil, dass die Membranen stets nur sehr wenig gebogen sind, dass also der dazu erforderliche, bei obiger Rechnung vernachlässigte Druckaufwand sehr gering ist. Streng genommen wird nämlich, weil der Widerstand der Membranen einem Theile des in D herrschenden Druckes Gleichgewicht hält, x etwas zu klein gefunden, ein Fehler, welcher indessen zum Theil dadurch compensirt wird, dass eigentlich die Skala mit dem aufsteigenden Kolben ebenso viel in die Höhe gerückt werden sollte, dass also, weil dies thatsächlich nicht geschieht, dadurch x umgekehrt zu gross abgelesen wird.

Sind z. B. die Durchmesser von A, a, G

bezw. $= 32$, 8, 4 Millim.,

so wird $\Delta x = \frac{760}{16} = 47{,}5$ Millim., und wenn man die Quecksilbermenge so justirt, dass erst bei n_0 Atm. Ueberdruck im Rohre D das freie Spiel des Doppelkolbens beginnt (zugleich die Skala so feststellt, dass in diesem Augenblicke ihr betreffender Theilstrich n_0 mit der Quecksilberkuppe in gleicher Höhe liegt), so ist bei einer Atmosphäre mehr die Erhebung des Kolbens nur

$$= \frac{1}{64} \Delta x = \frac{47{,}5}{64} \text{ nahe } = \frac{3}{4} \text{ Millim.},$$

so dass das Instrument für $n = n_0$ bis $n = n_0 + 4$ Atm. Ueberdruck gebraucht werden könnte ohne höhere Erhebung des Doppelkolbens, als um den kleinen Betrag von 3^{mm}, während die benutzte Länge der Skala $= 4 . 47{,}5 = 190^{mm}$ wäre.

Obschon dieses Manometer mit gutem Erfolge mehrfach ausgeführt worden ist, hat es doch auch allgemeineren Eingang nicht gefunden,

hauptsächlich wohl aus Furcht vor ungenügender Dauerhaftigkeit der Kautschukmembranen. —

Handelt es sich um die Messung sehr kleiner specifischer Druckdifferenzen, so hat man mit der entgegengesetzten Schwierigkeit zu kämpfen, dass die Skala zu kurz werden kann, als dass sie eine hinlänglich genaue Ablesung so kleiner Abstufungen gestattete. Als Hülfsmittel für diesen Fall sind hervorzuheben: die Anwendung mechanischer Vorrichtungen behufs Verfeinerung der Ablesung, die Benutzung leichterer manometrischer Flüssigkeiten, die umgekehrte Anwendung des dem Divisionsmanometer (Fig. 209) zu Grunde liegenden Princips, und die Neigung der Messröhre gegen den Horizont.

Als ein Hülfsmittel der erstgenannten Art kann insbesondere eine zugespitzte Schraube von kleiner Ganghöhe dienen, welche von oben her allmählig bis zur Berührung ihrer Spitze mit der Flüssigkeitsoberfläche vorgeschraubt wird, um so die Höhenlage dieser Oberfläche bis auf kleine Bruchtheile der Ganghöhe (erkennbar aus den Drehungswinkeln der Schraube) bestimmen zu können. Indessen sind solche Einrichtungen weniger zu praktischen, als zu wissenschaftlichen Beobachtungszwecken geeignet.

Allgemein ist die Benutzung einer leichteren manometrischen Flüssigkeit, als Quecksilber, zu den hier in Rede stehenden Zwecken, insbesondere von Wasser (eventuell gefärbt zu besserer Sichtbarkeit), Alkohol, Petroleum, Benzol etc., und zwar mit directer Ablesung des Flüssigkeitsstandes in einer graduirten oder auf einer Skala befestigten Glasröhre. Ist eine grosse Genauigkeit nicht erforderlich, wie z. B. zur Bestimmung des Ueberdruckes von Leuchtgas an irgend einer Stelle seiner Leitung, so ist das einfachste Hebermanometer ausreichend und gebräuchlich. Eine Vergrösserung der Skala gestattet indessen das Gefässmanometer und zwar eine Verdoppelung, wenn das Gefäss (die weitere der beiden communicirenden Röhren) so weit gemacht wird, dass von der darin stattfindenden Aenderung des Flüssigkeitsniveaus abgesehen werden kann; die Rücksicht auf das Gewicht und den Preis der manometrischen Flüssigkeit kommt bei solcher Querschnittsvergrösserung hier weniger hinderlich in Betracht, als bei Quecksilbermanometern.

Ein Multiplicationsmanometer, entsprechend der Umkehrung des dem Divisionsmanometer, Fig. 209, zu Grunde liegenden Princips, kann am einfachsten so hergestellt werden, dass zwei weite vertical stehende cylindrische Röhren A, B, deren Querschnitte $= F$ seien, unterhalb durch ein enges Rohr C vom Querschnitte f communiciren,

während sie entweder zwei verschiedene sich nicht mischende Flüssigkeiten enthalten, die innerhalb C sichtbar sich berühren, oder auch gleiche Flüssigkeiten, die nur innerhalb C durch einen kurzen Faden einer anderen, mit jener nicht mischbaren Flüssigkeit, z. B. durch einen Quecksilberfaden getrennt sind. Jede Aenderung des Flüssigkeitsniveaus in A und B hat dann eine im Verhältnisse $F:f$ grössere Verschiebung der Trennungsfläche bezw. des trennenden Flüssigkeitsfadens in C zur Folge. Ein Uebelstand ist hier namentlich der Einfluss geringfügiger Unreinigkeiten der engen Röhre C, wodurch die Adhäsion der Flüssigkeiten, ihre Mischung und die Verwischung der Trennungsfläche, die Vermehrung des Bewegungswiderstandes bewirkt und überhaupt die Function des Apparates gestört werden kann.

Besser bewährt ist die Neigung der Messröhre gegen den Horizont, z. B. bei dem Zugmesser von Scheurer-Kestner zur Bestimmung der Druckdifferenz innerhalb und ausserhalb eines Schornsteins. Bei einer von Herrn Tomson in Stolberg angegebenen und ausgeführten Construction dieses Zugmessers* hat das Gefäss eine flach-cylindrische Dosenform und kann in der Mitte seines Deckels durch einen Zweiweghahn mit dem Inneren des Schornsteins oder mit der äusseren Luft in Verbindung gebracht werden. Die mit der Theilung versehene Glasröhre als engerer Schenkel communicirt mit dem Gefässe durch eine unter demselben befindliche hohle Axe, um welche die Röhre mit geeigneter Metallfassung drehbar ist; ihr Neigungswinkel α gegen den Horizont wird durch eine Libelle geregelt, deren Lage gegen die Glasröhre durch eine Stellschraube regulirt werden kann. Als manometrische Flüssigkeit wird Alkohol oder Petroleum verwendet. Zu deutlicher Ablesung des Flüssigkeitsstandes in der schwach geneigten Glasröhre muss diese sehr eng sein, und ist dann wegen der viel grösseren Weite des Gefässes eine Druckdifferenz, welche eine Verkürzung oder Verlängerung $= x$ der Flüssigkeitssäule in der Röhre bewirkt, ohne weitere Correction durch $x \sin \alpha$ als Höhe dieser Säule zu messen.

§. 184. Ventilmanometer.

Der Messung grösserer hydrostatischer Pressungen durch die im vorigen §. besprochenen Flüssigkeitsmanometer ist meistens ihre allzu grosse Höhe hinderlich, und wenn auch dieser Uebelstand durch besondere

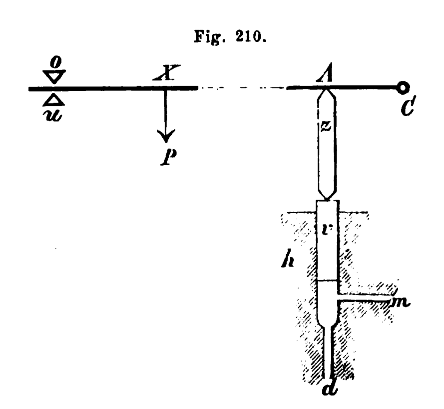
* Wochenschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1880, S. 406.



Einrichtungen nach Art der durch die Figuren 208 und 209 angedeuteten Divisionsmanometer vermieden werden kann, so versagen doch selbst diese Hülfsmittel, abgesehen von ihren bereits besprochenen Unvollkommenheiten, vollständig dann, wenn es sich um sehr grosse Pressungen handelt, welche, wie z. B. bei hydraulischen Pressen, mehrere hundert Atmosphären betragen können. In solchen Fällen ist man besonders für den praktischen Gebrauch fast ausschliesslich auf die im folgenden Paragraph zu besprechenden Federmanometer angewiesen, die auch für Drucke von mittlerer Grösse, wie sie z. B. in Dampfkesseln vorkommen, weitaus am compendiösesten, bequemsten und am meisten gebräuchlich sind. Indem dieselben aber im Allgemeinen empirisch durch Vergleichung mit anderen Manometern zu theilende Skalen erhalten müssen, entsteht das Bedürfniss geeigneter solcher für alle Fälle brauchbarer Normalmanometer, welche, da Flüssigkeitsmanometer selbst hierzu nur bei Pressungen von mässiger Grösse mit Vortheil anwendbar sind und Federmanometer höchstens als Controlmanometer zu gelegentlicher Prüfung von Gebrauchsmanometern auf ihre noch ausreichende Richtigkeit genügende Zuverlässigkeit besitzen, am besten als Ventilmanometer hergestellt werden.

Ein gewöhnliches Ventil nach Art eines Sicherheitsventils ist hierzu deshalb nicht brauchbar, weil im geschlossenen Zustande desselben der hydrostatische Druck an der Sitzfläche, im gehobenen Zustande die Beziehung zwischen dem hydraulischen Drucke an den verschiedenen Stellen der ganzen Ventilfläche und dem hydrostatischen Drucke im Inneren des betreffenden Flüssigkeitsbehälters zu grosse Unsicherheit darbietet. Geeignet zu diesem Zwecke erscheint vielmehr nur ein längerer Vollcylinder v, Fig. 210, welcher, in ein hohlcylindrisches Gehäuse h passend, dadurch im Gleichgewicht erhalten wird, dass dem Flüssigkeitsdrucke auf seine Unterfläche ein bekannter Druck auf seine obere Fläche entgegen wirkt. Wenn letzterer durch einen Hebel ausgeübt wird, welcher um die (als Keilschneide auszuführende) horizontale Axe C drehbar ist und mit dem unveränderlichen Hebelarme $CA = a$ den Ventilcylinder vom Quer-

Fig. 210.



schnitte F axial drückt, während er selbst bei abbalancirtem Eigengewichte an dem veränderlichen Hebelarme $CX = x$ durch ein Laufgewicht P belastet ist, so ergiebt sich der specifische Druck auf die Unterfläche von v, bezw. in dem Gehäuse h:

$$p = \frac{Px}{Fa}.$$

Um dann den Theilstrich der Skala eines Manometers zu markiren, der dem specifischen Drucke p entspricht, braucht nur das Laufgewicht in der dieser Gleichung entsprechenden Entfernung x von C aufgehängt, das zu prüfende Manometer mit der vom Gehäuse h auslaufenden Röhre m in Verbindung gebracht und durch das Rohr d vermittels einer Druckpumpe so lange eine tropfbare Flüssigkeit (Wasser) eingepresst zu werden, bis der Belastungshebel zwischen den Anschlägen o und u frei spielt.

Eine Fehlerquelle, auf deren Vermeidung es hierbei vor Allem ankommt, ist die Reibung an der Umfläche des Ventilcylinders, die unvermeidlich wäre, wenn der Cylinder ganz dicht anschlösse. Ein gewisser, wenn auch noch so kleiner Spielraum ist also unerlässlich, somit auch das Entweichen einer gewissen Wassermenge beim Gebrauch des Instrumentes. Hierdurch hauptsächlich wird dieser Gebrauch auf die Herstellung der Skala oder auf die Controle der vorhandenen Skala eines anderen, zu praktischem Gebrauche bestimmten Manometers beschränkt. Andrerseits darf dieser Spielraum und somit die Geschwindigkeit des ihm zufliessenden Wassers nicht so gross sein, dass dadurch die sichere Führung des Vollcylinders v im Hohlcylinder h verloren geht und die Differenz zwischen dem hydraulischen Drucke auf die Unterfläche von v und dem hydrostatischen Drucke, der unter übrigens gleichen Umständen bei dicht anschliessendem Cylinder stattfände, von merklicher Grösse wird. Bei einem solchen Ventilmanometer von Georges Marié* ist der Ventilcylinder so bearbeitet und eingepasst, dass er bei einem inneren Ueberdrucke von 200 Atm. nur 1 Cubikcentimeter Wasser pro Secunde entweichen lässt.

Zu thunlichster Vermeidung von Reibung am Ventilcylinder ist es ferner erforderlich, denselben aus einem Metall herzustellen, welches hart, politurfähig und kaum oxydirbar ist, ihm ein nur sehr kleines Spiel in axialer Richtung zu gestatten und den Druck des Belastungshebels beständig möglichst genau in der Axe wirken zu lassen; selbstverständlich ist die Vermeidung aller Verunreinigungen des Wassers durch Staub und

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1881, S. 721.



sonstige feste Theile. Bei dem erwähnten Instrument von **Georges Marié** ist der Ventilcylinder aus einer Legirung von 10% Aluminium und 90% Kupfer hergestellt, und hat der Belastungshebel zwischen den Anschlägen *o*, *u* nur ein Spiel von 2^{mm}, entsprechend $0{,}2^{mm}$ Spielraum des Angriffspunktes *A*. Um dann die Richtung des Druckes gegen den Ventilcylinder noch mehr unveränderlich axial zu erhalten, wird er nicht unmittelbar, sondern vermittels eines beiderseits zugespitzten Zwischengliedes *z* ausgeübt; dasselbe wird dadurch in sicherer Berührung einerseits mit dem Belastungshebel, andrerseits mit dem Ventilcylinder erhalten, dass letzterer am obern Ende mit einem Querstück verbunden und durch dieses mit zwei das Zwischenglied *z* zwischen sich fassenden Spiralfedern am Belastungshebel aufgehängt ist.

Trotz aller Vorsicht können die störenden Einflüsse natürlich nicht vollständig vermieden werden, wie z. B. der Messungsfehler von F und die Reibung des Wassers, welches durch den engen ringförmigen Canal zwischen v und dem Hohlcylinder h mit einer Geschwindigkeit entweicht, die nahe proportional $\sqrt{p}$ ist. Die Unsicherheit des gemessenen Werthes von p, welche der Gesammtheit solcher übrig bleibenden Fehler entspricht, wird auf $^3/_4$% des wahren Werthes von p geschätzt.

§. 185. Federmanometer.

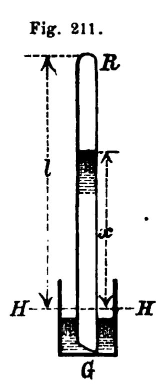
Die zu praktischen Zwecken vorzugsweise benutzten Federmanometer haben zwar insofern nicht dieselbe Zuverlässigkeit wie gute Flüssigkeitsmanometer, als der elastische Körper, dessen Federkraft mit dem zu messenden hydrostatischen Druck in Gleichgewicht gesetzt wird, um aus seiner entsprechenden Deformation auf die Grösse dieses Druckes zu schliessen, aus verschiedenen Ursachen theils bleibenden, theils vorübergehenden Aenderungen, letzteren besonders in Folge wechselnder Temperatur unterworfen sein kann, welche irrthümlich als elastische Deformationen erscheinen. Indessen sind sie bei guter Ausführung und öfterer Controle doch völlig genügend, häufig auch kaum entbehrlich, besonders zur Messung sehr hoher und solcher Drucke, welche in bewegten Gefässen, z. B. in Locomotiv- und Schiffsdampfkesseln, stattfinden.

Als einen Körper von sehr grosser und vollkommener Elasticität lag es vor Allem nahe, atmosphärische Luft zu dem hier in Rede stehenden Zwecke zu benutzen. Dieselbe ist bei der einfachsten Form



eines solchen Luftmanometers, Fig. 211, in einer verticalen cylindrischen, oben geschlossenen Glasröhre R abgesperrt, welche mit ihrem offenen unteren Ende in das Quecksilber eines cylindrischen Gefässes G hineinreicht, und zwar so tief, dass das Quecksilber innen und aussen gleich hoch steht, wenn der äussere Druck an seiner Oberfläche = dem durch eine Quecksilbersäule von b Millimeter Höhe gemessenen normalen Atmosphärendrucke ist. In diesem Zustande sei HH das Quecksilberniveau und die von ihm aus gemessene Länge der Luftsäule $= l$ Millimeter. Ist dann f der innere Querschnitt von R, F der Ueberschuss des inneren Querschnittes von G über den äusseren Querschnitt von R, so hat ein äusserer Ueberdruck von n Atmosphären, entsprechend nb Millim. Quecksilbersäulenhöhe, eine Erhebung des Quecksilbers in R über HH von x Millim., begleitet von einer Senkung in G unter HH um $\frac{f}{F}x$ Millim. zur Folge, gemäss der Gleichung:

Fig. 211.



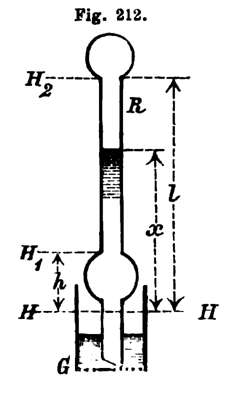
$$(n+1)b = \frac{l}{l-x}b + \left(1+\frac{f}{F}\right)x,$$

vorausgesetzt, dass die Temperatur der abgesperrten Luft unverändert geblieben ist. Daraus folgt:

$$n+1 = \frac{l}{l-x} + \frac{F+f}{F}\frac{x}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Um den Uebelstand zu vermindern, dass die Aenderungen von x, welche gegebenen Aenderungen von n entsprechen, bei grossen Werthen von n allzu klein werden können, falls nicht l übermässig gross gemacht wird, kann man die Glasröhre unten und oben mit Erweiterungen versehen und diese nebst der Röhrenlänge so bemessen, dass sich vom kleinsten bis zum grössten Ueberdrucke, bezw. $= n_1$ und n_2 Atmosphären, zu dessen Messung das Instrument bestimmt ist, die Quecksilberoberfläche in R zwischen den Erweiterungen vom Niveau H_1 bis zum Niveau H_2, Fig. 212, bewegt. Haben dann wieder F und f die früheren Bedeutungen und ist HH das Quecksilberniveau innen und aussen für $n = 0$,

Fig. 212.



h die Höhe von H_1, l die Höhe von H_2 über HH,
$(h + l_1)f$ der innere Röhrenraum von HH bis H_1,
$(l + l_1 + l_2)f$ der ganze innere Röhrenraum über HH,
so ist die Erhebung des Quecksilbers in R über HH, welche einem äusseren Ueberdrucke $= n$ Atmosphären entspricht, bestimmt durch die Gleichung:

$$(n + 1)b = \frac{l + l_1 + l_2}{l - x + l_2}b + x + \frac{(l_1 + x)f}{F}$$

$$n + 1 = \frac{l + l_1 + l_2}{l - x + l_2} + \frac{f}{F}\frac{l_1}{b} + \frac{F + f}{F}\frac{x}{b} \quad \ldots\ldots (2).$$

Indem dieser Gleichung, welche für $l_1 = l_2 = 0$ mit Gl. (1) übereinstimmt, die zusammengehörigen Werthe

$$n = n_1, \quad x = h \text{ und } n = n_2, \quad x = l$$

entsprechen müssen, sind dadurch zwei der Grössen h, l, l_1, l_2 bestimmt, wenn ausser F und f die zwei anderen gegeben sind, bezw. passend angenommen werden. Durch Differentiation folgt aus ihr:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{l + l_1 + l_2}{(l - x + l_2)^2} + \frac{F + f}{F}\frac{1}{b}$$

und ist daraus ersichtlich, dass das Maximum von $\frac{dn}{dx}$, nämlich mit $x = l$:

$$max\frac{dn}{dx} = \frac{l + l_1 + l_2}{l_2^2} + \frac{F + f}{F}\frac{1}{b}$$

um so kleiner, also das Minimum von $\frac{dx}{dn}$ um so grösser ist, je grösser l_2. Dass die Vergrösserung von l_1 die Zulässigkeit der Verkleinerung von l und somit der ganzen Höhe des Instrumentes zur Folge hat, ist ohne Weiteres einleuchtend.

Abgesehen davon, dass durch die Benutzung von Quecksilber zur Absperrung der Luft diesen Luftmanometern ähnliche Beschränkungen des Gebrauches auferlegt werden, wie Flüssigkeitsmanometern, ist besonders der störende Einfluss der Temperatur bei ihnen sehr erheblich, und wenn auch derselbe durch rechnungsmässige Correctur des beobachteten Quecksilberstandes x, Fig. 211 und Fig. 212, berücksichtigt werden kann, so wird doch dadurch die Leichtigkeit der praktischen Benutzung erheblich vermindert. Auch scheint die Oxydation des Quecksilbers und damit die Aenderung der abgesperrten Luftmenge, die Aenderung der Capillarität und die Erblindung des Glases durch Verdichtung der Luft beför-

dert zu werden. Aus diesen Gründen sind dergleichen Luftmanometer fast ganz ausser Gebrauch gekommen und durch Metallmanometer ersetzt worden.

Bei denselben ist der elastische Körper ein dünnes Metallblech, meistens Stahlblech, in Platten- oder Röhrenform, und pflegt die Deformation desselben unter dem Einflusse des an der einen Wandfläche stattfindenden Ueberdruckes vergrössert auf eine Zeigerspitze übertragen zu werden, die auf einer Kreisskala spielt. Als vergrössernder Uebertragungsmechanismus kann am einfachsten (nach einem Patent von J. D. Möller) eine steilgängige Schraube von so kleinem Durchmesser benutzt werden, dass eine geringe Axialverschiebung derselben eine beträchtliche Drehung der mit dem Zeiger verbundenen unverschieblichen Mutter zur Folge hat. Ueblicher ist ein Schubkurbelmechanismus, von welchem ein um eine feste Axe drehbares Glied einen Zahnbogen trägt, der in ein kleines Zahnrad auf der Zeigerwelle eingreift. Dadurch, dass der Zeiger (nach einem Patent von L. Burmeister) geschlitzt und durch den Schlitz mit seiner Welle prismatisch gepaart, nämlich rechtwinklig gegen dieselbe beweglich gemacht ist, kann seine Spitze auch längs einer spiralförmigen Skala mit mehreren Windungen geführt werden zu beliebiger Vergrösserung der Skalenlänge bei mässiger Grösse des betreffenden Zifferblattes. Zur Vermeidung von todtem Gange ist es dabei in allen Fällen rathsam, die Bewegung des Zeigers nur im einen Sinne durch das manometrische Metallblech, im anderen durch eine die Kraftschlüssigkeit des Mechanismus vermittelnde Hülfsfeder (Spiralfeder) zu bewirken.

Besonders verbreitet sind die Metallmanometer von Schäffer & Budenberg, sowie von Bourdon. Bei ersteren ist das manometrische Metallblech eine kreisförmige dünne Stahlscheibe, nach concentrischen Wellen gebogen und zwischen den Flantschen eines flachen Gehäuses als Scheidewand der beiden Theile dieses Gehäuses festgeklemmt. An der Seite, wo die Stahlplatte mit dem Dampf oder der sonstigen Flüssigkeit, deren Druck zu messen ist, in Berührung kommt, ist sie zum Schutz gegen Oxydation verzinnt oder versilbert; auf der andern Seite ist in der Mitte ein kleines Metallstück aufgelöthet, von welchem aus die Durchbiegung der Platte vergrössert auf die Zeigerspitze übertragen wird.

Die Bourdon'schen Federmanometer beruhen darauf, dass, wenn eine elastische Röhre von ovalem Querschnitte und so gekrümmter Mittellinie, dass die Krümmungsebene die kleinen Axen der ovalen Querschnitte enthält, einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt wird, die Quer-

schnitte weniger oval werden und die Krümmung der Mittellinie abnimmt. Erstere Wirkung ist ohne Weiteres einleuchtend, da für jedes Längenelement der Röhre der Gesammtdruck im Sinne der kleinen Axe grösser, als im Sinne der grossen Axe ist, jene also vergrössert und diese verkleinert wird. Bliebe dabei die Mittellinie der Röhre unverändert, so müsste in Folge der Vergrösserung der kleinen Querschnittsaxen von den zwei Durchschnittslinien der Krümmungsebene mit der Mittelfläche der Röhrenwand die äussere verlängert, die innere verkürzt werden, längs jener folglich eine Zugspannung, längs dieser eine Pressung stattfinden, wodurch thatsächlich eine Krümmungsänderung der Mittellinie, und zwar eine Abnahme ihrer Krümmung bewirkt wird. Ist also die Röhre mit dem für den Eintritt des Dampfes oder der sonstigen gespannten Flüssigkeit offenen Ende befestigt, so ist bei übrigens freier Beweglichkeit die Bahn des geschlossenen anderen Endes, bezw. des betreffenden Endpunktes B der Mittellinie = der geometrischen Summe der Producte $r \Delta d\varphi$ aus den Aenderungen $\Delta d\varphi$ der Contingenzwinkel $d\varphi$ ihrer Bogenelemente $AA' = ds$ und der Abstände $AB = r$.

Bei der einfachsten Ausführung des auf diesem Princip beruhenden Manometers ist jeder Hülfsmechanismus zu vergrösserter Darstellung der Deformation vermeiden. Die Röhre ist so gekrümmt, dass ihre Mittellinie ungefähr $1\frac{1}{2}$ Windungen einer flachen Schraubenlinie bildet, und läuft das geschlossene bewegliche Ende unmittelbar in die Zeigerspitze aus. Die vollständig empirisch zu bestimmende Bahn der letzteren ist indessen ziemlich klein. Um sie grösser zu erhalten, sind bei einer anderen Art Bourdon'scher Manometer zwei nach Kreisbögen von etwas weniger, als 180^0, gekrümmte Röhren von ovalem Querschnitte angewendet, die einerseits in einer gemeinschaftlichen Fassung, durch welche die gespannte Flüssigkeit eintritt, festgehalten werden, während die geschlossenen anderen Enden durch Zugstangen gelenkartig mit den Enden eines doppel- und gleicharmigen Hebels verbunden sind. Die demselben dadurch ertheilte Drehung wird durch einen fest mit ihm verbundenen Zahnbogen einem auf der Zeigerwelle sitzenden Zahnrädchen und dadurch vergrössert dem Zeiger mitgetheilt.

Während die Eintheilung der Skala eines Metallmanometers von irgend welcher Art am besten durch Vergleichung mit einem Ventilmanometer (§. 184) oder für kleinere Drucke mit einem Flüssigkeitsmanometer (§. 183) geschehen kann, ist zur Controle nach zeitweiligem Gebrauche auch die bequemere Vergleichung mit einem anderen Metallmanometer ausreichend, welches als sogenanntes Controlmanometer



nur von Zeit zu Zeit zu solcher Vergleichung benutzt wird und deshalb den störenden und ändernden Einflüssen weniger, als ein in beständigem Dienste befindliches Gebrauchsmanometer unterworfen ist. Um die Zuverlässigkeit des Controlmanometers noch mehr zu erhöhen, pflegt es in demselben Gehäuse aus zwei gleichartigen Metallmanometern mit von einander unabhängigen Zeigern und Skalen combinirt zu werden. So lange dann unter dem Einflusse desselben Druckes die Angaben beider übereinstimmen, können dieselben mit um so grösserer Wahrscheinlichkeit als unverändert richtig gelten, je unwahrscheinlicher es sein würde, dass beide sich auf gleiche Weise in gleichem Maasse geändert haben sollten. —

Während bei allen bisher besprochenen Manometern nur die Möglichkeit augenblicklicher Ablesungen berücksichtigt war, kann es unter Umständen erwünscht sein, den von Zeit zu Zeit vorhandenen Manometerstand selbstthätig durch ein Registrirwerk dauernd zu beliebig späterer Ablesung markiren zu lassen. Wenn z. B. der Zeiger eines Metallmanometers leicht biegsam hergestellt und an der Spitze rechtwinklig gegen die Skala hin umgebogen ist, so lässt sich bei mässiger Grösse des Zeigerausschlagwinkels, entsprechend einer mässig langen flach bogenförmigen Bahn b seiner Spitze B, leicht eine Einrichtung treffen, vermittels welcher durch ein Uhrwerk in gleichen Zeitintervallen Δt der Zeiger durch eine Schiene stossweise so gebogen wird, dass seine umgebogene Spitze gegen die Skala angedrückt und gleich darauf durch Federkraft wieder zurückbewegt wird. Ist dann ferner die Bahn b als eine Folge congruenter und paralleler Curven $b_1, b_2, b_3 \ldots$ in gleichen Abständen auf einem Papierstreifen verzeichnet, der durch dasselbe Uhrwerk gleichförmig so bewegt wird, dass je nach den Zeitintervallen Δt eine nach der anderen dieser Curven der Zeigerspitze B gegenüberliegt, so ist einleuchtend, wie dadurch eine beliebige Reihe von zusammengehörigen Zeiten und Manometerständen registrirt werden kann. Bezügliche Einzelheiten sind Sache der constructiven Ausführung.

VI. Instrumente zur Messung mechanischer Arbeiten.

§. 186. Uebersicht.

Die zur Messung mechanischer Arbeiten, bezw. Arbeitstärken dienenden Instrumente werden oft auch als Dynamometer bezeichnet, indem die Kraftmessung bei ihnen die Hauptsache oder gar der alleinige Zweck zu sein pflegt, während die gleichzeitige Messung des Weges, bezw. der Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft als verhältnissmässig leicht an Bedeutung zurücktritt oder durch besondere Instrumente (Zählwerke und Uhren) vermittelt wird. Sie können eingetheilt werden in momentan wirkende und in totalisirende, erstere in Arbeitsmesser mit indirecter und in solche mit directer Kraftmessung.

Die üblichsten Arbeitsmessinstrumente mit indirecter Kraftmessung sind die sogenannten Bremsdynamometer. Bei denselben wird die Transmission von einer gewissen Stelle an, wo die von ihr übertragene Arbeitstärke gemessen werden soll, ausgerückt und an dieser Unterbrechungsstelle, nämlich an der letzten mit der Arbeitsquelle in Verbindung bleibenden Transmissionswelle ein messbarer Reibungswiderstand erzeugt, dessen Arbeit die Widerstandsarbeit der ausgerückten Transmission ersetzt. Aus den gemessenen Grössen dieser Reibung $= R$ und der relativen Geschwindigkeit $= v$ beider Reibungsflächen ergiebt sich die gesuchte Arbeitstärke $= Rv$. Dergleichen Bremsdynamometer finden nur bei rotirender Bewegung Anwendung, indem die Reibung am Umfange einer runden Bremsscheibe hervorgerufen wird, die coaxial mit der betreffenden Welle fest verbunden ist. Sie eignen sich vorzugsweise zur Messung der Arbeitstärken, welche von Kraftmaschinen bei verschiedenen Geschwindigkeiten (Peripheriegeschwindigkeiten v der Bremsscheibe, zu- oder abnehmend mit ab- oder zunehmender Grösse R der regulirbaren Reibung) entwickelt werden. Im Princip können sie zwar auch zur Messung der von einer Arbeitsmaschine verbrauchten Betriebsarbeit dienen, indem dieselbe ausgerückt und die Reibung des Bremsdynamometers so regulirt wird, dass die durch jene Ausrückung zunächst vergrösserte Geschwindigkeit derjenigen wieder gleich wird, welche bei eingerückter Arbeitsmaschine stattfand; allein man müsste sich dann darauf verlassen können, dass mit der Geschwindigkeit auch die Arbeitstärke der Kraftmaschine unverändert blieb. Wenn letztere gar verschie-

dene Arbeitsmaschinen gleichzeitig zu treiben hätte, von denen nur eine durch die Bremse ersetzt wird, so würde solche Messung ihres Arbeitsbedarfes ausserdem auf der zweifelhaften Voraussetzung unveränderlicher Grösse des gesammten Arbeitsbedarfes aller übrigen beruhen.

Zur Messung der Betriebsarbeit von Arbeitsmaschinen sind deshalb die Arbeitsmesser mit directer Kraftmessung in der Regel geeigneter. Sie können auch als Transmissionsdynamometer bezeichnet werden, indem sie meistens darauf beruhen, dass die Theilrisskraft P eines beständig in der Transmission vorhandenen oder nur zeitweilig eingeschalteten Zahn- oder Riemenrades, welches die ganze zu bestimmende Arbeit überträgt, auf irgend eine Weise gemessen wird; durch Multiplication mit der betreffenden Theilrissgeschwindigkeit v ergiebt sich dann die Arbeitstärke $= Pv$. Für im Betriebe befindliche Kraftmaschinen ist zwar dasselbe Messungsverfahren nicht ausgeschlossen, falls nur jener Druck P an einer solchen Stelle gemessen wird, dass die zwischen ihr und der Kraftmaschine vorkommenden Widerstände leicht und mit genügender Sicherheit veranschlagt werden können, um ihre Gesammtarbeit in Abzug zu bringen; sofern es aber darauf ankommt, die Arbeitstärke der Kraftmaschine unter möglichst verschiedenen Umständen zu ermitteln, sind dazu die Bremsdynamometer, abgesehen von ihrer meistens grösseren Einfachheit, besonders wegen der leichten Regulirbarkeit ihres Reibungswiderstandes R mehr geeignet und gebräuchlich.

Bei beiden besprochenen Arten von Arbeitsmessinstrumenten findet man die Arbeitstärke in einem gewissen Augenblicke während des Ganges der betreffenden Maschine, und wenn sie im Laufe der Zeit sich ändert, so giebt sich diese Veränderlichkeit ohne Weiteres nicht so zu erkennen, dass daraus die totale Arbeit oder die mittlere Arbeitstärke für einen gewissen Zeitraum sicher gefunden werden könnte. Zu letzterem Zwecke dienen sogenannte totalisirende Arbeitsmesser, nämlich Arbeitsmessinstrumente mit meistens directer Kraftmessung und Registrirapparat. Die directe Kraftmessung kann dann statt durch Messung (Abwägung) eines Theilrissdruckes, insbesondere auch vermittels der Deformation eines in die Transmission eingeschalteten elastischen Körpers geschehen, indem mit demselben ein Schreibstift verbunden ist, an welchem eine die Spur desselben zu beliebig späterer Benutzung sichtlich machende Fläche mit einer der Geschwindigkeit der Maschine proportionalen Geschwindigkeit nach geeigneter Richtung entlang bewegt wird.

Ihrer Eigenthümlichkeit wegen besonders hervorzuheben sind dabei sogenannte Indicatoren, nämlich Instrumente zu totalisirender Arbeits-



messung in solchen Fällen, in welchen die bewegende Kraft oder der zu bewältigende Widerstand durch eine Flüssigkeit (tropfbare, Dampf- oder luftförmige Flüssigkeit) übertragen wird. Wegen allseitig gleichmässiger Fortpflanzung solchen Flüssigkeitsdruckes können die betreffenden Instrumente an beliebiger Stelle seitlich fest aufgestellt und durch Abzweigung eines Theiles der die Kraft übertragenden Flüssigkeit in Function gesetzt werden.

§. 187. Bremsdynamometer.

Die Anordnung und der Gebrauch eines Bremsdynamometers zur Messung der Arbeitstärke einer Kraftmaschine sind im Wesentlichen folgende. Auf der betreffenden rotirenden Welle (Wasserrad- oder Turbinenwelle, Schwungradwelle einer Dampfmaschine etc.), welche zunächst als horizontal liegend gedacht werden möge, wird, falls sie nicht schon an sich eine dazu geeignete Riemscheibe, ein Schwungrad von genügend glatter Umfläche oder dergl. trägt, eine runde eiserne (früher auch wohl weniger zweckmässig hölzerne) Scheibe oder Trommel (Bremsscheibe) coaxial befestigt, gegen deren Umfang ein verschieden beschaffener Bremskörper so stark angepresst wird, dass, während er selbst an der Rotation verhindert ist, durch die Reibung $=R$ der relativ gleitenden Bewegung zwischen ihm und der Bremsscheibe, deren Radius $=r$ sei, die Umdrehungszahl $=n$ der Welle pro Minute derjenigen nahe gleich wird, für welche die Arbeitstärke gefunden werden soll. Letztere ist

$$=\frac{n}{60}R\,.\,2\pi r=0{,}1047\,nRr$$

Meterkilogramm pro Secunde, falls R in Kilogrammen, r in Metern ausgedrückt ist, oder in Pferdestärken:

$$N=\frac{1}{75}\,\frac{n}{60}\,R\,.\,2\pi r=\frac{nRr}{716{,}2},$$

so dass es nur noch der Messung des Reibungsmomentes Rr durch ein ihm gleiches bekanntes Kraftmoment Pp bedarf, um die gesuchte Arbeitstärke

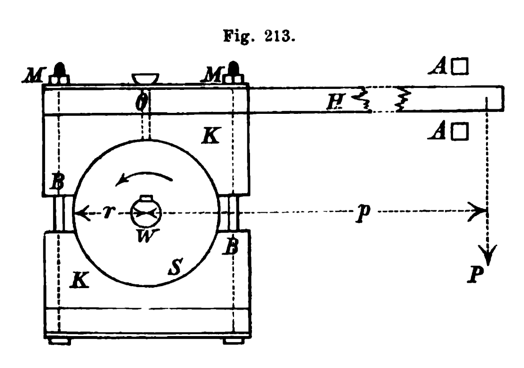
$$\left.\begin{aligned}&=0{,}1047\,nPp\ \text{Meterkgr. pro Sec.}\\ \text{bezw. } N&=\frac{nPp}{716{,}2}\ \text{Pferdestärken}\ \ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

zu finden. Um behufs jener Messung von Rr durch Pp das Gleichgewicht dieser Momente erkennen zu können, welche um die Bremsscheibe

herum in entgegengesetztem Sinne den Bremskörper zu drehen streben, muss letzterer hinsichtlich dieser Drehung etwas Spiel haben, begrenzt durch Stricke oder feste Anschläge.

Fig. 213 zeigt ein Bremsdynamometer von einfachster ursprünglicher Form, einen Prony'schen Zaum (dynamomètre à frein), so genannt nach dem französischen Ingenieur Prony, der die erste Anwendung (1821) zu technischen Zwecken in grösserem Massstabe von dem Instrumente gemacht zu haben scheint. Die mit ihrer Welle W im Sinne des Pfeils rotirende Bremsscheibe S wird von hölzernen Backen (Sätteln) K umfasst, die durch Drehung der Muttern M, M der Schraubenbolzen B, B mehr oder weniger angepresst werden können. Der hier mit dem oberen Sattel K verbundene Hebel H wird am Ende so belastet (bezw. es werden die Schraubenmuttern bei gegebener Belastung des Hebels so angezogen), dass er zwischen den Anschlägen A, A in horizontaler Lage frei spielt. Das Gewicht P, in welches auch das auf seinen Angriffspunkt am Hebelende reducirte (ein für allemal experimentell zu bestimmende) Eigengewicht der unbelasteten Bremse selbst einzurechnen ist, wird als Aggregat von Gewichtstücken entweder auf eine über H befindliche oder besser auf eine an H hängende Waagschale aufgesetzt oder auch einfach mit Stricken und Haken angehängt. Die Drehung der Muttern M, M zur Erhaltung des durch die Gleichung $Rr = Pp$ charakterisirten und am freien Spiel des Hebels mitten zwischen den Anschlägen A, A erkennbaren Gleichgewichtszustandes ist nicht nur nach jeweiliger Aenderung von P (um durch Vergrösserung oder Verkleinerung von P einen langsameren oder schnelleren Gang der zu prüfenden Maschine herbeizuführen), sondern beständig wegen schwankender Grösse der Reibung erforderlich. Um diese Regulirung zu erleichtern und in sehr feinen Abstufungen ausführen zu können, dienen namentlich bei grösseren Instrumenten besondere mechanische Hülfsmittel; insbesondere können die Muttern M, M zu Schraubenrädern ausgebildet werden, in welche entsprechende Schraubengänge einer gemeinsamen durch Handrad drehbaren Welle eingreifen.

Fig. 213.



Zur Vermeidung übermässiger Abnutzung und Erhitzung, die bei längerer Versuchsdauer bis zur Verkohlung der hölzernen Bremsbacken sich steigern kann, dient die Schmierung der Reibungsflächen (in Fig. 213 bei *O* angedeutet) mit Oel oder Seifenwasser, event. auch die Ausfütterung der Backen mit Messing, Bronze oder einem sonstigen für Lagerschalen üblichen Metall. Indem die Reibungsarbeit unvermeidlich theils in Abnutzungsarbeit, theis in Wärme sich umsetzt, wird durch dergleichen Schmiermittel vor Allem die Abnutzung möglichst vermieden und nur nebenbei, besonders bei Anwendung von Seifenwasser, zugleich ein Theil der producirten Wärme durch Verdampfung gebunden, also die Erhitzung vermindert. Indessen bleibt diese Art der Wärmeentziehung doch stets nur gering im Vergleich mit derjenigen, welche ausserdem durch eine besondere Wasserkühlung oder besser mit Rücksicht auf thunlichste Sauberkeit und Schonung aller Theile durch eine kräftige Luftkühlung zu bewirken ist, um der Erhitzung entgegenzuwirken, mit welcher nicht nur die Abnutzbarkeit und der Oelverbrauch wachsen, sondern welche auch namentlich durch entsprechende Deformationen periodische Aenderungen von R und somit Störungen des Gleichgewichtes der Momente Rr und Pp bewirken kann.

Die Wirksamkeit der Luftkühlung ist bedingt durch die Grösse der die Wärme abgebenden Oberfläche $= F$, vor Allem folglich durch genügende Grösse der eisernen Bremsscheibe. Eine solche von Holz ist in dieser Hinsicht fast ohne alle Wirkung. Ist t der Ueberschuss der Temperatur der Bremsscheibe, event. auch des Bremskörpers an jener Oberfläche über die Lufttemperatur, k der betreffende Wärmeübergangscoefficient, verstanden als die stündlich pro Quadratmeter Oberfläche und für jeden Grad Celsius Temperaturdifferenz an die Luft abgegebene Wärmemenge, so ist die stündliche Wärmeabgabe im Ganzen $= kFt$. Indem sie im Beharrungszustande = der stündlich producirten Wärme, also nahe = dem Wärmeäquivalent der stündlichen Reibungsarbeit ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$kFt = \frac{75 \, . \, 3600}{424} N = 637 \, N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Durch Beobachtung an zwei als Bremsscheiben benutzten schmiedeisernen Riemscheiben fand E. Brauer* für $t = 75^0$ und 35^0, unter F die Oberfläche des Scheibenkranzes verstanden, $k = 62$ und 66, im Mittel

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1881, S. 326.

$k = 64$, und leitet daraus die vorläufige Regel ab, thunlichst

$$F = 0{,}1\,N \text{ Quadratmeter} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zu machen, entsprechend t nahe $= 100^0$ C. Wegen der sehr geringen Wärmeleitungsfähigkeit des Holzes ist im Falle eines hölzernen Bremskörpers mit oder ohne Metallfutter der davon berührte Theil der Bremsscheibe nicht in F einzubegreifen; gilt zwar Letzteres auch für einen Bremskörper aus Metall, so trägt dagegen seine ganze freie Oberfläche zur Vergrösserung der Abkühlungsfläche F bei, die dadurch grösser werden kann, als die wirksame Oberfläche der Bremsscheibe allein einschliesslich ihrer Reibungsfläche.

Nicht unwesentlich ist die relative Höhenlage des Angriffspunktes von P gegen die Axe der zu bremsenden Welle. Wenn dieser Punkt, wie es meistens der Fall und in Fig. 213 angenommen ist, über der Wellenaxe liegt, so ist das Gleichgewicht labil und eine genügend ruhige Lage des Bremshebels schwer zu erzielen. Wenn z. B. die Reibung R aus irgend einem Anlasse etwas wächst, also den Bremskörper im Sinne der Rotation der Welle mitnimmt, so bewegt sich im genannten Falle der Angriffspunkt in solchem Sinne, dass p abnimmt und somit das Moment Rr noch mehr Pp übertrifft. Der Hebel wird mit zunehmender Beschleunigung gegen den oberen Anschlag geschleudert, ebenso umgekehrt gegen den unteren bei geringfügigster Abnahme von R. Besser ist deshalb eine solche Anordnung, bei welcher der Angriffspunkt von P tiefer, als die Wellenaxe liegt, wenn auch nur sehr wenig, so dass etwa in der höchsten Lage des Hebels jene Höhendifferenz $=$ Null ist. Denn je tiefer der Angriffspunkt gelegt, je stabiler also das Gleichgewicht gemacht wird, desto kleiner wird die Schwingungsdauer der nie ganz vermeidlichen Hebelschwingungen (analog einer sehr stabilen und unempfindlichen Waage) und desto weniger genau ist der Hebelarm p wegen seiner verhältnissmässig erheblichen Veränderlichkeit bei diesen Schwingungen bestimmbar.

Um dasselbe Instrument bei Wellen von verschiedenen Durchmessern benutzen und um die Bremsscheibe leicht auf der Welle befestigen zu können, unbehindert durch solche zugehörige Theile der letzteren, die es unmöglich machen, ohne Weiteres vom Wellenende her die Bremsscheibe aufzubringen, wird dieselbe oft als sogenannte Universal-Bremsscheibe aus zwei halbkreisförmigen Ringen zusammengeschraubt und so um die jeweils zu bremsende Welle herum ein voller Bremsring ohne Arme von genügender Weite für die grössten in Betracht kommenden

Wellendurchmesser gebildet. Derselbe ist an beiden Rändern mit je drei Vorsprüngen versehen, die als Muttern für 2 mal 3 radial gerichtete starke Schraubenbolzen zu coaxialer Festklemmung auf der Welle dienen; diese Schraubenbolzen vertreten somit die Stelle der Arme, der Nabe und des Befestigungskeiles eines gewöhnlichen ungetheilten Bremsrades. —

Zahlreiche Modificationen des Bremsdynamometers unterscheiden sich vor Allem theils durch die Art, wie die Reibung gemessen, so zu sagen abgewogen wird, theils durch die Beschaffenheit des Bremskörpers. In ersterer Hinsicht sind alle im §. 165 unterschiedene Wägungsarten vertreten, nämlich ausser dem Princip der Hebelwaage im engeren Sinne (veränderliches Gegengewicht P an unveränderlichem Angriffspunkte, wie bei Fig. 213 zunächst angenommen wurde) auch das der Laufgewichtswaage (unveränderliches Gegengewicht an einem längs dem Bremshebel verschieblichen Angriffspunkte), das der Neigungswaage (unveränderliches Gegengewicht an unveränderlichem Angriffspunkte) und das der Federwaage, entsprechend dem Anschlusse des Bremshebels an ein andrerseits fest angehängtes Federdynamometer (§. 182). Auf dem Princip der Neigungswaage beruht insbesondere das Bremsdynamometer von Barrois. welches seinem Wesen nach (abgesehen von der abweichenden constructiven Ausführung) aus dem Prony'schen Zaum, Fig. 213, dadurch hervorgeht, dass unter Beseitigung der Anschläge A, A der Hebel H abwärts gerichtet wird, so dass der Angriffspunkt von P erheblich tiefer, als die Wellenaxe zu liegen kommt, dass ferner mit ihm eine eingetheilte Kreisskala und in deren Mittelpunkte ein Stift verbunden wird, um welchen ein auf die Skala weisender, vertical abwärts hängender Zeiger leicht drehbar ist. Indem dieser den Winkel anzeigt, unter welchem das Perpendikel vom Angriffspunkte des Belastungsgewichtes P auf die Wellenaxe gegen die Lothrechte geneigt ist, ergiebt sich daraus der Hebelarm p von P und somit das Moment $Pp = Rr$. Bei diesem Instrument ist ebenso wie bei den auf dem Princip der Federwaage beruhenden das Gleichgewicht in hohem Grade stabil, damit aber auch die Empfindlichkeit nicht gross, wozu hier noch der Umstand kommt, dass die Ablesungen des Pendelzeigerstandes an der Kreisskala durch die stattfindenden Schwingungen von kurzer Dauer sehr erschwert werden.

Hinsichtlich der Beschaffenheit des Bremskörpers können die Bremsdynamometer unterschieden werden als solche, die auf dem Princip der Backenbremse (§. 89), und als solche, die auf dem Princip der Bandbremse (§. 90) beruhen, wobei im Einzelnen noch manche Abarten sich finden. So geht der wesentliche Charakter der Backenbremse des

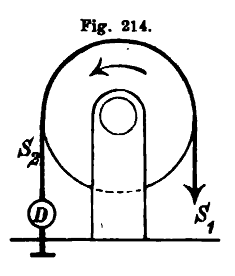
Prony'schen Zaumes, Fig. 213, dadurch nicht verloren, dass, wie bei dem Bremsdynamometer von W. Theis,* der Bremskörper in eine grössere Zahl von Holzklötzen aufgelöst wird, die in entsprechenden Führungen eines die Bremsscheibe an und für sich reibungslos umgebenden und mit dem Bremshebel verbundenen starren Ringes radial beweglich sind und durch Zugstangen gemeinschaftlich mit Hülfe eines Schraubenradgetriebes ringsum mehr oder weniger gegen die Bremsscheibe angepresst werden können; ebenso ist auch das Bremsdynamometer von Egen (1828)** als Abart der Backenbremse zu betrachten, obschon der untere Sattel des Prony'schen Zaumes, Fig. 213, durch ein Eisenblechband ersetzt ist.

Wesentlich in ihren Eigenschaften als Bremsdynamometer von der Backenbremse verschieden ist die eigentliche Bandbremse, entsprechend dem vollen Ersatze der starren Bremskörper des Prony'schen Zaumes oder seiner Abarten durch ein biegsames (schmiedeisernes) Bremsband, sei dieses ein gegliedertes Band, auf dessen charnierartig durch Bolzen zusammenhängenden Gliedern Holzklötze befestigt sind, sei es ein stetiges Eisenblechband, die Bremsscheibe unmittelbar oder auch mittels aufgesetzter Holzklötzchen berührend. Ist das Band offen mit einem von der Bremsscheibe relativ ablaufenden und einem auf dieselbe relativ auflaufenden Ende, so müssen seine Spannungen an beiden Enden bezw. $= S_1$ und S_2 gemessen werden, um in ihrer Differenz die Kraft

$$P = S_1 - S_2$$

zu erhalten, während p nur wenig $> r$ ist, nämlich um die halbe Banddicke, event. vermehrt um die Dicke der aufgesetzten Holzklötze, grösser. Um das Abrutschen des offenen Bandes zu verhindern und einen stabilen relativen Gleichgewichtszustand desselben herzustellen, pflegt es nach dem Vorgange von Navier am einen Ende mit Einschaltung eines Federdynamometers D, Fig. 214, unten am Boden befestigt und nur am anderen Ende durch ein Gewicht belastet zu werden, und zwar ist es zweckmässig, die grössere Endspannung S_1 durch diese zuverlässigere Gewichtsbelastung zu messen, vorbehaltlich ihrer Ausübung vermittels eines

Fig. 214.



* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1869, S. 647 und Taf. XXII.

** Rühlmann's „Allgem. Maschinenlehre", Bd. I, 2. Aufl., Fig. 162.

ungleicharmigen Hebels im Falle sehr grosser Kräfte. Nach §. 83, Gl. (1) stehen die Spannungen S_1 und S_2 in der Beziehung:

$$S_1 = S_2\, e^{\mu\alpha},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen, μ den Reibungscoefficienten, α das Verhältniss des umspannten Bogens zum Radius verstanden. Bei dem Navier'schen Banddynamometer gemäss Fig. 214 ist $\alpha = \pi$. — Ist das Band geschlossen und mit einer gewissen gleichförmigen Anfangsspannung um die Bremsscheibe gelegt, so ergiebt sich P unmittelbar = der an irgend einer Stelle tangential an diesem Bandringe angreifenden äusseren Kraft. Der dieser Angriffsstelle einerseits (im Sinne von P) angrenzende Bandquerschnitt ist hier als auflaufendes Ende mit der Spannung S_2, der andererseits angrenzende als ablaufendes mit der Spannung $S_1 = P + S_2$ zu betrachten, während $\alpha = 2\pi$ ist.

Die Ausfütterung des Bandes mit Holz hat zwar den Vortheil, dass der grössere Reibungscoefficient μ eine kleinere Bandspannung zur Erzeugung einer gewissen Reibungsgrösse R erfordert, dagegen den Nachtheil, dass dadurch die oben mit F bezeichnete Abkühlungsfläche vermindert wird; denn soweit die Umfläche der Bremsscheibe von dem schlecht leitenden Holzfutter berührt wird, hört ihre Wirksamkeit als Abkühlungsfläche fast vollständig auf. Vor der Backenbremse empfiehlt sich die Bandbremse ausser durch geringeres Raumbedürfniss besonders dadurch, dass solche in kurzen Perioden sich wiederholende Aenderungen der Reibung R und daraus folgende Schwankungen des Bremskörpers, welche durch unrunde Beschaffenheit der Bremsscheibe verursacht werden, fast gänzlich fortfallen. Einigermassen kann zwar dieser Uebelstand auch bei dem Backenbremsdynamometer beseitigt werden durch Unterlagscheiben von Gummi unter die Spannmuttern M, M, Fig. 213, oder nach Prof. K. Wersin durch die Einschaltung von Stahlfedern zwischen dem Hebel H und dem oberen Sattel K (wobei dann auch die Anbringung der Schmierbüchse in diesem Zwischenraume zu geschehen hat); vollkommener und einfacher wird aber der Zweck durch ein Band erreicht, welches sich der Bremsscheibe ohne wesentlichen Krümmungswiderstand anschliesst. —

Ausser durch unrunde Beschaffenheit der Bremsscheibe können jene störenden und die Genauigkeit der Messung beeinträchtigenden Gleichgewichtsschwankungen des Bremskörpers besonders durch Aenderungen des Reibungscoefficienten verursacht werden, der u. A. vom Zustande der Schmierung, von der Temperatur und von der relativen Geschwindigkeit



beider Reibungsflächen, also von Umständen abhängt, auf deren Unveränderlichkeit nicht zu rechnen ist; die Geschwindigkeit der Bremsscheibe kann selbst im Beharrungszustande periodisch veränderlich sein bei solchen Kraftmaschinen, bei welchen die motorische Substanz, wie bei Dampfmaschinen, mit im Allgemeinen veränderlichem Drucke auf einen hin- und hergehenden Kolben wirkt. Dadurch, dass nach Prony's mehrfach befolgtem Vorschlage an den Bremshebel seines Zaumes oder an eine Verlängerung desselben auf der anderen Seite der Welle vermittels einer Stange ein Kolben gehängt wird, der mit etwas Spielraum in einem mit Wasser gefüllten cylindrischen Gefässe beweglich ist, oder durch ähnliche mehr oder weniger umständliche und unbequeme Hülfsmittel können dergleichen Schwankungen höchstens etwas weniger heftig gemacht werden, zudem nur auf Kosten der Empfindlichkeit des Instrumentes. Auch jene Ausgleichung, die bei stabilem Gleichgewichte des Bremskörpers, z. B. bei der Messung der Reibung R eines Prony'schen Zaumes nach dem Princip der Neigungs- oder Federwaage durch entsprechende Aenderung des Momentes Pp bewirkt wird, ist insofern unvollkommen, als diese Aenderung von Pp bei bestimmter Grösse der Arbeitstärke N nach Gl. (1) eine gleichzeitige Aenderung von n bedingt. Ebenso hat auch z. B. bei dem Navier'schen Bremsdynamometer, Fig. 214, jede Aenderung des Reibungscoefficienten eine solche von $S_1 : S_2 = e^{\mu\pi}$, also, da S_1 gegeben ist, eine Aenderung von S_2 und von $P = S_1 - S_2$, somit bei gegebenem Werthe von N eine Aenderung von n zur Folge.

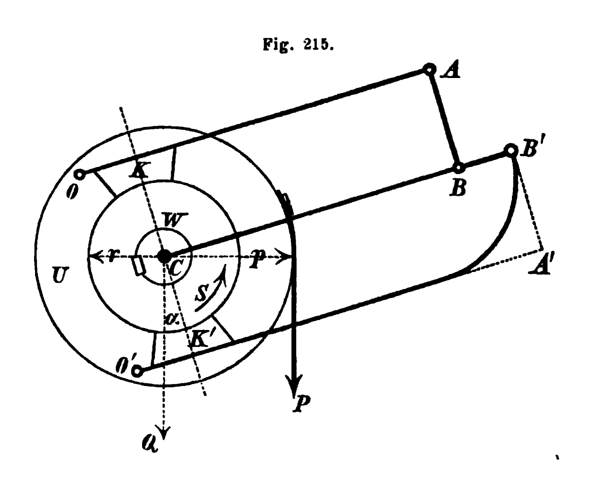
Behufs einer vollkommeneren Selbstregulirung ohne Aenderung des Momentes $Rr = Pp$ sind verschiedene Einrichtungen vorgeschlagen und bewährt gefunden worden sowohl im Falle einer Backen-, als namentlich einer Bandbremse. Dem ersteren Falle entspricht das Bremsdynamometer von Marcel Deprez*, bei welchem der Zweck dadurch erreicht wird, dass der Druck der Bremsbacken gegen die Scheibe von einem besonderen Gewichte Q herrührt, dessen Moment in Bezug auf die Wellenaxe beständig = Null ist und dessen jenen Druck bedingende Componente sich selbstthätig so regulirt, dass das Moment der entsprechenden Reibung einem constanten Kraftmomente Pp gleich bleibt. Um die auf der Welle W festgekeilte Bremsscheibe S, Fig. 215, ist nämlich der ringförmige Körper U lose drehbar, an welchem sich die Drehungsaxen O, O' der Bremshebel OA, $O'B'$ befinden. Von letzteren ist $O'B'$ unmittelbar, OA durch Vermittlung der Zugstange AB gelenkig

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1881, S. 334.



mit dem Zwischenhebel CBB' verbunden, der (senkrecht zur Ebene der Figur) so gebogen ist, dass, während die Bremsscheibe auf dem Ende der Welle festsitzt, sein mit dem Gewichte Q belasteter Endpunkt C in die Wellenaxe hineinfällt. Ist dann α der Winkel, um welchen die verticale Richtungslinie von Q gegen die Normale KCK' zu CB geneigt ist, so werden die Bremsbacken K, K' gegen die Bremsscheibe S bezw. im Sinne KC, $K'C$ mit den Kräften:

Fig. 215.



$$D = Q \cos \alpha \frac{CB'}{BB'} \frac{OA}{OK}, \quad D' = Q \cos \alpha \frac{CB}{BB'} \frac{O'A'}{O'K'} \quad \ldots \ldots (4)$$

angedrückt, welche durch passende Hebelverhältnisse auch bei mässiger Grösse von Q beliebig gross gemacht werden können und übrigens vom Winkel α abhängig sind. Wenn also z. B. infolge wachsender Grösse des Reibungscoefficienten das Gleichgewicht zwischen dem Reibungsmoment Rr und dem constanten Moment Pp des am cylindrischen Umfange des Ringes U angehängten Gewichtes P gestört, nämlich U im Sinne des Pfeiles S mitgenommen wird, so wächst damit α, nehmen also D und D' nach Gl. (4) so lange ab, bis die Reibung auf ihre der Belastung P entsprechende Grösse zurückgebracht ist. — Weshalb von den zwei Bremshebeln der eine unmittelbar, der andere durch ein Zwischenglied AB mit dem Belastungshebel CBB' verbunden ist, bedarf kaum näherer Begründung; mit Rücksicht auf die nach BC gerichtete Kraftcomponente $Q \sin \alpha$ und auf die Eigengewichte aller Theile dürften in der That ebenso wenig beide Bremshebel durch Zwischenglieder mit CBB' verbunden sein, wie sie mit Rücksicht auf die Abnutzbarkeit der Bremsbacken und auf das Erforderniss unveränderlicher Entfernung BB' beide unmittelbar mit diesem Hebel verbunden sein dürften.

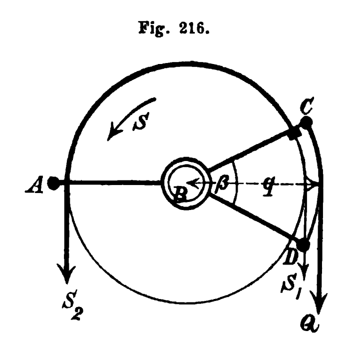
Diese selbstregulirende Backenbremse lässt zwar bei guter Ausführung grosse Genauigkeit der Resultate erwarten; einfacher jedoch und

namentlich auch mit Benutzung grösserer vorhandener Bremsscheiben, die wegen genügender Luftkühlung die Vermeidung unbequemer Wasserkühlung gestatten, kann der hier in Rede stehende Zweck der Selbstregulirung auf constantes Widerstandsmoment $Rr = Pp$ durch Bandbremsen von entsprechender Einrichtung erzielt werden. Indem bei einer solchen

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}, \quad \text{also } Rr = (S_1 - S_2)p = S_2 (e^{\mu\alpha} - 1)p \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

ist, kann die Selbstregulirung entweder so eingerichtet werden, dass α oder so, dass S_2 bezw. die gleichmässige Anfangsspannung eines geschlossenen Bremsbandes bei Aenderungen von μ, aber constant bleibender Grösse von $Rr = Pp$ selbstthätig der Gleichung (1) sich anpasst.

Fig. 216.



Ersteres ist der Fall bei dem in England gebräuchlichen Bremsdynamometer vom Imray: Fig. 216. Um die zu bremsende Welle B ist ein Rahmen lose drehbar, welcher die Bremsscheibe umfassend auf beiden Seiten derselben durch einen zweiarmigen Hebel gebildet wird, dessen einer Arm AB einfach stabförmig, dessen anderer aber in zwei Winkelschenkel BC, BD gespalten ist, einem mässig grossen Winkel $CBD = \beta$ entsprechend; beide Rahmentheile sind bei A, C und D durch Bolzen verbunden, die den Umfang der Bremsscheibe nicht berühren. Die gespaltenen Hebelarme CBD sind durch eine die Bremsscheibe coaxial umgebende, aber nicht berührende materielle Cylinderfläche CD verbunden. Die Masse des Rahmens ist so vertheilt, dass sein Schwerpunkt in der Wellenaxe liegt. Das Bremsband ist an die Schenkel BC des Rahmens angeschlossen und am Ende durch ein Gewicht S_2 belastet im Sinne der Drehung der Welle; seine grössere Spannung S_1 am anderen Ende bei C wird durch die Belastung Q eines auf die cylindrische Wand CD des Rahmens sich auflegenden, bei C befestigten Bandes herbeigeführt und ist also gleichfalls constant, nämlich mit Rücksicht auf die betreffenden Hebelarme $= Q\frac{q}{p}$. Wenn nun beim Gebrauche zuerst ein solches Verhältniss der Belastungen Q und S_2 hergestellt wird, dass der Rahmen bei ungefähr horizontaler Lage des Armes AB ins Gleichgewicht kommt, so kann bei unverändertem Verhältnisse $Q : S_2$ jede dieser Belastungen so geändert

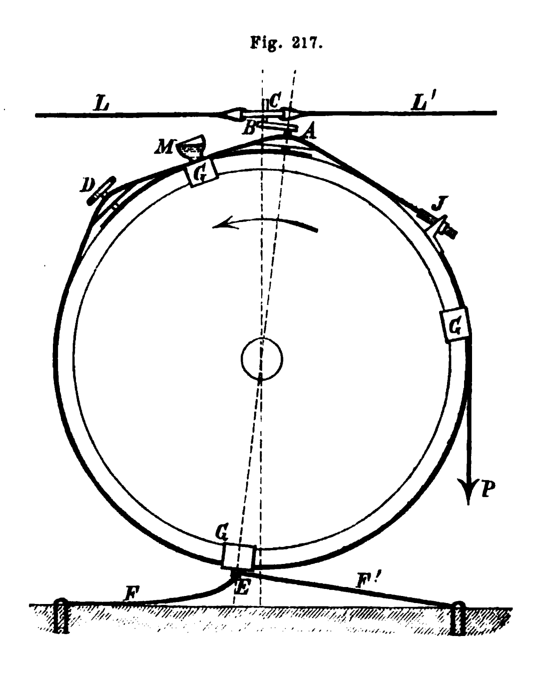
werden, dass die entsprechend geänderte Differenz

$$P = S_1 - S_2 = Q \frac{q}{p} - S_2$$

eine verlangte Umdrehungszahl n der Welle bedingt. Eine Aenderung von μ innerhalb gewisser Grenzen hat dann weiter keine Folge, als dass sich durch Drehung des Rahmens auch der Centriwinkel α des vom Bremsbande umspannten Bogens zwischen den Grenzen π und $\pi - \beta$ entsprechend so ändert, dass Rr nach Gl. (5) constant $= Pp$ bleibt.

Durch Spannungsänderung des Bremsbandes wird die Selbstregulirung vermittelt bei den Bremsdynamometern von Balk und von E. Brauer.* Letzteres ist besonders einfach und empfehlenswerth, wenn als Bremsscheibe ein abgedrehtes Schwungrad oder eine grosse Riemscheibe ringsum zugänglich, also nicht etwa theilweise in das Fundament hineinragend vorhanden ist: Fig. 217.

Fig. 217.



Sein Bremsband ist ein geschlossener Ring von Bandeisen, indem die Verschraubung bei J nur zu genauerer Anpassung der Länge und zur Erleichterung des Aufbringens dient. Durch Klammern G, G, G, die an diesem Bandringe befestigt sind und welche den Radkranz mit etwas Spiel umfassen, wird einem seitlichen Abrutschen vorgebeugt. Die untere Klammer G dient zugleich dazu, die Beweglichkeit des Bremsbandes auf einen kleinen Betrag von etwa 10 bis 12 Centimeter zu beschränken vermittels zweier Stricke F, F', die einerseits mit der an dieser Klammer befindlichen Oese E verknotet und andrerseits am Fussboden befestigt werden. An die in der Figur rechts befindliche Klammer kann der mit den Gewichten P zu belastende Riemen ange-

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1881, S. 329.

schlossen werden, während die obere, nebst dem Bremsbande entsprechend gelochte Klammer zugleich das Oelgefäss *M* trägt und mit einem besonderen Bandeisenstücke vernietet ist, gegen welches sich die Schrauben *A* und *D* stützen, um das Schleifen derselben auf der Bremsscheibe zu verhindern. Von diesen zwei Schrauben, deren Muttern als segmentförmige Sattelstücke mit dem Bremsbande vernietet sind, dient die mit einem Handrädchen versehene Schraube *D* zur Anspannung des Bremsbandes entsprechend der Belastung *P*, dagegen die mit einem Kurbelarme versehene Schraube *A* zu selbstthätiger Regulirung dieser Spannung während eines Versuches. Zur Vorbereitung eines solchen wird, nachdem das Bremsband aufgebracht und bei *J* mässig angezogen, auch ihr Spiel durch die Stricke *F*, *F'* so begrenzt ist, dass sich die Oese *E* nur etwa 5 bis 6 Centimeter links und rechts von der Verticalebene durch die Wellenaxe entfernen kann, die Kurbelschraube *A* so weit vorgeschraubt, dass einige Windungen unter dem als Mutter dienenden Sattelstücke hervorragen, und dann durch seitlich befestigte straff gespannte Schnüre *L*, *L'* der aufwärts gerichtete Kurbelzapfen *C* vertical über der Wellenaxe so festgehalten, dass (bei Voraussetzung von Rechtsgewinde der Schraube) der Kurbelarm von etwa 12 Centimeter Länge gerade nach vorn gegen den, den Tragriemen des Gewichtes *P* rechts von sich sehenden, Beobachter hin gerichtet ist, falls die der Schraube *A* diametral gegenüber liegende Oese *E* sich in der mittleren Lage befindet, die Stricke *F*, *F'* folglich beide gleichmässig schlaff sind. Diese Feststellung des Zapfens *C* wird erleichtert durch ein Brettchen *B* mit 3 Löchern, in deren äusseren die Schnüre *L*, *L'* eingeknotet sind, während durch das mittlere der Zapfen *C* von unten her mit etwas Spielraum hindurchreicht. Wird jetzt die zu bremsende Maschine angelassen, während das Gewicht *P* noch nicht angehängt ist, so genügt die schon vorhandene mässige Reibung, um den Bremsring in die Grenzlage mit herumzunehmen, welche der in Fig. 217 dargestellten entgegengesetzt und wobei also der Strick *F* gespannt ist. Durch die folgende Belastung mit dem Gewichte *P* wird dann aber die in der Figur gezeichnete Lage herbeigeführt, bis durch Anziehen der Handradschraube *D* die Spannung so vermehrt ist, dass das Reibungsmoment *Rr* dem Kraftmomente *Pp* Gleichgewicht hält, was die beiderseits schlaff gewordenen Stricke *F*, *F'* erkennen lassen. Die weitere Regulirung der Spannung besorgt jetzt die Kurbelschraube *A* von selbst. Bewegte sich etwa das Bremsband wegen Abnahme der Reibung *R* gegen die in Fig. 217 dargestellte Grenzlage hin, so würde dadurch *A* etwas einwärts geschraubt, also die Spannung und somit *R* bis zur

Wiederherstellung des Gleichgewichtes vergrössert; umgekehrt ist die regulirende Wirkung im entgegengesetzten Falle. Zeigt sich beim Fortgange des Versuches einer der Stricke F, F' dauernd gespannt, so muss mit der Schraube D nachgeholfen werden. Sind aber diese Stricke abwechselnd gespannt, so ist es ein Zeichen, dass die regulirende Wirkung der Schraube A nicht ausreicht. Dieselbe kann dann dadurch verstärkt werden, dass nach Lösung der Schraube D und Abhebung des Brettchens B vom Kurbelzapfen C diese Schraube A um einen oder einige Gänge weiter angezogen (einwärts geschraubt), dann das Brettchen wieder auf den Zapfen geschoben und D bis zu freiem Spiel des Bremsbandes wieder angezogen wird. Durch die genannten Aenderungen ist der stumpfe Winkel DAJ etwas weniger stumpf geworden, und hat infolge dessen eine bestimmte Radialbewegung des Scheitelpunktes A eine vergrösserte Längenänderung der Schenkel AD, AJ zur Folge.

Streng genommen bedarf das angehängte Gewicht P behufs seiner Einsetzung in Gl. (1) kleiner Correctionen wegen des Eigengewichtes des Bremsbandes mit zugehörigen Theilen und wegen der Spannungsdifferenz der Schnüre L, L'. Um erstere zu bestimmen, kann man nach Entfernung des Gewichtes P und nach Abhebung des Schnurbrettchens B vom Zapfen C, nachdem ferner alle Schrauben gelöst sind, die Kräfte $= P_1$ und P_2 ermitteln, welche tangential am Bremsbande wirkend erforderlich sind, um es beim Stillstande der Bremsscheibe aus seiner mittleren Lage heraus bezw. rechts und links herum zu drehen. Ist dann X der Betrag der noch übrig gebliebenen Reibung und P' der gesuchte Betrag, um welchen P wegen des Eigengewichtes des Bremsbandes zu vergrössern ist, so ergiebt sich:

$$X = P_1 + P' = P_2 - P', \quad \text{also } P' = \frac{P_2 - P_1}{2}.$$

Die Spannungen der Schnüre L, L' wechseln mit den Schwankungen des Bremsbandes, im Mittel ist aber die Spannung von L etwas grösser, als die von L', weil die Rechtsdrehung der Kurbelschraube einer grösseren Kraft bedarf, als ihre Linksdrehung. Würden diese Kräfte $= P_1$ und P_2 etwa durch Ueberführung der Schnüre über Leitrollen und Anhängung von Gewichten beim Stillstande des Bremsrades ermittelt, so wäre

$$P'' = \frac{P_1 - P_2}{2},$$

vergrössert im Verhältniss der betreffenden Hebelarme, die subtractiv an P anzubringende Correction. Uebrigens sind beide zusammen in der

Regel zu nur etwa $^1/_2$ Procent zu veranschlagen und deshalb zu vernachlässigen.

Der Querschnitt des Bandeisens bei dem Brauer'schen Bremsdynamometer ist mit Rücksicht auf die Maximalspannung S_1 zu bemessen, die oberhalb der Anschlussstelle des Gewichtriemens stattfindet. Dieselbe ist, unter S_2 die Minimalspannung unterhalb dieser Stelle verstanden, bei Abstraction von den kurzen Unterbrechungen der ringsum laufenden Berührungsfläche am Umfange der Scheibe:

$$S_1 = S_2\, e^{2\pi\mu} = (S_1 - P)\, e^{2\pi\mu}$$

oder

$$S_1 = \frac{e^{2\pi\mu}}{e^{2\pi\mu} - 1} P = 2{,}15\, P \text{ Kgr.},$$

wenn mit Brauer hier $\mu = 0{,}1$ angenommen wird. Bei einer zugelassenen specifischen Spannung von etwas über 5 Kgr. pro Quadratmillimeter wäre also der Querschnitt des Bandeisens:

$$F = 0{,}4\, P \text{ Quadratmillimeter}$$

und bei 2 Millimeter Dicke seine Breite:

$$b = 0{,}2\, P \text{ Millimeter}$$

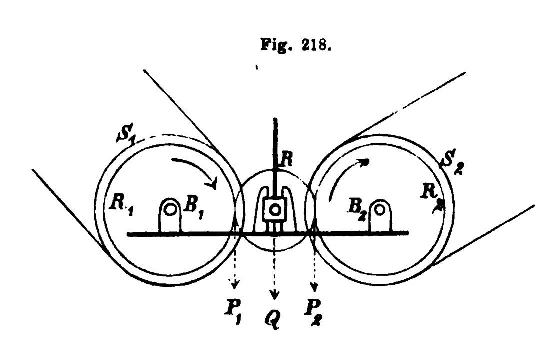
anzunehmen. Brauer benutzte bisher sein Instrument bis zu $P = 500$ Kgr., entsprechend $b = 100$ Millimeter. —

Die im Vorhergehenden vorausgesetzte horizontale Lage der Welle ist behufs möglichster Ausschliessung von störenden Nebenumständen am vortheilhaftesten. Ist aber die zu bremsende Welle vertical, so ist es bei Benutzung eines Prony'schen Zaumes mit Hebel vor Allem nöthig, den letzteren zur Vermeidung von Klemmungen mit seinem Ende an einem möglichst hoch darüber liegenden festen Punkt aufzuhängen. Zur Abwägung der Reibung R durch Gewichte P kann man dann entweder am Ende des Hebels ein Seil befestigen, welches, in horizontaler Richtung über eine feste Rolle geleitet, am herabhängenden Ende belastet wird, oder man kann dieses Seil mit dem verticalen Arme eines Winkelhebels verbinden, dessen horizontaler Arm die Belastungsgewichte trägt. Letzteres ist besser, weil dadurch nur ein sicherer in Rechnung zu stellender Zapfenreibungswiderstand und nicht zugleich ein Seilbiegungswiderstand eingeführt wird. Uebrigens ist in solchen Fällen vorzugsweise die Benutzung einer Federwaage am Platze, indem sie die Berücksichtigung solcher Nebenwiderstände entbehrlich macht.

§. 188. Transmissionsdynamometer.

1. Ein älteres, indessen nach wie vor recht brauchbares Instrument dieser Art ist die sogenannte **dynamometrische Waage von Hachette**: Fig. 218. Es enthält zwei gleiche Zahnräder R_1, R_2, fest verbunden bezw. mit den gleichen Riemscheiben S_1, S_2 und auf den Wellen B_1, B_2 fest sitzend, die in gleichen Höhen so gelagert sind, dass die Mittelebenen von R_1 und R_2, desgleichen die von S_1 und S_2 zusammenfallen.

Fig. 218.



Die Räder R_1, R_2 sind mit dem kleineren Zwischenrade R in Eingriff, dessen Lager in verticalen Führungen gleitbar und vermittels einer gegabelten Stange an einer Waage so aufgehängt sind, dass, wenn letztere einspielt, die Axe von R in der Axenebene $B_1 B_2$ liegt. Geht dann die Bewegung von $S_1 R_1$ im Sinne des beigesetzten Pfeiles aus, so sind die Theilrissdrucke P_1 und P_2, mit welchen R_1 und R_2 auf R wirken und welche der Reibungen wegen etwas verschieden gross sind, vertical abwärts gerichtet, so dass mit der Waage (mit Berücksichtigung des verhältnissmässig kleinen Eigengewichtes von R nebst Zubehör) die Summe $P_1 + P_2 = Q$ gemessen werden kann. Die Anwendung dieses Instrumentes setzt zwei horizontale Wellen A_1, A_2 voraus, die durch ein Riemengetriebe verbunden sind, um die bewegende Kraft von A_1 auf A_2 und dadurch auf eine Arbeitsmaschine zu übertragen, deren Betriebsarbeitstärke ermittelt werden soll. Dazu wird das Instrument so aufgestellt, dass die Mittelebene der Scheiben S_1, S_2 mit der Mittelebene der Riemscheiben S', S'' auf A_1 und A_2 zusammenfällt, dann nach Beseitigung des gewöhnlichen Betriebsriemens S' mit S_1 und S'' mit S_2 je durch einen besonderen Riemen verbunden. Indem nun die von der Riemenspannung herrührende Zapfenreibung der Welle B_2 derjenigen von A_1 bei unmittelbarer Verbindung zwischen A_1 und A_2 nahe gleich geachtet werden kann, so ist, unter v die Theilrissgeschwindigkeit der Räder R_1, R, R_2 und unter P den um den Betrag der Zahnreibung zwischen R und R_2 verminderten Theilrissdruck P_2 verstanden, Pr die

Arbeitstärke, welche bei directer Verbindung von A_1 abgegeben wird, um die Welle A_2 mit der betreffenden Arbeitmaschine zu treiben. Zur Bestimmung von P ist zu bedenken, dass P_2 etwas $< P_1$ ist wegen der Zahnreibung zwischen R_1 und R, sowie wegen der Zapfenreibung des Zwischenrades R, entsprechend dem Zapfendrucke $Q = P_1 + P_2$. Ist also r der Theilrisshalbmesser, ϱ der Zapfenhalbmesser von R, μ der Zapfenreibungscoefficient, z die Zähnezahl von R, z_1 dieselbe von R_1 und R_2, μ' der Zahnreibungscoefficient, so ist zu setzen:

$$P_2 = P_1 (1 - m) - \mu \frac{\varrho}{r} Q \quad \text{mit} \quad m = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}\right) \pi \mu'$$

nach §. 76, Gl. (4), oder mit $P_1 = Q - P_2$:

$$P_2 (2 - m) = Q\left(1 - m - \mu \frac{\varrho}{r}\right)$$

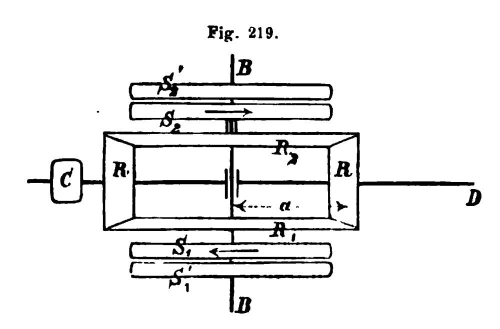
oder mit Rücksicht darauf, dass m ein kleiner Bruch ist:

$$P_2 = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{m}{2} - \mu \frac{\varrho}{r}\right)$$

$$P = P_2 (1 - m) = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{3}{2} m - \mu \frac{\varrho}{r}\right) \quad \ldots \ldots (1).$$

2. Das Dynamometer von White, verbessert von Batchelder*, unterscheidet sich vom vorigen dadurch, dass die Cylinderräder durch Kegelräder ersetzt sind, und dass der Apparat durch seine engere Verbindung mit dem Waagebalken compendiöser gemacht ist. Auf der Welle BB, Fig. 219, sitzt die Riemscheibe S_1 fest, S_2 lose; S_1' und S_2' sind Leerscheiben dicht daneben. Das Kegelrad R_1 ist mit S_1 fest auf BB, R_2 mit S_2 fest verbunden, also auch lose auf BB. CD ist ein um BB lose drehbarer Hebel, um welchen ihrerseits die

Fig. 219.



Räder R, R lose drehbar sind; C ist ein Gegengewicht, durch welches der Schwerpunkt des Hebels in die Axe BB gebracht wird. Am Ende D

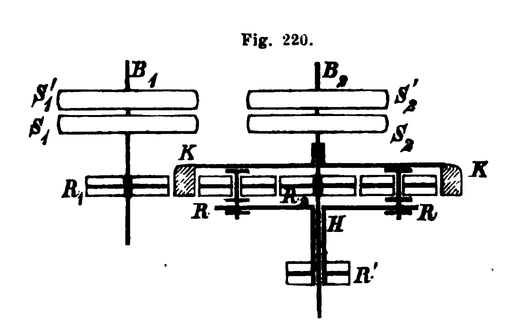
* Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen, Jahrg. 1843, S. 216.

wird der Hebel durch Gewichte belastet oder an eine Federwaage angeschlossen, so dass er, während die von den Maschinenwellen A_1 und A_2 herkommenden Riemen auf S_1 und S_2 liegen und diese Scheiben im Sinne der beigesetzten Pfeile (von oben gesehen) rotiren, horizontal schwebend im Gleichgewicht ist.

Denkt man sich das Rad R links bei C, welches eigentlich nur als Gegengewicht dient, beseitigt, so erkennt man, dass die Wirkung des Instrumentes und seiner gleich bezeichneten Theile ganz dieselbe ist wie die der dynamometrischen Waage von Hachette, Fig. 218; nur fallen hier die dort mit B_1 und B_2 bezeichneten Drehungsaxen in der Geraden BB zusammen, und sind die Theilrissdrucke P_1 und P_2 der Räder R_1 und R_2 auf das rechts dazwischen liegende Rad R hier vertical aufwärts gerichtet. Es gilt hier wie dort die Gleichung (1), wenn unter Q die auf den Hebelarm a, Fig. 219, reducirte Belastung des Hebels verstanden wird. Dass die Mittelebenen von S_1 und S_2 nicht zusammenfallen, kann bei der Aufstellung und Benutzung des Instrumentes zuweilen störend sein.

3. Das Instrument, welches Prof. Hartig zur Messung der Betriebsarbeitstärke von Arbeitsmaschinen mehrfach mit gutem Erfolg benutzt hat, ist seinem Wesen nach durch Fig. 220 angedeutet.* Auf den horizontal in gleicher Höhe liegenden Wellen B_1 und B_2 sind die Riemscheiben S_1 und S_2 fest, S_1' und S_2' lose; ebenso wie bei den vorbesprochenen Instrumenten empfängt S_1 die Bewegung von der treibenden Transmissionswelle A_1, während sie durch S_2 auf die

Fig. 220.



getriebene Welle A_2 und somit auf die zu prüfende Arbeitsmaschine übertragen wird. Auf B_1 und B_2 sitzen fest bezw. die Zahnräder R_1 und R_2. Lose drehbar um B_2 vermittels eines seitlich damit verschraubten Armsystems mit Nabe ist ein aussen und innen verzahnter Kranz K, dessen äussere Verzahnung mit R_1 in Eingriff ist. Zwischen der inneren und dem Rade R_2, mit beiden in Eingriff, sind zwei Räder R eingeschaltet von einerlei Radius $= r$ mit R_2; sie sind drehbar um Bolzen, die von den diametral entgegengesetzten Armen einer um B_2 lose dreh-

* Rühlmann: „Allgemeine Maschinenlehre“, Bd. I, 2. Aufl., S. 232.



baren langen Hülse H getragen werden. Indem ferner der Theilrisshalbmesser der äusseren Verzahnung von K zu dem des Rades R_1 in demselben Verhältnisse $=3$ steht wie der innere Theilrisshalbmesser von K zum Radius r von R_2, so sind, wenn die Hülse H festgehalten wird, die Winkelgeschwindigkeiten der Wellen B_1 und B_2 gleich gross, nämlich beide dreimal so gross, wie die des Zahnkranzes K. Ist nun, abgesehen zunächst von Reibungswiderständen, P der Theilrissdruck des Rades R_2 an seinen zwei gegenüber liegenden Eingriffstellen zusammen $=$ dem gesammten Theilrissdrucke der inneren Verzahnung von K, so erfahren die Bolzen, um welche die Räder R drehbar sind, zusammen den Druck $Q=2P$, der zur Hälfte auf den einen, zur Hälfte im entgegengesetzten Sinne auf den andern Bolzen ausgeübt wird. Die durch das Moment $Q.2r$ angestrebte Drehung der Hülse H wird nun aber dadurch gehindert und gleichzeitig Q dadurch gemessen, dass diese Hülse an ihrem anderen Ende ein Zahnrad R' trägt, welches in eine vertical geführte, unten an ein Morin'sches Zugdynamometer (§. 182, Fig. 203) angeschlossene Zahnstange eingreift. Ist dann S die durch letztere ausgeübte Zugkraft des Dynamometers, so ist, unter r' den Theilrisshalbmesser von R' verstanden und zunächst wieder abgesehen von Reibung:

$$Q=S\frac{r'}{2r}, \quad \text{also } P=\frac{1}{2}Q=\frac{1}{4}S\frac{r'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

und die gesuchte Arbeitstärke A, entsprechend der Peripheriegeschwindigkeit v des Rades R_2, bezw. der Umdrehungszahl n von B_1 und B_2 pro Minute:

$$A=Pv=\frac{1}{4}S\frac{r'}{r}\frac{n}{60}.2\pi r=\frac{\pi}{120}nSr' \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Meterkgr. pro Sec., falls S in Kgr., r' in Mtr. ausgedrückt ist.

Mit Rücksicht auf die Reibungswiderstände ist ebenso wie bei den unter 1. und 2. besprochenen Instrumenten der Theilrissdruck $=P_2$ zwischen R und R_2 etwas kleiner, als derselbe $=P_1$ zwischen K und R, und bleibt auch P_2 nicht ganz zum Antrieb der Welle B_2 verwendbar. Bezeichnet z die Zähnezahl der Räder R, R_2 und $z_1=3z$ die der innern Verzahnung von K, ferner ϱ den Halbmesser der Bolzen, um welche die Räder R drehbar sind, so ist mit

$$m=\frac{2}{z}\pi\mu' \quad \text{und} \quad m_1=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_1}\right)\pi\mu'=\frac{2}{3}\frac{1}{z}\pi\mu'=\frac{m}{3}$$

analog Gl. (1) die zum Antrieb von B_2 am Hebelarme r verfügbare Kraft:

$$P = P_2(1-m) = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{m_1}{2} - \mu\frac{\varrho}{r}\right)(1-m)$$

$$= \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{7}{6}m - \mu\frac{\varrho}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Was die Beziehung zwischen Q und S betrifft, so ist zu bedenken, dass die Wellen B_1 und B_2 in gleichem Sinne, etwa links herum rotiren, der Zahnkranz K und die Räder R in entgegengesetztem Sinne, also rechts herum, und dass somit auch das Moment $Q.2r$ rechts drehend auf die Hülse H wirkt, entgegen dem links drehenden Momente Sr'. Letzteres wird unterstützt durch das gleichfalls links drehende Moment der durch S bedingten Reibung zwischen der Hülse und der darin links rotirenden Welle B_2, deren Radius $=\varrho'$ sei. Die Gleichgewichtsbedingung ist somit:

$$Q = S\left(1 + \mu\frac{\varrho'}{r'}\right)\frac{r'}{2r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Die Zahnreibung zwischen R' und der Zahnstange kommt hier nicht in Betracht, weil sie bei den Schwankungen des Gleichgewichtszustandes bald im Sinne von S, bald entgegengesetzt wirksam ist und damit nur die Empfindlichkeit und Genauigkeit der Messung etwas beeinträchtigt. Aus (4) und (5) folgt:

$$P = \frac{1}{4}S\frac{r'}{r}\left[1 - \frac{7}{6}m - \mu\left(\frac{\varrho}{r} - \frac{\varrho'}{r'}\right)\right]$$

und ist also

$$\alpha = 1 - \frac{7}{6}m - \mu\left(\frac{\varrho}{r} - \frac{\varrho'}{r'}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

der Factor, mit welchem der Ausdruck (2) von P und somit auch der Ausdruck (3) von A multiplicirt werden muss, um den Reibungswiderständen Rechnung zu tragen. Uebrigens sind hier die Reibungscoefficienten kaum zuverlässig im Voraus zu schätzen, auch ist die Reibung der Welle B_2 in ihren Lagern und in der Hülse H ohne Zweifel grösser. als die von der Arbeitsübertragung auf A_2 herrührende Lagerreibung der Transmissionswelle A_1. Soll gar der Ausdruck von A nicht sowohl die zum Betriebe der betreffenden Maschine von der Welle A_1 abzugebende, sondern die von A_2 zu empfangende Arbeitstärke darstellen, so wird der Correctionsfactor α wegen des gesammten Widerstandes, welcher dem die Wellen B_2 und A_2 verbindenden Riemengetriebe eigenthümlich ist, noch wesentlich kleiner. Am besten ist er deshalb experi-

mentell im Ganzen zu bestimmen; z. B. fand Hartig für ein solches von ihm benutztes Instrument: $\alpha = 0{,}893$.*

4. Das Transmissionsdynamometer von Bourdon** benutzt den axialen Seitendruck, welchen zwei in Eingriff stehende Räder R_1, R_2 mit parallelen Axen B_1, B_2 bei der Kraftübertragung auf einander ausüben, wenn ihre Zähne unter einem gewissen Winkel α gegen die Axen geneigt sind. Es zerfällt dann nämlich der in der gemeinsamen Mittelebene wirksame Theilrissdruck P in die Normalcomponente $P \sec \alpha$ (normal zu den sich berührenden Zahnflächen gerichtet) und die Axialcomponente $P \operatorname{tg} \alpha$, aus deren Messung auf P selbst geschlossen werden kann. Zur Ausführung dieses Gedankens ist die das Rad R_2 tragende Welle B_2 des Instruments, durch einen Riemen mit der zu treibenden Welle A_2 der Lastmaschine verbunden, unverschieblich zwischen Spitzzapfen gelagert, dagegen die mit der treibenden Transmissionswelle A_1 durch einen Riemen verbundene Welle B_1 des Rades R_1 mit langen cylindrischen Zapfen versehen, die sich in ihren Lagern verschieben können. Bei dieser infolge der Kraftübertragung stattfindenden Verschiebung stützt sich B_1 mit dem vorderen Zapfen gegen eine Stahlfeder, deren entsprechende Deformation, indem sie durch einen ungleicharmigen Hebel vergrössert von einem Zeiger auf einer empirisch getheilten Skala angezeigt wird, die verschiebende Kraft $P \operatorname{tg} \alpha$ misst. Die Skala lässt sich so theilen, dass sie eine unmittelbare Ablesung des Theilrissdruckes P gestattet. Von den Rädern R_1, R_2 muss eines um den Betrag der Maximalverschiebung von B_1 breiter sein, als das andere.

So einfach dieses Instrument im Princip ist, lässt sich eine grössere Genauigkeit von demselben kaum erwarten wegen der das Verhältniss der Axialkraft zur Theilrisskraft P erheblich störenden Reibung, die der relativen Verschiebung nach der Breitenrichtung der Zähne entgegen wirkt und bei den Schwankungen des Deformationszustandes der Feder bald im einen, bald im umgekehrten Sinne auftritt. Die nach der Längenrichtung der Zähne gerichtete Reibung wirkt natürlich stets in einerlei Sinn und trägt zur Vermehrung des jeweils in Anschlag zu bringenden Arbeitsverlustes bei, der mit der Kraftübertragung von B_1 auf A_2 verbunden ist. Um es in dieser Hinsicht nur mit einer Uebertragung von B_2 auf A_2 zu thun zu haben, erscheint es besser und

* Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Flachs- und Wergspinnerei, Leipzig 1869, nach Rühlmann a. a. O.

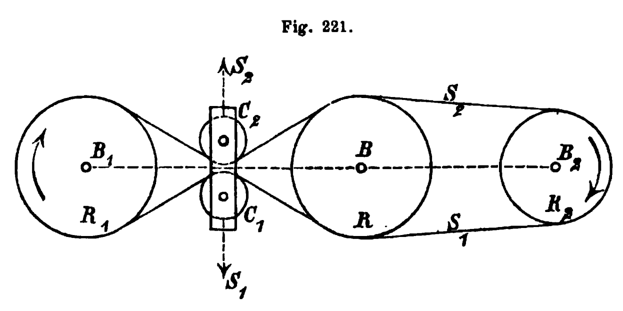
** Armengaud, Génie industrielle, Juillet 1860.



ebenso einfach thunlich, bei fester Lagerung von B_1 die Welle B_2 verschieblich einzurichten zur Messung der ihre Verschiebung anstrebenden Axialkraft.

5. Bei dem von Elihu Thomson als Nachbildung eines solchen von v. Hefner-Alteneck beschriebenen Transmissionsdynamometer* ist die Verwendung von Zahnrädern vermieden, indem nach Fig. 221 die horizontalen Wellen B_1, B_2, von welchen wieder jene die Bewegung empfängt, um sie durch diese auf die zu prüfende Lastmaschine fortzupflanzen, durch ein Riemengetriebe verbunden sind unter Einschaltung einer lose mitlaufenden Scheibe R von gleichem Radius r mit der Scheibe R_1 auf B_1, und deren Welle B in gleicher Höhe mit B_1 parallel ist. Die Entfernung BB_1 ist $= 4r$, so dass die gekreuzten gemeinsamen Tangenten der Umfangskreise R, R_1 sich unter 60^0 schneiden. Längs diesen Tangenten ist der Riemen durch die Rollen C_1, C_2 geleitet, die um horizontale Axen von entsprechender Entfernung drehbar in einem vertical geführten und oben an eine Waage gehängten Rahmen gelagert sind. Bei dem durch die Pfeile angezeigten Drehungssinne ist die untere Riemenspannung S_1 grösser, als die obere S_2 um den Betrag der Umfangskraft P, welche durch die Waage unmittelbar gemessen wird, indem auf den Rahmen der untere Riemen den Verticaldruck

Fig. 221.



$$S_1 = 2\, S_1 \cos 60^0$$

abwärts, der obere ebenso den Verticaldruck S_2 aufwärts ausübt. Ist also v die Riemengeschwindigkeit, so ist abgesehen von Nebenwiderständen, die experimentell zu bestimmen sind, die auf die Welle B_2 übertragene Arbeitstärke $= Pv$.

6. Die im Vorhergehenden unter 1. bis 5. besprochenen Arbeitsmesser setzen das Vorhandensein von Riementransmission voraus, die zur Einschaltung des Instrumentes an irgend einer Stelle jederzeit leicht durch Abschlagung des betreffenden Riemens unterbrochen werden kann.

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1881, S. 317.



In der That ist bei Rädertransmission die Einfügung eines Messinstrumentes von der genannten Art ohne umständliche Vorbereitung kaum ausführbar, und kann dann zuweilen das dynamometrische Zapfenlager von Rittinger mit Vortheil gebraucht werden. Ist nämlich AB eine bei A und B gelagerte horizontale Transmissionswelle von der Länge l, von Lagermitte zu Lagermitte gerechnet, und sind R, R_1 zwei auf ihr bezw. in den Abständen a, a_1 von A fest sitzende Zahnräder mit den Theilrisshalbmessern r, r_1, von denen etwa R den Theilrissdruck P unter dem Winkel α gegen die Verticale geneigt empfängt, um ihn durch R_1 mit der Intensität P_1 und unter dem Winkel α_1 gegen die Verticale geneigt fortzupflanzen, so erfährt hierdurch im Betriebe der verticale Zapfendruck bei B den Zuwachs:

$$Q = \frac{1}{l}(P \cos\alpha \,.\, a + P_1 \cos\alpha_1 \,.\, a_1)$$

oder mit $P_1 = P\frac{r}{r_1}$ (abgesehen von der Zahnreibung):

$$Q = \frac{P}{l}\left(a \cos\alpha + \frac{r}{r_1}\, a_1 \cos\alpha_1\right),$$

woraus umgekehrt folgt:

$$P = \frac{Q l}{a \cos\alpha + \frac{r}{r_1}\, a_1 \cos\alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Um die Kraft Q jederzeit während des Betriebes ohne umständliche Vorbereitung messen zu können, wird das Zapfenlager B auf einen Hebel gesetzt, der in einem geschlitzten Ständer geführt und darin gewöhnlich festgekeilt ist. Behufs der Messung sind dann nur die Keile loszuschlagen und ist der Hebel an eine Waage zu hängen. Ist S die im Gleichgewichtszustande beobachtete Kraft am angehängten Hebelende und S_0 der ein für allemal ausprobirte Theil von S, welcher dem Eigengewichte der Welle sammt Rädern, Zapfenlager B und Hebel entspricht, so ist $Q = S - S_0$, multiplicirt mit dem betreffenden Hebelverhältnisse.

Diese Vorrichtung ist zwar einfach und leicht zu gebrauchen, lässt aber meistens nicht eine ebenso grosse Genauigkeit der Messung zu, wie die vorbeschriebenen Instrumente, durch welche die gesuchte Theilrisskraft P allein gemessen wird und nicht, wie hier, in Verbindung mit einer anderen Kraft (obigem S_0 entsprechend), die vielleicht viel grösser als P ist.

§. 189. Totalisirende Arbeitsmesser.

Als solche können alle im Vorhergehenden besprochenen Arbeitsmessinstrumente eingerichtet werden, wenn bei ihnen die Kraftmessung durch eine Federwaage, bezw. ein Federdynamometer, überhaupt vermittels der Deformation eines elastischen Körpers geschieht, der dazu mit einem Schreibstift zu verbinden ist, an welchem ein Papierstreifen mit einer der Maschinengeschwindigkeit proportionalen oder mit constanter Geschwindigkeit entlang bewegt wird. So ist z. B. an der Hülse H des Dynamometers von Hartig, Fig. 220, zwischen dem die Räder R, R tragenden Doppelarme und dem in die verticale Zahnstange eingreifenden Rade R' noch ein längerer Arm befestigt mit einem Zahnsector, der in eine zweite, in grösserer Entfernung von der Hülse vertical geführte Zahnstange eingreift; ein mit dieser verbundener Schreibstift macht also die Verticalbewegungen der ersten Zahnstange in vergrössertem Massstabe mit und verzeichnet sie als Ordinatenfolge einer Curve auf einem Papierstreifen, der durch ein Schneckengetriebe von der Welle B_1 aus und folglich mit einer ihrer Winkelgeschwindigkeit proportionalen kleinen Geschwindigkeit nach horizontaler Richtung am Stifte vorbeigeführt wird.

Unmittelbar ist eine solche totalisirende Messung durch eine elastische Kuppelung zu erreichen, d. h. durch einen federnden Körper, der in die Transmission selbst eingefügt ist und sich mit ihr bewegt, indem er die Betriebskraft überträgt. Während diese Einrichtung wegen der Schwierigkeit, die Deformation des in Bewegung begriffenen Kupplungskörpers genau zu messen, zu augenblicklichen Ablesungen sich weniger eignet, liefert sie das einfachste, hier ausschliesslich vorausgesetzte Mittel zu totalisirender Messung, nämlich zur Aufzeichnung der betreffenden Deformation vermittels eines mitbewegten Registrirwerkes.

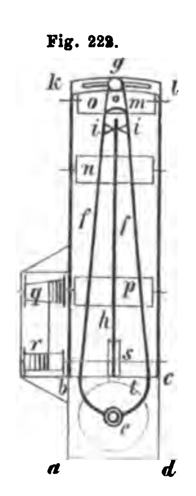
Als Beispiel diene die von Regnier angegebene und von Morin verbesserte dynamometrische Kurbel. Nach einer Ausführung derselben von Clair* in Paris wird auf der Kurbelwelle statt der gewöhnlichen Kurbel eine cylindrische Büchse befestigt, die mit einer Platte

* Rühlmann: Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, 2. Aufl., Fig. 155 und Fig. 156.



abcd, Fig. 222, endigt, von welcher ein mit der Kurbelwelle coaxialer Zapfen *e* hervorragt. Auf diesen ist die durchbrochene Kurbel *ff* lose drehbar aufgesteckt; innerhalb derselben befindet sich eine gerade Blattfeder *h*, die einerseits an der Platte *abcd* befestigt ist, andrerseits von zwei einander zugekehrten Keilschneiden *i*, *i* der Kurbel zwischen sich gefasst wird. Wird also diese am Handgriffe *g* gedreht, so kann die Kurbelwelle nur vermittels der Feder *h*, die sich dabei entsprechend biegt, mitgenommen werden; ein Schlitz am Ende *kl* des an die Platte *abcd* angefügten Rahmens *bklc* dient hierbei dem Kurbelzapfen als Führung. Um nun die Durchbiegung der Feder, somit die nach auszuprobirendem Verhältnisse ihr proportionale Grösse der auf den Hebelarm *ei* reducirten Triebkraft in jedem Augenblicke aufzuzeichnen, trägt die Kurbel bei *m* einen Bleistift, der auf einem in radialer Richtung entlang bewegten Papierstreifen eine Curve zeichnet, während eine gerade sogenannte Null-Linie von einem zweiten Bleistifte gezeichnet wird, der in der Mitte des Rahmenstücks *kl* seine unverrückbare Führung findet. Der Papierstreifen wickelt sich von der mit einiger Reibung drehbaren Walze *n* ab, geht über die Walze *o* an den Bleistiften vorbei und wird auf die Walze *p* aufgewickelt. Letztere muss also so bewegt werden, dass trotz ihres zunehmenden Umfanges ihre Umfangsgeschwindigkeit, mithin die Geschwindigkeit des Papierstreifens beständig der Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle proportional bleibt. Analog der durch Fig. 204, §. 182, dargestellten Einrichtung dient dazu der Kegel *q*, durch einen Seidenfaden vom Cylinder *r* in Umdrehung gesetzt. Indem die Conicität von *q* so bemessen ist, dass die Radien von zwei benachbarten Fadenwindungen um die Papierdicke verschieden sind, entspricht der Forderung ein constantes Winkelgeschwindigkeitsverhältniss von *r* und der Kurbelwelle, hier vermittelt durch den Eingriff eines auf der Axe von *r* sitzenden Schraubenrades *s* mit einem entsprechend verzahnten Radkranze *t*, der in einer ringsum laufenden Nuth der cylindrischen Büchse des Instrumentes drehbar ist; während aber thatsächlich diese Büchse mit der Kurbel sich dreht, wird *t* festgehalten, indem z. B. ein am Maschinengestell befestigter starker Draht sich gegen eine seitlich vorstehende Nase des Zahnkranzes *t* stützt. —

Fig. 222.



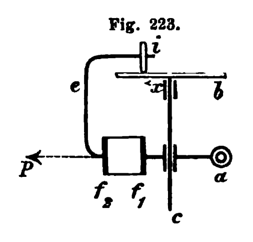
Dieses Princip der unmittelbaren Einschaltung eines die Triebkraft übertragenden Federdynamometers findet vorzugsweise dann Anwendung,



wenn es sich nicht sowohl um eine rotirende, als vielmehr um eine Progressivbewegung handelt und die zur Bewältigung des Widerstandes dieser Bewegung für eine gewisse Wegstrecke aufzuwendende Arbeit gemessen werden soll, insbesondere die Arbeit zur Fortbewegung von Fuhrwerken, z. B. eines Eisenbahnwagens oder Eisenbahnzuges auf dem Schienengleise, einer landwirthschaftlichen Maschine auf dem Felde u. s. w. Eine solche, von einem einzuschaltenden Wagen getragene Vorrichtung, bestehend aus einem Morin'schen Blattfederdynamometer in Verbindung mit einem Registrirapparat, wurde schon im §. 182 mit Bezugnahme auf Fig. 204 daselbst besprochen. Die dabei ebenso wie bei der dynamometrischen Kurbel angewendete Registrirung durch Bleistifte und einen bewegten Papierstreifen ist indessen mit Uebelständen behaftet, besonders in feuchter Atmosphäre, wodurch das Papier feucht und weich wird; auch ist die jedesmalige Ausrechnung des Inhaltes der einerseits von der geraden, andrerseits von der unregelmässig krummen Linie begrenzten Fläche unbequem.

Diese Uebelstände werden vermieden durch eine auch von Morin herrührende und von Clair ausgeführte Einrichtung des Instrumentes, welche zur Bestimmung der gesuchten Arbeit lediglich die Ablesung eines Zählwerkes ohne weitere Rechnung, als die Multiplication mit einem constanten Factor erfordert. Das zu Grunde liegende Princip besteht ähnlich wie bei gewissen zur mechanischen Ausmessung von ebenen Flächen dienenden Planimetern (§. 134) darin, dass man eine ebene Scheibe mit einer der Progressivgeschwindigkeit v proportionalen Winkelgeschwindigkeit ω rotiren lässt, während eine auf dieser Scheibe mit rechtwinklig gekreuzter Axe sich abwälzende Frictionsrolle ihren Ort so ändert, dass der Abstand x des Berührungspunktes vom Mittelpunkte der Scheibe stets der aufgewendeten Zug- oder Druckkraft P proportional ist; indem dann die Umdrehungszahl in einer gewissen Zeit proportional $x\omega$ ist, ist sie auch proportional Pv.

Fig. 223.



In Figur 223 sind f_1 und f_2 die Querschnitte der horizontal liegend gedachten Federn eines Morin'schen Dynamometers, von welchen erstere f_1 mit ihrer Fassung bei a an den eingeschalteten Wagen angehängt ist, während die andere von der bewegenden Kraft P angegriffen wird. Die Scheibe b wird mit ihrer Axe c in eine der Progressivgeschwindigkeit des Wagens proportionale Winkelgeschwindigkeit versetzt, z. B. vermittels einer Schnur.

welche mit Benutzung entsprechender Leitrollen über eine Schnurscheibe auf c und eine andere geführt ist, die auf einer der mit den Rädern fest verbundenen Wagenaxen sitzt. Macht dann c etwa m Umdrehungen bei einer Umdrehung der Wagenaxe und ist d der Durchmesser des Wagenrades, so ist für den Weg w des Wagens die Umdrehungszahl der Scheibe b:

$$n = m\frac{w}{\pi d} = \alpha w \text{ mit } \alpha = \frac{m}{\pi d} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Mit der Feder f_2 ist ein die Frictionsrolle i enthaltendes Gehäuse durch einen etwas federnden Arm e verbunden, so dass die aus einem Schlitz im Boden des Gehäuses hervorragende Rolle sanft gegen b angedrückt wird. Die Axe von i ist parallel der Kraft P längs einem Radius von b gerichtet, und es sitzt i an einer solchen Stelle dieser Axe, dass für $P=0$ auch $x=0$, also beständig x proportional P, nämlich nach §. 182, Gl. (1):

$$x = \beta P \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{8\,l^3}{E b h^3} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist, unter l die halbe Länge, b die Breite, h die grösste Dicke und unter E den Elasticitätsmodul der Federn verstanden. Nun ist, während der Wagen den Weg w durchläuft, die Umdrehungszahl u der Frictionsrolle i, deren Radius $= r$ sei:

$$u = \frac{x}{r} n = \frac{\beta P}{r} \alpha w \quad \text{nach (1) und (2)},$$

und folglich die gesuchte Arbeit:

$$A = Pw = \frac{r}{\alpha\beta} u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Um A durch Multiplication mit dem ein für allemal bekannten Factor $\frac{r}{\alpha\beta}$ zu finden, braucht also nur u gezählt zu werden, etwa mit Hülfe eines Zählwerkes von der durch Fig. 130, §. 130, angedeuteten Art, welches zugleich mit der Frictionsrolle i in demselben Gehäuse enthalten ist.

Der von dem englischen Mechaniker Bental besonders zu landwirthschaftlichen Zwecken vielfach ausgeführte Arbeitsmesser* unterscheidet sich von dem vorbesprochenen durch die Anordnung der einzelnen

* Rühlmann: Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, 2. Auflage, §. 46, Fig. 148—150.



Theile und dadurch, dass die Blattfedern durch eine kräftige Spiralfeder ersetzt sind; auch ist eine besondere Registrirvorrichtung für die jeweilige Grösse der Zugkraft P mit dem Instrumente verbunden.

Ein Uebel, woran alle diese Instrumente leiden, ist die Schwierigkeit, das zeitweilige Gleiten der Frictionsrolle mit Sicherheit zu vermeiden, eine Schwierigkeit, die um so grösser ist, je mehr sich das Instrument bei seinem Gebrauche unter dem störenden Einflusse von Erschütterungen befindet. Auch ist diese Rolle unvermeidlicher Abnutzung unterworfen; jedenfalls muss ihr Umfang von Zeit zu Zeit sorgfältig gemessen werden, um danach den Factor von u gemäss Gl. (3) zu corrigiren. —

Schliesslich mag noch gewisser Transmissionsdynamometer Erwähnung geschehen, welche zwar, auf dem Princip der elastischen Kuppelung beruhend, dadurch vor Allem zu totalisirender Messung, jedoch auch gleichzeitig mit Hülfe entsprechender Mechanismen zu augenblicklicher Ablesung geeignet sind. Dahin ist u. A. das Dynamometer von Schuckert zu rechnen, welches zwei auf derselben kurzen Welle dicht neben einander befindliche, am Umfange durch Schraubenfedern gekuppelte Riemscheiben besitzt, von welchen die eine als treibende Scheibe fest, die andere als getriebene (durch die Schraubenfedern von jener mitgenommene) lose auf der Welle ist. Letztere ist hohl und enthält in ihrer Höhlung eine Stange, die infolge der relativen Verdrehung der losen gegen die feste Scheibe um eine dieser Verdrehung und somit der Triebkraft proportionale Strecke mit Hülfe eines Schrauben- und Hebelmechanismus axial verschoben wird. Hiernach hatte es weiter keine Schwierigkeit, die stetige Folge dieser Verschiebungsgrössen nicht nur durch einen Schreibstift zu registriren, sondern auch auf einer Skala zu augenblicklicher Ablesung sichtbar zu machen.

Bemerkenswerth ist insbesondere auch das sogenannte Pandynamometer von Hirn,* bekannt geworden durch die Weltausstellung in Wien vom Jahre 1867. Es zeichnet sich dadurch aus, dass es für Maschinen von jeder beliebigen Arbeitstärke, einerlei ob mit Riemenoder Rädertransmission, gleicher Weise geeignet ist, indem es selbst durch die Triebkraft der Maschine nicht in Anspruch genommen wird, auch zu seiner Benutzung keinerlei Unterbrechung und sonstige vorbereitende

* Le Pandynamomètre, appareil propre à déterminer le travail mécanique produit par un moteur ou consommé par une machine, par M. G. A. Hirn. Paris, 1867.



Aenderung der Transmission erfordert. Es beruht darauf, dass alle Maschinentheile unter dem Einflusse der auf sie wirkenden Kräfte gewissen Deformationen unterliegen, und benutzt insbesondere zur Messung des von einer Welle übertragenen Kraftmomentes an Stelle einer elastischen Kuppelung die durch dieses Moment verursachte Torsion eines möglichst langen Stückes $A_1 A_2$ der mit einer gewissen (gleichzeitig zu messenden) Winkelgeschwindigkeit ω rotirenden Transmissionswelle. Um diese Torsion zu messen, dient eine dem Dynamometer von Batchelder, Fig. 219, ähnliche Vorrichtung, indem die Kegelräder R_1 und R_2 in entgegengesetzte Drehungen mit der Winkelgeschwindigkeit ω versetzt werden durch fein getheilte Cylinderräder R', R'', welche, aus je zwei Hälften zusammenschraubbar, bei A_1 und A_2 auf der Welle befestigt werden und mit ihnen gleichen, bezw. mit R_1 und R_2 coaxial (in grösseren Entfernungen, als Fig. 219 zeigt) fest verbundenen Rädern S_1, S_2 gepaart sind, und zwar R' mit S_1 durch unmittelbaren Eingriff, R'' und S_2 vermittels eines Zwischenrades. Ein relativer Verdrehungswinkel α der Wellenquerschnitte A_1, A_2 verursacht dann eine ebenso grosse relative Verdrehung der Räder R_1, R_2 und durch Vermittlung des Zwischenrades R, Fig. 219, den Neigungswinkel $\frac{1}{2}\alpha$ des Hebels CD gegen die Lage, welche ihm beim Leergange oder Ruhezustande der Maschine, also ohne Torsion der Welle $A_1 A_2$ zukommt. Im Gegensatze zu dem früher besprochenen, durch Fig. 219 dargestellten Transmissionsdynamometer kann das Instrument in allen seinen Theilen sehr leicht construirt sein, da es nicht selbst die Betriebskraft zu übertragen hat; unwesentlich und nur die constructive Ausführung betreffend ist es, dass bei dem Pandynamometer von Hirn die Räderpaare R_1, S_1 und R_2, S_2 je auf getrennten coaxialen Wellen B_1, B_2 sitzen, während zwischen ihnen der Hebel CD mit Körnerspitzen coaxial leicht drehbar angeordnet ist. Wesentlich ist aber die Vergrösserung des stets nur sehr kleinen Neigungswinkels $\frac{1}{2}\alpha$ des Hebels CD; herbeigeführt wird sie durch seine Verbindung mit einem zweiten Hebel, der am Ende einen in ein Zahnrädchen eingreifenden Zahnsector trägt. Es ist einleuchtend, wie dann ebensowohl der vergrösserte Torsionswinkel an der Stellung eines mit dem Zahnrädchen verbundenen Zeigers Z jederzeit beobachtet, als auch stetig registrirt werden kann auf einer mit dem Zahnrädchen verbundenen Papiertrommel T durch einen Schreibstift, der durch besonderen Mechanismus an dieser Trommel axial entlang geführt wird. Schliesslich bleibt nur übrig,

experimentell die Beziehung zwischen dem Torsionswinkel der Welle, bezw. dem grösseren Drehungswinkel des Zeigers Z oder der Trommel T und einem bekannten Kraftmomente zu ermitteln, welches das Wellenstück $A_1 A_2$ auf Torsion in Anspruch nimmt, indem dazu die Welle, während sie ausser Zusammenhang mit der übrigen Transmission, aber mit dem Messinstrumente durch die Räder R', R'' verbunden ist, dicht ausserhalb der letzteren an aufgeklemmten, entgegengesetzt horizontal gerichteten Hebeln belastet wird. In Betreff der Einzelheiten, die bei der Einrichtung und beim Gebrauch des Instrumentes zur Sicherung der Resultate zu beachten sind, muss hier auf oben genannte Quelle verwiesen werden, desgleichen in Betreff einer anderen Anordnung, bei welcher Hirn einen elektrischen Strom zur Messung des Torsionswinkels benutzt, einer Einrichtung, welcher er indessen selbst die oben beschriebene für den technischen Gebrauch vorzieht.

§. 190. Der Indicator.

Die Benutzung dieses Instrumentes zu totalisirender Arbeitsmessung, falls die bewegende Kraft oder der zu bewältigende Widerstand durch eine Flüssigkeit im weiteren Sinne des Wortes ausgeübt wird, ist in allen solchen Fällen so gleichartig, dass es genügt, hier zu grösserer Einfachheit des Ausdruckes seine hauptsächlichste Verwendung zu Grunde zu legen, nämlich zu graphischer Registrirung der Spannungen, welche im Cylinder einer Dampfmaschine bei den aufeinander folgenden Lagen des Kolbens oder auch anderer bewegter Maschinentheile, insbesondere der Steuerungsorgane stattfinden, um daraus auf die Arbeit des Dampfdruckes auf den Kolben pro Hub desselben und zugleich auf die regelrechte Beschaffenheit der Maschine, namentlich ihrer Steuerung zu schliessen. Es ist eine Erfindung von James Watt und hat ihm für die Vervollkommnung seiner Dampfmaschine wesentliche Dienste geleistet. Constructive Verbesserungen erfuhr der Indicator namentlich durch Hopkinson, Mac Naught, Combes, Garnier, Richards, Thompson und durch die Fabrikanten desselben, unter welchen vor Allen in Deutschland Schäffer & Budenberg in Buckau-Magdeburg, sowie Dreyer, Rosenkranz & Droop in Hannover zu nennen sind.

Die Einrichtung des Indicators ist im Wesentlichen folgende. In einem beiderseits offenen Hohlcylinder C von höchstens wenigen Centimetern Weite ist ein ungeliederter und möglichst leichter Kolben K

mit so wenig Reibung beweglich, als es mit Rücksicht auf hinreichend dampfdichten Schluss erreicht werden kann. Auf der einen Seite des Kolbens, die zur Unterscheidung und der üblichen Lage beim Gebrauch entsprechend als obere bezeichnet sei, findet beständig atmosphärischer Druck statt, auf der andern, also unteren kann der Cylinder C durch einen Hahn entweder auch mit der Atmosphäre oder mit dem Cylinderraume einer Dampfmaschine (am einen oder andern entsprechend dazu angebohrten Cylinderdeckel) in Communication gesetzt werden. Auf der obern Seite ist der Kolben K mit einer gleichfalls möglichst leichten Kolbenstange S und mit einer die letztere coaxial umgebenden Schraubenfeder F verbunden, die mit ihrem andern Ende am Cylinder C befestigt ist, bezw. an einem fest damit verbundenen und ihn umschliessenden weiteren Cylinder C', durch dessen Deckel die Kolbenstange S oben geführt wird. Findet nun auf der unteren Seite ein vom Atmosphärendrucke verschiedener Dampfdruck auf den Kolben statt, so wird derselbe in C verschoben und die Feder entsprechend zusammengedrückt oder ausgedehnt um einen Betrag, der in einem experimentell zu ermittelnden Verhältnisse der specifischen Druckdifferenz unter- und oberhalb des Kolbens, ausgedrückt z. B. in Atmosphären oder in Kilogrammen pro Quadratcentimeter, proportional ist. Würde also die Kolbenstange S mit einem Zeiger verbunden, der auf eine entsprechend eingetheilte Skala weist, so wäre das Instrument ein Manometer zur Angabe der betreffenden Dampfspannung. In der That aber ist die Kolbenstange entweder unmittelbar oder mittelbar, nämlich vermittels eines die Kolbenbewegung in paralleler Richtung vergrössernden Hebelmechanismus mit einem Schreibstifte verbunden, der ein sogenanntes Diagramm, nämlich hier bei periodischer Wiederholung desselben Aenderungsgesetzes der Dampfspannung eine in sich zurücklaufende Curve auf einer mit Papier bespannten Fläche zeichnet, welche mit einer (sofern es sich um totalisirende Messung der Arbeitstärke handelt) der Kolbengeschwindigkeit der Dampfmaschine in jedem Augenblicke proportionalen Geschwindigkeit senkrecht gegen die Richtung der Indicatorkolbenstange hin und her bewegt wird. Bei dem ursprünglichen Watt'schen Indicator befand sich das Papierblatt auf einer ebenen Tafel, bei den heutigen Einrichtungen ist es leicht lösbar auf der Umfläche eines Cylinders festgeklemmt, der um einen mit dem Indicatorcylinder parallelen Dorn der Bewegung des Maschinenkolbens oder sonstigen Maschinentheils entsprechend hin und her gedreht wird, und zwar im einen Sinne durch eine mit dem betreffenden Maschinentheile verbundene und andrerseits den Papiercylinder in einer Rinne

umschlingende Schnur, im umgekehrten Sinne durch eine zwischen Dorn und Papiercylinder eingefügte und die Schnur beständig gespannt erhaltende Spiralfeder. Die Drehung beträgt im Maximum etwas weniger als 360°, da die Festhaltung des Papiers einen Theil des Umfanges in Anspruch nimmt.

Es bedarf keiner näheren Erläuterung, wie das erhaltene sogenannte Kolbendiagramm, entsprechend dem Anschlusse der Schnur an einen wie der Maschinenkolben beweglichen Maschinentheil, mit Hülfe der Skala, die der benutzten Feder entspricht, dazu dienen kann, um (zunächst für die Seite des Cylinders, mit welcher das Instrument verbunden wurde) nicht nur die jeder Kolbenstellung entsprechende Dampfspannung zu finden, sondern auch vermittels der Methoden zur Inhaltsbestimmung irgend einer ebenen Fläche die mittlere Spannung hinter und vor dem Kolben und folglich auch die sogenannte indicirte Arbeitstärke, sofern die wirksame Fläche und der Hub des Dampfkolbens bekannt sind und die Hubzahl pro Zeiteinheit gleichzeitig beobachtet wird.

Von den verschiedenen Constructionen des Indicators, hinsichtlich deren Einzelheiten hier auf die betreffenden Specialschriften* verwiesen werden muss, hat z. Z. vorzugsweise der Indicator von Richards die ausgedehnteste Anwendung gefunden. Von älteren Constructionen, z. B. von dem früher sehr verbreiteten Indicator von Mac Naught unterscheidet er sich vor Allem durch die viel geringere Länge der Schraubenfeder, die bei ihm durch einen Ueberdruck auf die untere Kolbenfläche nicht ausgedehnt, wie dort, sondern zusammengedrückt wird, und durch grösseren Durchmesser bei (der kürzeren Feder entsprechend) kleinerem Hub des Kolbens, der deshalb nicht mehr unmittelbar, sondern vermittels eines leichten Geradführungs-Hebelmechanismus auf den Schreib-

---

* Benutzt sind hier namentlich folgende:

Der Indicator. Anleitung zum Gebrauch desselben bei der Prüfung von Dampfmaschinen und zur Ermittelung des Kraftbedarfs von Arbeitsmaschinen; von J. Völckers. Zweite Auflage, 1878, bearbeitet von R. Ziebarth.

Der Indicator und seine Anwendung mit specieller Beziehung auf den Indicator nach Richards. Von P. H. Rosenkranz. Dritte Auflage, 1879.

Vergleichende Bemerkungen über Indicatoren im Allgemeinen und über Neuerungen an Indicatoren von Dreyer, Rosenkranz & Droop in Hannover. Von P. H. Rosenkranz. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrgang 1881, S. 170.

Ueber Indicatoren und deren Verwendung bei Prüfung von Dampf- und Arbeitsmaschinen. Von Schäffer & Budenberg, 1882.

stift übertragen wird. Wenn auch durch diesen Mechanismus und durch den grösseren Kolben (etwa 20^{mm} Durchmesser gegenüber 10^{mm} bei Mac Naught für den Fall eines Dampfmaschinen-Indicators) die Ersparniss an Masse der hin und her gehenden Theile, die durch die kürzere Feder und Kolbenstange erzielt werden, nahe aufgewogen sein mag, so wird doch durch den viel kleineren Hub, und zwar hier im quadratischen Verhältnisse die lebendige Kraft verkleinert, die der hin und her gehenden Masse in periodischer Wiederholung ertheilt werden muss und durch welche besonders die störende gewellte und selbst stellenweise zackige Form mancher Indicatorcurven verursacht wird. Aus demselben Grunde pflegen mehrere ungleich kräftige Federn demselben Instrument beigegeben zu sein, und hat man sich einer um so stärkeren, den Hub um so mehr verkürzenden Feder zu bedienen, je schneller der Gang der zu indicirenden Maschine ist und je plötzlicher die Aenderungen der Dampfspannung bei ihr stattfinden. Die Vergrösserung des Indicatorkolbens vergrössert zwar den Absolutwerth seiner Reibung unter sonst gleichen Umständen im Verhältnisse seines Durchmessers; weil aber der Dampfdruck auf den Kolben im quadratischen Verhältnisse seines Durchmessers steht, ist die verhältnissmässige Grösse der Reibung dem Durchmesser umgekehrt proportional.

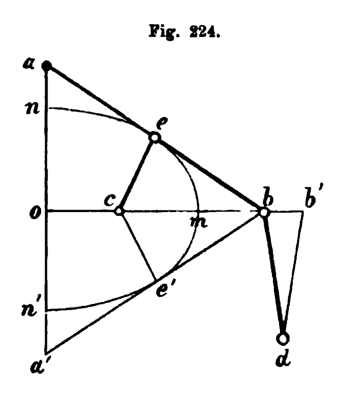
Trotz jener Verbesserungen sind mit dem nach Richards construirten Indicator höchstens bis zu der Tourenzahl 300 pro Minute brauchbare Diagramme zu erhalten, und auch das nur dann, wenn die Dampfmaschine, wie bei Locomotiven, mit erheblicher Compression des Vorderdampfes, also sehr allmähliger Zunahme der Spannung bis zu ihrem Maximum arbeitet. Eine Verwendbarkeit bis zu etwa 450 Touren pro Minute ist durch den Indicator von Thompson erzielt worden, bei welchem sich, übrigens ohne principielle Constructionsänderung, die auf den Indicatorkolben reducirte Masse der beweglichen Theile noch mehr beschränkt findet besonders dadurch, dass die Kolbenstange bis zu kleinstmöglicher Wandstärke hohl gedreht und eine andere Art von hubvergrössernder Geradführung benutzt, nämlich der Lemniscoidenlenker des Indicators von Richards durch einen sogenannten angenäherten Ellipsenlenker ersetzt worden ist, wobei der Bleistift nicht in der Mitte, sondern am Ende des somit nur etwa halb so ausgedehnten Hebelmechanismus sitzt. Auch wurde (abgesehen von noch anderen, mehr untergeordneten Verbesserungen) die Weite des Dampfzuleitungsrohrs zum Indicatorcylinder, also auch die entsprechende Bohrung des darin befindlichen Hahns von etwa 8 zu 13 Millimeter vergrössert, um die Spannungsänderungen unter



dem Indicatorkolben denselben im Maschinencylinder mit möglichst wenig Widerstand und Zeitverlust folgen lassen zu können.

Was die Schreibstiftführung betrifft, so ist es übrigens nur zu billigen, wenn Dreyer, Rosenkranz & Droop den angenäherten Ellipsenlenker des Indicators von Thompson als genaueren Kreislenker gestaltet haben. Zur Erklärung sei daran erinnert (§. 12), dass, wenn eine Strecke mit ihren Endpunkten in den Schenkeln eines Winkels geführt wird, jeder mit der Strecke in der Winkelebene fest verbundene Punkt eine Ellipse beschreibt. Ist insbesondere der Winkel ein rechter $aob = a'ob$, Fig. 224, und der beschreibende Punkt e in der Strecke ab selbst gelegen, so fallen die Hauptaxen der elliptischen Bahn nmn' in die Schenkel des Winkels und sind ihre Halbaxen = den Entfernungen des beschreibenden Punktes von den Endpunkten der Strecke: $om = ae$ und $on = be$. Wird also umgekehrt die geradlinige Führung des Punktes a durch die elliptische Führung des Punktes e ersetzt, während b in der Geraden ob beweglich bleibt, so muss sich a in der Geraden aa' bewegen. Ist dabei, unter a und a' die von o gleich weit entfernten Grenzlagen dieses Punktes verstanden, der Winkel aba' von nur mässiger Grösse, so kann der entsprechende elliptische Führungsbogen eme' näherungsweise durch einen Kreisbogen ersetzt werden, dessen Mittelpunkt c in ob so liegt, dass $ce = cm = ce'$ ist; noch weniger störend ist der Ersatz der geradlinigen Bahn bb' des Punktes b durch einen Kreisbogen von genügend grossem Radius $db = db'$. Hierauf beruht die Schreibstiftführung des Thompson'schen Indicators, indem der Lenker ab mit seinem Schreibstifte a theils durch den um c schwingenden Gegenlenker ce, theils durch die um d schwingende Stütze db geführt wird und das Gestell, in welchem die Drehaxen c, d gelagert sind, coaxial um den Indicatorcylinder drehbar gemacht ist, um den Schreibstift in und ausser Berührung mit dem Papiercylinder bringen zu können. Damit hierbei der Indicatorkolben nicht mitgedreht zu werden braucht, ist das feine Glied, durch welches er mit dem Lenker ab an einer zwischen b und e liegenden Stelle gelenkig verbunden ist, mit ihm selbst bezw. mit seiner Kolbenstange durch ein Kugelgelenk gepaart. Die von Dreyer, Rosenkranz & Droop getroffene Wahl der Verhältnisse beruht nun einfach darauf, dass, wenn

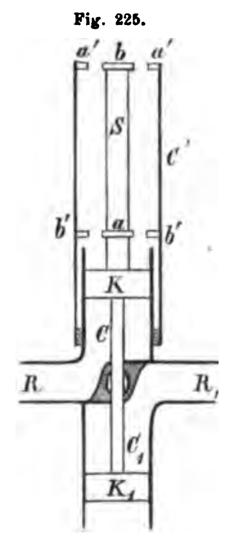
Fig. 224.



e der Mittelpunkt von ab ist, die Ellipse in einen Kreis mit dem Mittelpunkte o und Radius $oe = ae = be$ übergeht, der somit genau realisirbar ist durch einen Gegenlenker oe, dessen Nachtheil etwas grösserer Länge durch den Vortheil genauerer Geradführung des Schreibstiftes reichlich aufgewogen wird.

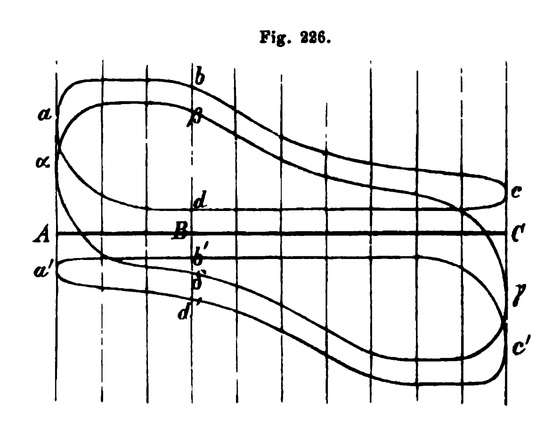
Des Indicators von Ashton & Storey, durch welchen die während einer beliebigen Beobachtungszeit geleistete Arbeit mit Hülfe einer Planimeterscheibe mit Frictionsrädchen analog Fig. 223 registrirt werden soll, sei hier nur nebenbei gedacht, da er der für den gewöhnlichen Gebrauch wünschenswerthen Einfachheit und Billigkeit ermangelt und es auch mindestens noch zweifelhaft erscheint, ob nicht jener Vortheil dauernder Registrirung durch die mit solcher Complication verbundenen neuen Fehlerquellen zu theuer erkauft wird. Eine nähere Besprechung verdienende Neuerung ist aber der Doppel-Indicator von Schäffer & Budenberg. Demselben liegt die Erwägung zu Grunde, dass das Diagramm eines gewöhnlichen Indicators zunächst nur ein Bild der Spannungsverhältnisse auf einer Seite des Dampfmaschinencylinders darbietet, und dass es zur Gewinnung eines zutreffenden Urtheils über das Aenderungsgesetz des resultirenden Dampfdruckes auf den Maschinenkolben streng genommen nöthig ist, mit zwei Indicatoren gleichzeitig von beiden Cylinderseiten Diagramme zu entnehmen, um dann die Hinterdampfdrucklinie der einen Seite mit der gleichzeitig beschriebenen Vorderdampfdrucklinie der andern und umgekehrt zu combiniren. Durch den Doppel-Indicator wird diese Operation vollkommener und ohne Mühe automatisch ausgeführt. Während er im Uebrigen ebenso wie ein Thompson'scher Indicator beschaffen ist, enthält er zwei durch eine Scheidewand getrennte, durch Canäle R, R_1, Fig. 225, mit der einen und andern Cylinderseite in Communication zu setzende Cylinder C, C_1, deren Kolben K, K_1 durch eine jene Scheidewand dampfdicht durchdringende leichte Stange verbunden sind. Die hohle Kolbenstange S oberhalb K, die in üblicher Weise durch ein Kugelgelenk mit dem Geradführungsmechanismus des Schreibstiftes verbunden ist, hat zwei Vorsprünge a, b entsprechend den Vorsprüngen a', b' des mit C fest verbundenen Hohlcylinders C'. und zwischen diese Vorsprünge passt bei der durch Fig. 225 angedeuteten

Fig. 225.



mittleren Lage, nämlich bei beiderseitig atmosphärischem Druck auf jeden der Kolben K, K_1 die Schraubenfeder mit ihren Endfassungen im spannungslosen Zustande gerade hinein. Wenn aber C durch R mit der einen und C_1 durch R_1 mit der andern Seite des Maschinencylinders communicirt, so hat, während oberhalb K und unterhalb K_1 nach wie vor atmosphärischer Druck herrscht, ein Ueberschuss des Dampfdruckes auf die untere Fläche von K über denselben auf die obere Fläche von K_1 ebensowohl Zusammendrückung der Feder zur Folge, wie ein Ueberdruck im umgekehrten Sinne; im einen Falle wird sie durch den aufwärts gehenden Vorsprung a gegen den festen Vorsprung a', im andern durch den abwärts gehenden Vorsprung b gegen b' gedrückt. Bei einem Doppelhube des Maschinenkolbens zeichnet dann der Schreibstift des Indicators eine geschlossene Curve $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$, Fig. 226, deren von der Geraden AC aus (der Bahn des Schreibstiftes bei Communication von R und R_1 mit der Atmosphäre) auf- und abwärts sich erstreckende Ordinaten, wie z. B. $B\beta$ und $B\delta$, den betreffenden Dampfüberdrucken im einen und andern Sinne proportional sind und deren ganze umgrenzte Fläche die ganze Dampfdruckarbeit für den Doppelhub darstellt, getheilt durch die Gerade AC in zwei dem einen und dem andern einfachen Hube entsprechende, nicht nothwendig ganz gleiche Theile.

Fig. 226.



Wird durch die betreffenden Hähne nur R mit dem Maschinencylinder, R_1 mit der Atmosphäre in Communication gesetzt oder umgekehrt, so ergeben sich die gewöhnlichen Diagramme $abcd$, bezw. $a'b'c'd'$, aus denen, wenn sie gleichzeitig getrennt beschrieben werden könnten, $\alpha\beta\gamma\delta$ dadurch zu erhalten wäre, dass für alle Ordinaten $b\beta$ in gleichem Sinne $= Bb'$, $d'\delta$ in gleichem Sinne $= Bd$ gemacht wird; der fragliche Sinn wird umgekehrt, wenn, wie es bei Condensationsmaschinen der Fall ist, die atmosphärische Linie AC die Einzeldiagramme $abcd$, $a'b'c'd'$ schneidet. Ein Vorzug des Doppel-Indicators liegt auch darin, dass, während die Einzeldiagramme bezüglich ihrer Lagen gegen die atmosphärische Linie durch eine Aenderung des Atmosphärendruckes

verschoben werden, das Diagramm $\alpha\beta\gamma\delta$ vom Barometerstande unabhängig ist. —

Ausser auf die besprochenen mehr oder weniger principiellen Einrichtungen hat sich die Beurtheilung und Prüfung eines Indicators auf manche Einzelheiten der Ausführung zu erstrecken, die für die Zuverlässigkeit der Resultate von Wichtigkeit sind. Vor Allem wichtig ist natürlich die Beschaffenheit der betreffenden Schraubenfeder und die Richtigkeit der jeder Feder beizugebenden Skala. Mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Dimensionen und des Verhaltens einer Feder von ihrer Temperatur sollte sie vor Allem bei der Herstellung ihrer Skala möglichst in eine solche Temperatur versetzt werden, der sie später beim Gebrauch des Instruments im Mittel voraussichtlich auszusetzen sein wird. Uebrigens herrschen verschiedene Ansichten darüber, ob es vorzuziehen sei, die Skala vollständig empirisch oder (nach empirischer Bestimmung eines der Maximalbelastung entsprechenden Theilstriches) gleichmässig einzutheilen, letzteren Falles nur unter Ausscheidung solcher Federn, die in Betreff der Proportionalität von Druck und Längenänderung übergrosse Abweichungen erkennen lassen, ferner darüber, ob die Prüfung besser durch directe Gewichtsbelastung der isolirten Feder, oder ob sie im Indicator selbst durch Dampf-, Luft- oder Wasserdruck (je nach der Bestimmung des Instruments) und Vergleichung mit einem Manometer zu geschehen hat. Ersteres Verfahren vermeidet die Unsicherheit, welche bei Aenderungen des Drucks auf den ruhenden Indicatorkolben durch ruckweise Bewegung desselben veranlasst werden kann, letzteres trägt aber den Besonderheiten und Mängeln jedes Instrumentes Rechnung, insbesondere auch kleinen Verschiedenheiten der Kolbendurchmesser.

Die Reibung des Indicatorkolbens wird daran erkannt, dass er aus verschiedenen Gleichgewichtslagen mit der Hand wiederholt gewaltsam entfernt und zugesehen wird, mit welcher Annäherung er, bezw. der Schreibstift jedesmal in die Anfangslage zurückkehrt. Ebenso schädlich, wie die Reibung, ist die Adhäsion des Kolbens an der Cylinderwand, und soll er deshalb nicht geölt sein.

Auf die Wichtigkeit passender Weite der Hahnbohrung und des Dampfzuleitungsrohres wurde schon hingewiesen; sie darf im Verhältniss zum Durchmesser des Indicatorkolbens und mit Rücksicht auf die Schnelligkeit seiner Bewegung nicht so klein sein, dass dadurch eine merkliche Spannungsdifferenz zwischen Maschinen- und Indicatorcylinder bedingt wird.

Dass der Papiercylinder gut centrirt und seine Drehungs-

axe mit der Axe des Indicatorcylinders parallel ist, wird an der ununterbrochen gleichmässigen Stärke der vom Schreibstifte verzeichneten Diagramme oder durch besondere Vorversuche erkannt. Seine Spiralfeder muss stark genug angespannt sein, um den Papiercylinder ohne erhebliche Nacheilung gegen die Schnur zurückgehen zu lassen, nachdem er durch diese im entgegengesetzten Sinne gedreht worden war; sie muss auch lang genug sein, damit bei der Drehung eine verhältnissmässig nur kleine Spannungsdifferenz und somit eine nur wenig veränderliche Dehnung der Schnur stattfinde.

Die Beschaffenheit der Schnur, die den Papiercylinder mit der zu prüfenden Maschine verbindet, ist um so wichtiger, je länger sie sein muss. Wegen der veränderlichen Spannung der Spiralfeder und der in periodisch wechselndem Sinne auftretenden Reibung des Papiercylinders soll sie möglichst wenig elastisch sein. Nach Völckers ist eine hanfene sogenannte Lothschnur am geeignetsten, wenn sie wochenlang durch ein angehängtes Gewicht von etwa 3 Kgr. gelängt, dann gefirnisst und in diesem Belastungszustande trocknen gelassen wurde. In nassen Räumen empfiehlt sich auch die Anwendung eines feinen Messingdrahtes statt der Hanfschnur.

Während meistens die Schnur aus zwei bezw. an der Maschine und in der Schnurrinne des Papiercylinders befestigten Theilen besteht, die zu Beginn und zu Ende eines Versuches durch Haken verbunden bezw. getrennt werden, ist auch diese lästige Operation durch besondere Einrichtungen zu vermeiden; bemerkenswerth in dieser Hinsicht ist eine von Staněk in Prag angegebene Anordnung des Papiercylinders, wodurch dieser beim Abheben des Schreibstiftes arretirt und von einer ihn tragenden Hülse gelöst wird, welche, durch die gespannte Schnur und die Spiralfeder beständig in schwingender Bewegung erhalten, ohne jene Arretirung den Papiercylinder mitnimmt.*

Als Schreibstift pflegt z. Z. ein Metallstift (von Rothguss oder Silber) verwendet zu werden, der auf besonders präparirtem Papier, genanntem metallic-paper, die Diagramme zeichnet.

In Betreff der Art und Weise, wie die Schnurlänge durch eine von einfacher Schieberschnalle (ein mit Löchern versehenes Plättchen) regulirt, das Papier auf dem betreffenden Cylinder befestigt, die Hubreduction vom einen zum andern Ende der Schnur durch passende

* Siehe den oben angeführten Aufsatz von Rosenkranz in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1881, S. 176.



geschaltete Hebel oder Reductionsrollen bewirkt werden kann, sowie in Betreff anderer beim Gebrauch des Indicators und behufs seiner Instandhaltung zu nehmender Rücksichten sei auf die bereits erwähnten Specialschriften hier verwiesen. Auf seine besonderen Anwendungen, namentlich zur Prüfung von Dampfmaschinen, wird an späteren Stellen dieses Werkes zurückzukommen sein. —

Trotz aller Verbesserungen seiner Construction und grösstmöglicher Sorgfalt bei seinem Gebrauche bleibt der Indicator mit gewissen Ungenauigkeiten behaftet, die besonders von Prof. Berndt in Chemnitz durch ausgedehnte Versuche näher bestimmt worden sind.* Sie bezogen sich zunächst auf das Verhalten von Schraubenfedern im isolirten Zustande, und zwar 9 Federn von 5 Richards-Indicatoren, einer von einem Ashton-Storey-Indicator. Bei letzterem communicirt der Indicatorcylinder von $1^1/_2$ Zoll engl. (38 Millimeter) Durchmesser einerseits mit der einen, andrerseits mit der andern Seite des Dampfmaschinencylinders, so dass die Feder abwechselnd um gleich viel zusammengedrückt und ausgedehnt wird, während die Feder eines Richards-Indicators vorwiegend zusammengedrückt, nur bei Condensationsmaschinen in geringerem Betrage auch ausgedehnt wird. Die Federn wurden kalt und warm (unter Einwirkung eines Dampfstrahls, in welchem ein Thermometer 90° C. zeigte) probirt. Die Ergebnisse waren folgende.

1. Als die Richards-Federn bis zur Maximalgrenze zusammengedrückt und wieder entlastet wurden, behielten die kalten Federn eine Zusammendrückung von 0,01 bis 0,38 Millim., die warmen eine solche von 0,14 bis 0,72 Millim. Bei der Ashton-Feder war die bleibende Längenänderung 0,10 oder 0,19 Millim., jenachdem sie kalt bis zur maximalen Grenze zusammengedrückt oder ausgedehnt worden war. Zur Wiederherstellung der ursprünglichen Länge der zusammengedrückt gewesenen Federn genügte eine Dehnung um den einer Atmosphäre entsprechenden Betrag (ähnlich dem Vorgange bei Condensationsmaschinen und Richards-Indicatoren) in der Regel nicht, nie bei den warm zusammengedrückten Federn. Auch im Verlauf mehrerer Tage nahm die der entlasteten Feder verbliebene Längenänderung in der Regel nicht merklich ab, wenigstens nicht mehr, als überhaupt die unbelasteten Federn auch ohne nachweisbare Ursache zu verschiedenen Zeiten sich verschieden lang zeigten.

2. Wenn die durch ruhige Belastung deformirten Federn in Schwing-

* Ueber die Genauigkeit der Indicatordiagramme. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1875, S. 1 u. ff.

ung versetzt wurden, so kamen sie bei etwas grösserer Deformation zur Ruhe. Bei den warm geprüften Richards-Federn betrug unter solchen Umständen die Zunahme der Zusammendrückung durch die Schwingung bis 0,65 Millim., bei der kalt geprüften Ashton-Feder die Zunahme der Zusammendrückung bis 0,26 Millim., die der Ausdehnung bis 0,40 Millim.

3. Die specifische Deformation (Zusammendrückung oder Ausdehnung pro 1 Kgr. der Belastung) ist von der Grösse der Belastung merklich abhängig. Die Zusammendrückung pro 1 Kgr. ist bei kalten Federn meistens um so kleiner, je grösser die Belastung, doch kehrte sich durch Erwärmung dieses Verhalten theilweise um. Die Ausdehnung der kalt geprüften Ashton-Feder pro 1 Kgr. nahm mit der Grösse der Belastung zu. Die durchschnittliche Abweichung der specifischen Zusammendrückung vom Mittelwerthe derselben betrug bei den verschiedenen Richards-Federn 1,4 bis 7,9 % im kalten, 1,4 bis 6,2 % im warmen Zustande, so dass die Wärme das Verhalten der Federn in dieser Beziehung etwas verbessert. Bei der Ashton-Feder waren die Abweichungen kleiner.

Uebrigens pflegt bei der Anfertigung der gleichmässig getheilten, d. h. eine constante specifische Deformation voraussetzenden Skalen als diese specifische Deformation nicht eine mittlere, sondern die der Maximalbelastung entsprechende gewählt zu werden, und ist es dann namentlich von Interesse, den dadurch verursachten Fehler der Flächenbestimmung eines Indicatordiagramms zu kennen. Derselbe wurde von Berndt ermittelt für die warmen Richards-Federn und für Maschinen ohne Condensation

bei 0,5 Füllungsgrad bis zu 2,3 %
bei 0,3 Füllungsgrad bis zu 2,7 %.

Dabei ist vorausgesetzt, dass auch der Skala die Zusammendrückung der warmen Feder bei grösster Belastung zu Grunde liegt. Wird aber, wie es häufig geschieht, diese der Skala zu Grunde gelegte Probebelastung im kalten Zustande der Feder vorgenommen, so geht daraus ein noch grösserer wahrscheinlicher Fehler hervor; denn es ergab sich der Ueberschuss der Maximalzusammendrückung der warmen über die der kalten Federn = 1,2 bis 5,9 %. Diese Erfahrungen sprechen für vollständig empirische Theilung der Skalen, während die Federn möglichst in ihrer durchschnittlichen Gebrauchstemperatur sich befinden.

4. Die bisher erwähnten Beobachtungen bezogen sich auf die isolirten Federn. Zur Untersuchung des Einflusses der Umstände, unter welchen sie sich im Indicator bei dessen Gebrauch befinden, wurden die Indicatoren mit Dampfkesseln in Verbindung gebracht, worin gleichzeitig



die Dampfspannungen durch sorgfältig controlirte Manometer gemessen wurden.

Zur Prüfung des Einflusses der Reibung und Adhäsion des Indicatorkolbens im Cylinder wurde zunächst bei beiderseitigem Atmosphärendrucke auf den Kolben der Stand des Schreibstiftes wiederholt beobachtet, nachdem der Kolben zuvor im einen oder im andern Sinne etwas aus der Gleichgewichtslage entfernt und zurückgefedert war. Die grösste Abweichung vom mittleren Stande betrug dann im Durchschnitt 0,3 Millim., wuchs aber auf durchschnittlich 1,1 Millim., als die Proben mit durch Einwirkung von Dampf genässten Indicatorkolben wiederholt wurden. Auch die mittleren (normalen) Stände waren in beiden Fällen nicht ganz gleich, sondern differirten um durchschnittlich 0,4 Millimeter.

Der Einfluss der Dampfdurchlässigkeit des Indicatorkolbens musste sich durch eine Verminderung des Dampfüberdruckes auf denselben, also dadurch zu erkennen geben, dass die mittlere Zusammendrückung der Feder des mit dem Dampfkessel verbundenen Indicators, nachdem zur Beseitigung des Einflusses von Reibung und Adhäsion der Kolben in beiderlei Sinn zuvor abgelenkt war, weniger beträgt, als die Zusammendrückung der freien Feder durch eine der Kesselspannung entsprechende Belastung. In der That war dieser Unterschied sehr merklich und betrug im Durchschnitt 6 %. Er spricht vorzugsweise gegen die Herstellung der Skala durch Gewichtsbelastung der isolirten Feder.

Der Einfluss der Reibung des Schreibstiftes auf den Stand desselben wurde zu 0,25 bis 0,4 Millim. ermittelt, jenachdem er schwächer oder stärker angedrückt war.

5. Wie die Ordinaten des Diagramms infolge verschiedener Ursachen nicht genau den Drucken, so sind seine Abscissen nicht genau den Wegen des Dampfkolbens proportional infolge der Dehnbarkeit der zur Bewegung des Papiercylinders dienenden Schnüre und der durch Leitrollen, Reductionsrollen und dergleichen Einschaltungen vermehrten Widerstände. Da die Dehnungen der Schnüre bei ihrer ungleichförmigen Bewegung an verschiedenen Stellen nicht gleich sind, ist ihre Prüfung im Ruhezustande, wie sie schon Völckers ausgeführt hatte, nicht ausreichend. Prof. Dr. Weinhold* verband den Papiercylinder des Indicators vermittels der Schnur mit einer durch eine Kurbel hin- und herbewegten,

* Experimentelle Untersuchungen über die Genauigkeit der Indicatordiagramme. Von Prof. Berndt. Programm der Kgl. höhern Gewerbschule, Baugewerken- und Werkmeisterschule zu Chemnitz, Ostern 1875.



die Kolbenstange der Dampfmaschine repräsentirenden Schiene und bespannte diese ebenso wie den Papiercylinder mit feinem Seidenpapier, durch welches er nach Eintritt eines Beharrungszustandes in kleinen Intervallen gleichzeitig elektrische Funken hindurchschlagen liess, um so nach Reduction der betreffenden Punktreihen auf gleiche Gesammtlänge die Unterschiede gleichzeitiger Theilwege zu erkennen. Indem dabei als Schnüre theils ungelängte, neu- oder altgelängte Hanfschnüre, trocken oder feucht, theils Darmsaiten, Seidenschnüre oder dünne Messingdrähte benutzt wurden, mit oder ohne Einschaltung von Leit- oder Reductionsrollen, ergab sich bei Schnurlängen von 1,3 bis 3,2 Meter und bei ungefähr 60 Kurbelumdrehungen pro Minute, dass im Durchschnitt während der ersten 78 % eines einfachen Hubes der Papiercylinder hinter der Schiene zurückblieb, während der übrigen 22 % ihr voreilte.

Der Einfluss, den die entsprechende Verschiebung der Ordinaten auf die Fläche des Diagramms ausübt, wurde graphisch ermittelt, und zwar für nach dem Mariotte'schen Gesetz mit 0,5 und 0,3 Füllung construirte ideale Diagramme, deren untere Begrenzung mit der atmosphärischen Linie zusammenfiel, während die der Maximalspannung entsprechende Höhe = 100 Millimeter angenommen wurde. Indem dabei die Abscissen zunächst den Theilwegen der durch die Kurbel bewegten Schiene (den Kolbenwegen der Maschine), dann aber mit Uebertragung derselben Ordinaten den gleichzeitigen Theilwegen des Papiercylinders entsprechend angenommen wurden, ergaben sich je zwei Diagramme von gleichen Gesammtlängen und Höhen, von deren Flächen sich die des zweiten, also des wegen fehlerhafter Bewegungsübertragung auf den Papiercylinder etwas verzerrten Diagramms gegenüber dem ersten um durchschnittlich 1,1 % zu klein ergab, nämlich um 0,7 % bei 0,5 Füllung und 1,5 % bei 0,3 Füllung, im einen und im andern Falle etwas mehr zu klein, wenn die hier massgebende obere oder Hinterdampfdrucklinie des Diagramms mit abnehmender, als wenn sie mit zunehmender Spannung der Spiralfeder des Papiercylinders beschrieben wird. Unter gewöhnlichen Umständen ist hiernach der durch die Schnur verursachte Fehler nicht erheblich; besonders die Messingdrähte wurden als sehr zuverlässig befunden. Wesentlich grösser kann aber der Fehler durch die Einschaltung von Leit- und Reductionsrollen werden, noch mehr bis = 5 % und darüber durch die Benutzung von Seidenschnüren und von nassen Hanfschnüren. Auch bleibt es ungewiss, ob und wie bei viel grösserer Tourenzahl, als 60, der Fehler etwa als abhängig von derselben sich ergeben mag.



6. Weitere Versuche von Prof. Berndt* betrafen die Genauigkeit der Planimeterangabe und der Frictionsschienenbewegung des Ashton-Storey-Indicators. Dabei wurden zwar die Angaben des Planimeters, insoweit sie durch einen etwaigen Mangel rein rollender Bewegung der Frictionsrolle auf der Planimeterscheibe fehlerhaft werden können, über Erwarten bis auf 0,1 % genau gefunden; dagegen ergab sich der Fehler der Bewegungsübertragung vom Dampfmaschinenkolben auf die Planimeterscheibe vermittels einer von der Kurbelstange hin- und herbewegten Frictionsschiene mit zugehöriger Rolle wenigstens = 2 %. In dieser Hinsicht würde einstweilen nur die Uebertragung mit Hülfe einer stark ansteigenden Schraube empfehlenswerth erscheinen, wenn sie nicht für die gewöhnlichen Fälle vorübergehender Benutzung des Instruments zu kostspielig wäre.

* Siehe das angeführte Programm von Ostern 1875.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.

